

FDTD 法による音響透過損失の数値解析

村上桂一, 青山剛史
宇宙航空研究開発機構

Numerical Analysis of Sound Transmission Loss using FDTD Method

by
Keiichi Murakami and Takashi Aoyama

ABSTRACT

This paper provides the results of a numerical analysis on sound transmission loss of a thin aluminum plate. The finite difference time domain (FDTD) method is used in this study because it simultaneously solves both sound wave propagation in fluid and elastic wave propagation in solid. The calculated value of sound transmission loss gives good agreement with that of mass law. Sound transmission of saw-shaped wave approximated by the sum of sine waves is also calculated. As a result, it is considered that even if a non-linear sound wave reaches to a thin plate, its high frequency components are reduced and the transmitted wave can be treated as a linear wave under the condition which an incident plane wave transmits to infinitely large thin plate.

1. はじめに

実際のフライトや実験によるロケット打上げ時の音響データが欧米に比べて少ない現状のなか、日本の射場やロケット形態にも適用可能な搭載衛星の音響振動に関する予測方法を確立することが重要である。そこで、JAXA では、ロケットペイロードの流体・音響・振動連成解析に関する研究を推進している。将来的には搭載衛星の音響試験を仮想的に行うことができ、得られた結果から音響振動の低減策を提案できることを究極の研究目標として定め、それに必要な要素技術の確立を目指している。具体的には、ロケットペイロードの音響振動に関する解析を以下の4項目に分けて考えている。

1. 音源解析：プルームに起因する音源の解析
2. 伝播解析：反射や回折を含む音響伝播の解析
3. 透過解析：フェアリングを透過する音波の解析
4. 振動解析：フェアリング内に伝わった音波によるペイロードの音響加振の解析

本稿では、これらの要素技術研究のうち、項目3. 透過解析の研究に関して、これまでに作製してきた流体・固体弾性波伝播解析コードを用いて薄い平板の透過解析を行い、得られた音響透過損失を理論値と比較した結果を報告する。解析手法には、電磁波伝播解析の分野で発展してきたFDTD法¹⁾を用いた。FDTD法は、近年、流体・固体内弾性波伝播解析手法として、音響解析の分野でも脚光を浴びており、本研究でも、応力と粒子速度の微小変動成分を変数とするFDTD法に着目した。

2. 解法

2.1 流体・固体内を伝播する弾性波の支配方程式¹⁾

流体中を伝わる弾性波（音波）の支配方程式として、連続の式と運動方程式を考える。これら非線形な流体の支配方程式を、変数変化が小さいと仮定して線形近似することによって音波の支配方程式が得られる。3次元直交座標系 (x, y, z) の場合、以下のように記述される。

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\kappa \left(\frac{\partial \dot{u}_f}{\partial x} + \frac{\partial \dot{v}_f}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_f}{\partial z} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \dot{u}_f \\ \dot{v}_f \\ \dot{w}_f \end{bmatrix} = -\frac{1}{\rho_f} \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2)$$

ここで、 p は圧力の増分、 t は時間を表している。 κ は流体の体積弾性率を、 ρ_f は流体密度を表しており、これらは、圧力変化や体積変化が微小であることから一定と仮定している。また、 u_f, v_f, w_f は x, y, z 方向の流体要素の微小変位であり、その時間微分

$$\dot{u}_f = \partial u_f / \partial t, \dot{v}_f = \partial v_f / \partial t, \dot{w}_f = \partial w_f / \partial t$$

は、音波による流体粒子の速度変動に相当する。

一方、固体内の弾性波の支配方程式は、ひずみテンソル S_{ij} と図1に示される応力テンソル T_{ij} （添え字 ij は x, y, z を表す）との関係を表すフックの法則、及び、運動方程式である。ひずみテンソルも応力テンソルも、対角要素を中心として対称であるため、3次元応力テンソルの独立な要素は6成分となり、これらの成分を持つベクトル \mathbf{S}, \mathbf{T} を用いたフックの法則は $\mathbf{T} = [\mathbf{c}] \cdot \mathbf{S}$ となる。ここで、 $[\mathbf{c}]$ はステイフネステンソルであり、その成分は、 $c_{ij} = c_{ji}$ の関係を持つ。フックの法則の両辺を時間微分した式、及び、運動方程式を具体的に記述すると、次式となる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} -T_1 \\ -T_2 \\ -T_3 \\ -T_4 \\ -T_5 \\ -T_6 \end{bmatrix} = -[\mathbf{c}] \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_s \\ \dot{v}_s \\ \dot{w}_s \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \dot{u}_s \\ \dot{v}_s \\ \dot{w}_s \end{bmatrix} = -\frac{1}{\rho_s} \begin{bmatrix} \frac{\partial(-T_1)}{\partial x} + \frac{\partial(-T_5)}{\partial z} + \frac{\partial(-T_6)}{\partial y} \\ \frac{\partial(-T_2)}{\partial y} + \frac{\partial(-T_4)}{\partial z} + \frac{\partial(-T_6)}{\partial x} \\ \frac{\partial(-T_3)}{\partial z} + \frac{\partial(-T_4)}{\partial y} + \frac{\partial(-T_5)}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (4)$$

ここでは、式の形を流体の支配方程式(1), (2)に合わせるため、応力ベクトル \mathbf{T} に負号を付け、固体粒子の速度 \dot{u}_s , \dot{v}_s , \dot{w}_s を変数として式を整理した。図1に示される応力ベクトル成分の中で、 T_1, T_3 が x, z 方向の垂直応力を、 T_5 がせん断応力をそれぞれ表す。また、3次元等方性固体モデルの場合、ステイッフネステンソルは次式となる。

$$[c] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{13} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} \end{bmatrix}$$

ここで、ヤング率 E とポアソン比 ν を用いると、 $c_{11} = E(1-\nu)/(1+\nu)/(1-2\nu)$, $c_{13} = E\nu/(1+\nu)/(1-2\nu)$
 $c_{55} = (c_{11} - c_{13})/2 = E/2/(1-\nu)$ である。

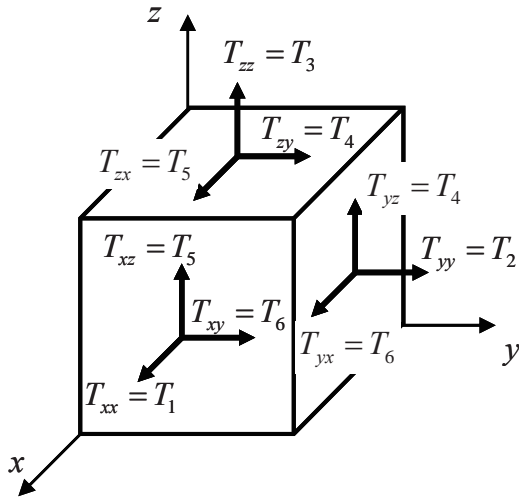


図1 応力の定義

2.2 FDTD 法

流体、固体の支配方程式とも、応力の時間微分が粒子速度の空間一階微分、粒子速度の時間微分が応力の空間一階微分で記述されている。FDTD 法は、式(1)から式(4)の支配方程式に対し、スタッガードメッシュを用いた蛙飛び差分法²⁾を適用したものであり、時間及び空間微分を2次精度中心差分で近似する。上述の通り、流体、固体とも支配方程式が同じ形式となるので、同様のスキームで解析が可能であることが、FDTD 法の特徴である。FDTD 法によって定式化された具体的な差分式を、参考までに、以下に示す。

流体：

$$\begin{aligned} P_{i,j,k}^{n+1/2} &= P_{i,j,k}^{n-1/2} \\ &\quad - \kappa \frac{2\Delta t}{2\Delta x} \left\{ (\dot{u}_f)_{i+1/2,j,k}^n - (\dot{u}_f)_{i-1/2,j,k}^n \right\} \\ &\quad - \kappa \frac{2\Delta t}{2\Delta y} \left\{ (\dot{v}_f)_{i,j+1/2,k}^n - (\dot{v}_f)_{i,j-1/2,k}^n \right\} \\ &\quad - \kappa \frac{2\Delta t}{2\Delta z} \left\{ (\dot{w}_f)_{i,j,k+1/2}^n - (\dot{w}_f)_{i,j,k-1/2}^n \right\} \\ (\dot{u}_f)_{i+1/2,j,k}^{n+1} &= (\dot{u}_f)_{i+1/2,j,k}^n \\ &\quad - \frac{1}{\rho_f} \frac{2\Delta t}{2\Delta x} \left\{ P_{i+1,j,k}^{n+1/2} - P_{i,j,k}^{n+1/2} \right\} \\ (\dot{v}_f)_{i,j+1/2,k}^{n+1} &= (\dot{v}_f)_{i,j+1/2,k}^n \\ &\quad - \frac{1}{\rho_f} \frac{2\Delta t}{2\Delta y} \left\{ P_{i,j+1,k}^{n+1/2} - P_{i,j,k}^{n+1/2} \right\} \\ (\dot{w}_f)_{i,j,k+1/2}^{n+1} &= (\dot{w}_f)_{i,j,k+1/2}^n \\ &\quad - \frac{1}{\rho_f} \frac{2\Delta t}{2\Delta z} \left\{ P_{i,j,k+1}^{n+1/2} - P_{i,j,k}^{n+1/2} \right\} \end{aligned}$$

固体：

$$\begin{aligned} (-T_1)_{i,j,k}^{n+1/2} &= (-T_1)_{i,j,k}^{n-1/2} \\ &\quad - c_{11} \frac{2\Delta t}{2\Delta x} \left\{ (\dot{u}_s)_{i+1/2,j,k}^n - (\dot{u}_s)_{i-1/2,j,k}^n \right\} \\ &\quad - c_{13} \frac{2\Delta t}{2\Delta y} \left\{ (\dot{v}_s)_{i,j+1/2,k}^n - (\dot{v}_s)_{i,j-1/2,k}^n \right\} \\ &\quad - c_{13} \frac{2\Delta t}{2\Delta z} \left\{ (\dot{w}_s)_{i,j,k+1/2}^n - (\dot{w}_s)_{i,j,k-1/2}^n \right\} \\ (-T_2)_{i,j,k}^{n+1/2} &= (-T_2)_{i,j,k}^{n-1/2} \\ &\quad - c_{13} \frac{2\Delta t}{2\Delta x} \left\{ (\dot{u}_s)_{i+1/2,j,k}^n - (\dot{u}_s)_{i-1/2,j,k}^n \right\} \\ &\quad - c_{11} \frac{2\Delta t}{2\Delta y} \left\{ (\dot{v}_s)_{i,j+1/2,k}^n - (\dot{v}_s)_{i,j-1/2,k}^n \right\} \\ &\quad - c_{13} \frac{2\Delta t}{2\Delta z} \left\{ (\dot{w}_s)_{i,j,k+1/2}^n - (\dot{w}_s)_{i,j,k-1/2}^n \right\} \\ (-T_3)_{i,j,k}^{n+1/2} &= (-T_3)_{i,j,k}^{n-1/2} \\ &\quad - c_{13} \frac{2\Delta t}{2\Delta x} \left\{ (\dot{u}_s)_{i+1/2,j,k}^n - (\dot{u}_s)_{i-1/2,j,k}^n \right\} \\ &\quad - c_{13} \frac{2\Delta t}{2\Delta y} \left\{ (\dot{v}_s)_{i,j+1/2,k}^n - (\dot{v}_s)_{i,j-1/2,k}^n \right\} \\ &\quad - c_{11} \frac{2\Delta t}{2\Delta z} \left\{ (\dot{w}_s)_{i,j,k+1/2}^n - (\dot{w}_s)_{i,j,k-1/2}^n \right\} \\ (-T_4)_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} &= (-T_4)_{i,j+1/2,k+1/2}^{n-1/2} \\ &\quad - c_{55} \frac{2\Delta t}{2\Delta z} \left\{ (\dot{v}_s)_{i,j+1/2,k+1}^n - (\dot{v}_s)_{i,j+1/2,k}^n \right\} \\ &\quad - c_{55} \frac{2\Delta t}{2\Delta y} \left\{ (\dot{w}_s)_{i,j+1,k+1/2}^n - (\dot{w}_s)_{i,j,k+1/2}^n \right\} \\ (-T_5)_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+1/2} &= (-T_5)_{i+1/2,j,k+1/2}^{n-1/2} \\ &\quad - c_{55} \frac{2\Delta t}{2\Delta z} \left\{ (\dot{u}_s)_{i+1/2,j,k+1}^n - (\dot{u}_s)_{i+1/2,j,k}^n \right\} \\ &\quad - c_{55} \frac{2\Delta t}{2\Delta x} \left\{ (\dot{w}_s)_{i+1,j,k+1/2}^n - (\dot{w}_s)_{i,j,k+1/2}^n \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (-T_6)_{i+1/2,j+1/2,k}^{n+1/2} &= (-T_6)_{i+1/2,j+1/2,k}^{n-1/2} \\
 &\quad - c_{55} \frac{2\Delta t}{2\Delta y} \left\{ (\dot{u}_s)_{i+1/2,j+1,k}^n - (\dot{u}_s)_{i+1/2,j,k}^n \right\} \\
 &\quad - c_{55} \frac{2\Delta t}{2\Delta x} \left\{ (\dot{v}_s)_{i+1,j+1/2,k}^n - (\dot{v}_s)_{i,j+1/2,k}^n \right\} \\
 (\dot{u}_s)_{i+1/2,j,k}^{n+1} &= (\dot{u}_s)_{i+1/2,j,k}^n \\
 &\quad - \frac{1}{\rho_s} \frac{2\Delta t}{2\Delta x} \left\{ (-T_1)_{i+1,j,k}^{n+1/2} - (-T_1)_{i,j,k}^{n+1/2} \right\} \\
 &\quad - \frac{1}{\rho_s} \frac{2\Delta t}{2\Delta z} \left\{ (-T_5)_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+1/2} - (-T_5)_{i+1/2,j,k-1/2}^{n+1/2} \right\} \\
 &\quad - \frac{1}{\rho_s} \frac{2\Delta t}{2\Delta y} \left\{ (-T_6)_{i+1/2,j+1/2,k}^{n+1/2} - (-T_6)_{i+1/2,j-1/2,k}^{n+1/2} \right\} \\
 (\dot{v}_s)_{i,j+1/2,k}^{n+1} &= (\dot{v}_s)_{i,j+1/2,k}^n \\
 &\quad - \frac{1}{\rho_s} \frac{2\Delta t}{2\Delta y} \left\{ (-T_2)_{i,j+1,k}^{n+1/2} - (-T_2)_{i,j,k}^{n+1/2} \right\} \\
 &\quad - \frac{1}{\rho_s} \frac{2\Delta t}{2\Delta z} \left\{ (-T_4)_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} - (-T_4)_{i,j+1/2,k-1/2}^{n+1/2} \right\} \\
 &\quad - \frac{1}{\rho_s} \frac{2\Delta t}{2\Delta x} \left\{ (-T_6)_{i+1/2,j+1/2,k}^{n+1/2} - (-T_6)_{i-1/2,j+1/2,k}^{n+1/2} \right\} \\
 (\dot{w}_s)_{i,j,k+1/2}^{n+1} &= (\dot{w}_s)_{i,j,k+1/2}^n \\
 &\quad - \frac{1}{\rho_s} \frac{2\Delta t}{2\Delta z} \left\{ (-T_3)_{i,j,k+1}^{n+1/2} - (-T_3)_{i,j,k}^{n+1/2} \right\} \\
 &\quad - \frac{1}{\rho_s} \frac{2\Delta t}{2\Delta y} \left\{ (-T_4)_{i+1/2,j+1/2,k}^{n+1/2} - (-T_4)_{i+1/2,j-1/2,k}^{n+1/2} \right\} \\
 &\quad - \frac{1}{\rho_s} \frac{2\Delta t}{2\Delta x} \left\{ (-T_5)_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+1/2} - (-T_5)_{i-1/2,j,k+1/2}^{n+1/2} \right\}
 \end{aligned}$$

これらの式で、 n は時間ステップ、 i, j, k はそれぞれ x, y, z 方向の格子インデックスを示しており、 Δt は時間離散間隔、 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ は空間離散間隔である。これらの式に示されるように、半整数 $n+1/2$ タイムステップの圧力を含む応力は、現時刻 n の粒子速度と半整数タイムステップ前 $n-1/2$ での応力から求められ、現時刻の応力を必要としない。これは、この差分法が蛙飛び差分と呼ばれる所以である。また、これらの差分式から、圧力及び応力と粒子速度は Δt 毎に交互に計算されるので、これらの値が同時に決まらないことが分かる。

2. 3 流体と固体が接する面の境界条件

図2は、2次元の場合の、流体領域及び固体領域に於ける変数と格子点の対応を示しているが、3次元の場合への拡張は容易である。図2の中で、黄色の点及び白色の点は半整数タイムステップ $n+1/2$ での圧力及び応力を、黒色の点は整数タイムステップ n での粒子速度を表している。図2のように固体と流体が接する場合、その境界面の境界条件は、次のように計算される。まず、境界面に垂直な応力 T_3 と圧力 P が等しくなるように、流体側の固体内部の仮想点（緑色の点）で、 $P = T_3$ とする。次に、この P を用いて青色の点での流体粒子速度 \dot{w}_f を求め、固体粒子速度 \dot{w}_s が \dot{w}_f と等しくなるように与える。また、流体の粘性は考慮していないので、固体表面でのせん断応力が 0 となるように、赤色の点で $T_5 = 0$ とする。

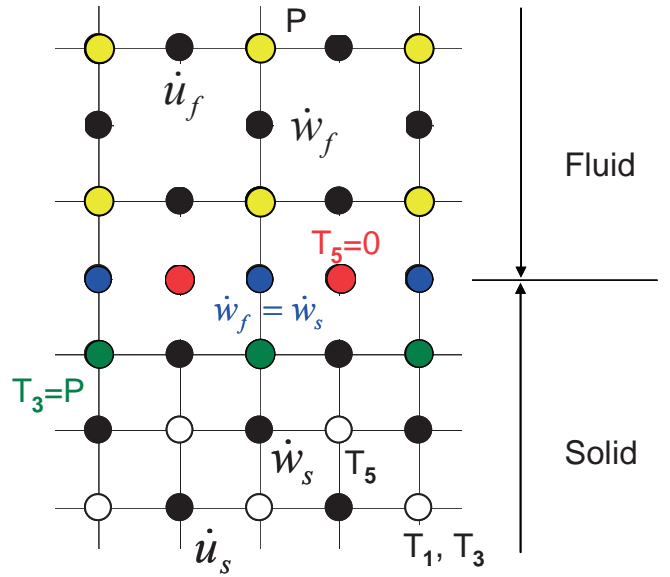


図2 FDTD法による変数とインデックスの対応

2. 4 吸収境界条件

計算領域の外側境界で不必要な音波の反射を防ぐために、必要に応じた精度の吸収境界条件を適用する。例えば、吸収境界に平行な方向の変化が小さいならば、Murの1次精度吸収境界条件³⁾を用いることができる。これは、境界面に垂直な方向の圧力に対する音速を c で表した1次元波動方程式

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0$$

を、代数的に因数分解した次式

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) P = 0$$

から導かれる。即ち、 x 方向のインデックス i の面に吸収境界を設定するならば、そこから負の方向に進行する波が 0 となるように、次式を差分近似した式から境界での圧力を求める。

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (5)$$

式(5)の差分式は、時間インデックス n 、空間インデックス $i-1/2$ で求められるが、FDTD法における圧力 P の時間と空間のインデックスは $n+1/2$ と i なので、両隣の差分式の平均を用いる。具体的には、次式のようになる。

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_{i-1/2}^n = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_{i-1/2}^{n+1/2} + \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_{i-1/2}^{n-1/2} \right\} \quad (6)$$

$$\approx \frac{1}{2\Delta x} \left(P_i^{n+1/2} - P_{i-1}^{n+1/2} + P_i^{n-1/2} - P_{i-1}^{n-1/2} \right)$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial t} \right)_{i-1/2}^n = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial P}{\partial t} \right)_i^n + \left(\frac{\partial P}{\partial t} \right)_{i-1}^n \right\} \quad (7)$$

$$\approx \frac{1}{2\Delta t} \left(P_i^{n+1/2} - P_i^{n-1/2} + P_{i-1}^{n+1/2} - P_{i-1}^{n-1/2} \right)$$

式(6)と(7)を式(5)に代入し、インデックス $(i, n+1/2)$ における P を求めると、次式のように Mur の1次精度吸収境界条件式が得られる。

$$P_i^{n+\frac{1}{2}} = P_i^{n-\frac{1}{2}} + \frac{c\Delta t - \Delta x}{c\Delta t + \Delta x} \left(P_{i-1}^{n+\frac{1}{2}} - P_i^{n-\frac{1}{2}} \right) \quad (8)$$

本解析では、平面波の透過を解析対象としており、吸収境界における境界面の接線方向の圧力変化は小さいとみなせるので Mur の 1 次精度吸収境界条件式(8)を用いた。しかし、球面波の伝播解析など、接線方向の圧力変化が無視できない場合には、Mur の 2 次精度吸収境界条件³⁾ や PML (Perfectly Matched Layer)⁴⁾ などが一般的に用いられる。

2. 5 音源

本解析では、平面波が平板に対して垂直に入射するように音源を設定した。具体的には、平板と反対側の流体領域境界付近に、振幅 1 の正弦波を時間の関数として連続的に与えた。ただし、このような平面波音源の与え方では、平板で反射して音源の位置に戻ってきた音波が、音源でも反射されて再び平板に達してしまい、後に示すように解析結果の透過波が正弦波に漸近するまで、様な入射波が与えられない。そこで、透過波が正弦波に漸近するのに十分な周期の入射波が与えられるように、音源が存在する流体領域を十分に長く設定し、音源で反射した音波が再び平板に達するまで解析を行うこととした。具体的には、平板の厚さ 2mm に対し、音源側の流体領域の長さを 6m とした。

3. 薄い平板の音響透過損失

3. 1 理論式

ある遮音構造物に強さ I_i の音波が入射したとき、構造物の裏側から生じる透過波の強さを I_t とすると、透過損失 TL [dB] は、次式で定義される。

$$TL = 10 \log_{10} \frac{I_i}{I_t}$$

図 3 のように、特性インピーダンス ρa (a は音速) の気体中に音波の波長よりも十分薄く、広さが十分広い均質な平板があり、この平板に正弦平面波が角度 0 度で入射する場合を考える⁵⁾。平板の音響インピーダンス密度 z_a が、平板に垂直方向の固体粒子速度 \dot{u}_0 を用いて $z_a = p/\dot{u}_0$ と書けるならば、音圧のつり合い条件は

$$p_i + p_r = p_t + z_a \dot{u}_0$$

となる。粒子速度の連続条件は、薄い板への平面波の垂直入射では $\dot{u}_t = \dot{u}_0$ と仮定できるので、

$$\dot{u}_i - \dot{u}_r = \dot{u}_t = \dot{u}_0$$

となる。平面波では、 $p = \rho a \dot{u}$ が成り立つので、粒子速度の式は、

$$p_i - p_r = p_t$$

となる。これらの式から p_r を消去し、次式を得る。

$$2p_i = 2p_t + z_a \dot{u}_0 = 2p_t + z_a \dot{u}_t = 2p_t + z_a \frac{p_t}{\rho a} \quad (9)$$

上式を変形すると、

$$\frac{p_i}{p_t} = 1 + \frac{z_a}{2\rho a}$$

となる。流体中の平面波においては、音の強さ I と音圧 p の間に $I = p^2 / (\rho a)$ の関係が成り立つので、この場合の透過損失の式は次式となる。

$$TL = 10 \log_{10} \left| \frac{p_i}{p_t} \right|^2 = 10 \log_{10} \left| 1 + \frac{z_a}{2\rho a} \right|^2 \quad (10)$$

一方、薄い平板の振動方向に x 軸をとり、 m を平板の面密度として、単位面積当たりの平板の運動方程式を次式で表す。

$$\frac{1}{2} m \frac{d^2 x}{dt^2} = p_i - p_t$$

この式の解の形として、 $x = x_0 \exp(i\omega t)$ を仮定し、 $\dot{u}_0 = dx/dt$ について整理すると、 $i\omega m \dot{u}_0 = 2(p_i - p_t)$ となる。式(9)の最初の等式から $z_a = 2(p_i - p_t)/\dot{u}_0$ なので、 $z_a = i\omega m$ と表せる。これを、式(10)に代入すると、角振動数 ω の垂直入射波に対する面密度 m の薄い平板の透過損失 TL [dB] は、次式の質量則で表される。

$$TL = 10 \log_{10} \left\{ 1 + \left(\frac{\omega m}{2\rho a} \right)^2 \right\}$$

気体として空気を考えて、空気の密度と音速を $\rho = 1.226 \text{ kg/m}^3$ 、 $a = 340 \text{ m/s}$ とし、固体として金属を考えると、 $\omega m \gg 2\rho a$ と仮定できる。更に、入射音波の周波数 f を用いて、 $\omega = 2\pi f$ を代入すると、質量則による透過損失の近似式が次式のように得られる。

$$TL \approx 20 \log_{10}(fm) - 42.5 \quad (11)$$

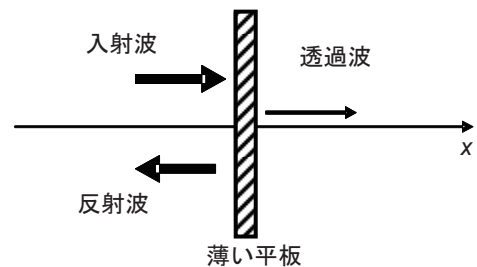


図 3 平板による遮音モデル

3. 2 質量則と計算結果の比較

平板の解析モデルとして、図 4 に示される模式図のように、静止流体中に置かれた固体に平面波が垂直に入射する場合を考える。具体的には、厚さ 2mm のアルミ板に、圧力変動の振幅が 1Pa の、800Hz と 1kHz の正弦波が入射する場合を考え、アルミ板の面密度を 5.4 kg/m^2 に設定した。解析に用いた媒質定数を表 1 に示す。

表 1 解析に用いた媒質定数

	密度 [kg/m ³]	縦波伝播速度 [m/s]	横波伝播速度 [m/s]
流体(空気)	1.226	340	N/A
固体(アルミ)	2,700	6,420	3,040

FDTD 法による数値計算では、平板の垂直方向に少なくとも 4 セルが入るように最小格子幅 Δd を 0.5mm に設定し、流体領域の格子幅も同様とした。平板に平行な方向には 50 セルとり、この方向の境界条件には、無限に広い平板を模擬する為に周期境界条件を設定した。クーラン数 CFL

を 0.5 とし、解析モデル設定の中で最速であるアルミ板内の縦波伝播速度 $V_p = 6,420\text{m/s}$ を用いると、時間刻み幅 Δt は、次式で与えられる。

$$\Delta t = \text{CFL}\Delta d / V_p = 3.89 \times 10^{-8} \text{ s}$$

図5に、計算初期段階の過渡的な透過波を示す。この図からわかるように、本解析モデルの場合、計算時間を十分に取らなければ、透過波が正弦波にならない。しかし、図6に示されるように、透過波の波形は正弦波に漸近するので、計算時間を十分に取ったときの波形から透過損失を求める。計算結果の波形から透過損失を求める式として、次式を用いた。

$$TL_c = \log_{10} \left(\frac{\overline{p_i^2}}{p_i^2} \right) \quad (12)$$

ここで、 $\overline{p_i^2}$ は入射波の音圧の2乗平均を表し、1周期の間に 10 タイムステップごとに保存した N 個の音圧データ p_i^n を用いて、次式から求める。

$$\overline{p_i^2} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau p_i(t)^2 dt \approx \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N \frac{(p_i^{n-1})^2 + (p_i^n)^2}{2}$$

$\overline{p_i^2}$ についても、透過波の計算結果から、図6の右端の1周期 τ のデータを用いて同様に求め、式(12)から TL_c を計算した。

式(11)の質量則から求めた理論値と、式(12)から求めた計算結果との比較を、図7に示す。この図から、作製したFDTD法による流体・固体弾性波伝播解析コードを用いて計算した透過損失が理論値と良く一致していることがわかり、このことから解析コードの妥当性が確認できる。

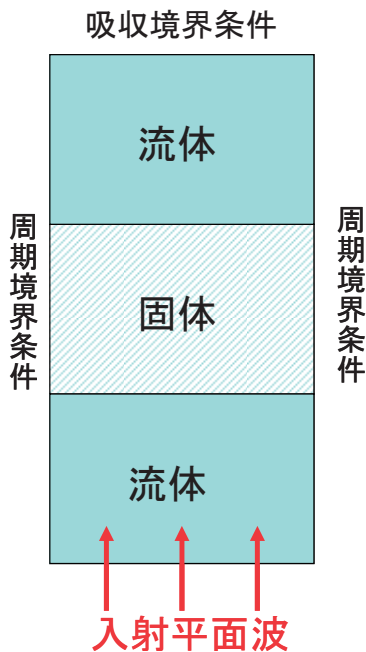


図4 解析モデルの模式図

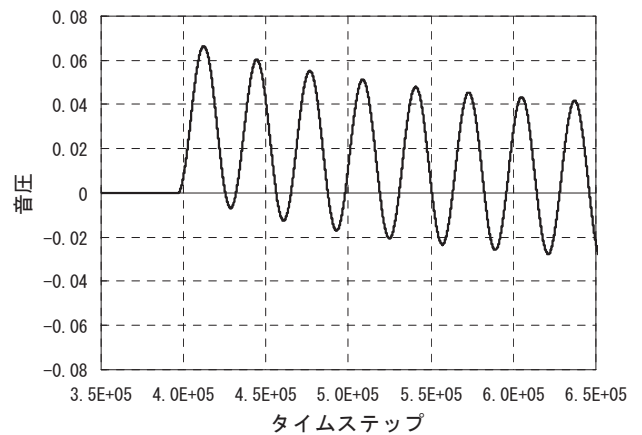


図5 過渡期の透過波

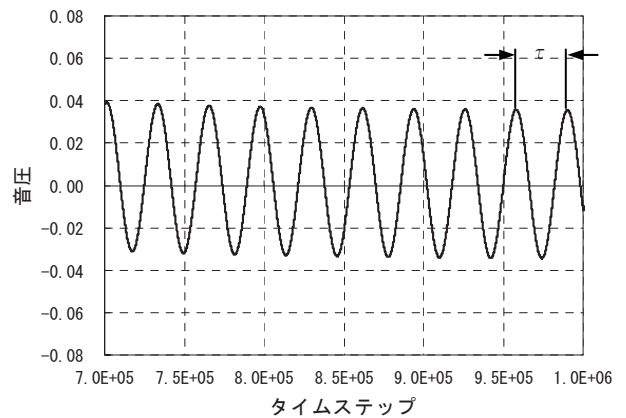


図6 計算時間を十分に取ったときの透過波

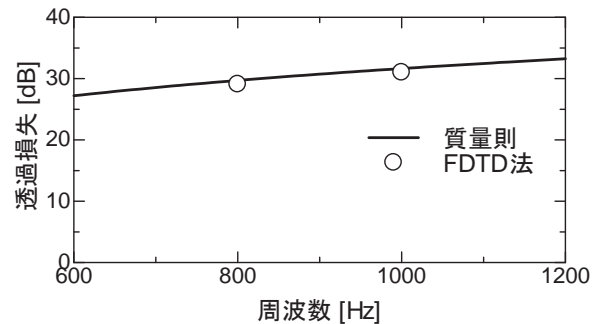


図7 質量則とFDTD法による計算結果の比較

4. 近似鋸波の透過解析

ロケット打上げ時に排気プルームに起因して発生する音圧は、初期音圧レベルが高い故に、フェアリング到達時までに鋸波状の非線形波に成り得る。この非線形波の透過特性を知ることが、衛星などのロケットペイロード打上げの信頼性向上に必要である。

本解析コードでは音響伝播の支配方程式が線形を仮定しているため、非線形音波を直接扱うことは出来ないが、次式のように、正弦波の重ね合わせで得られる近似的な鋸波を考える。

$$F(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{25} (-1)^{m+1} \frac{\sin(m\omega t)}{m} \quad (13)$$

式(13)の ω に 1kHz に対応した値を与えるならば、 $F(t)$ は、25kHz までの高周波成分を含む。式(13)で与えられる入射鋸波の波形を図8に示す。

作製した FDTD 解析コードを用いて、式(13)で与えられる近似鋸波が、板厚 2mm の無限に広いと仮定されたアルミ平板に入射する場合の透過解析を行った。計算時間を十分に取ったときの透過波の波形を、図9に示す。図8と図9を比較すると、透過波の波形は入射波の波形とは、かなり異なることが分かる。これは、質量則が成立する範囲では、式(11)に示されるように、高周波成分ほど透過損失が大きく、近似鋸波の高周波成分が透過し難いためと考えられる。実際に、図10に示されるように、式(13)で与えられる近似鋸波とその透過波の FFT 解析結果を見ると、透過波の高周波成分のパワースペクトルの減少が顕著に見られる。ただし、図9に示される透過波の波形が正負対称にならない理由は、今のところ明らかになっていない。

これらの解析結果から、非線形波が薄い平板を透過するとき、本解析条件の範囲内では、高周波成分が透過の過程で減少するので、透過波を線形的に扱うことが出来ると考えられる。

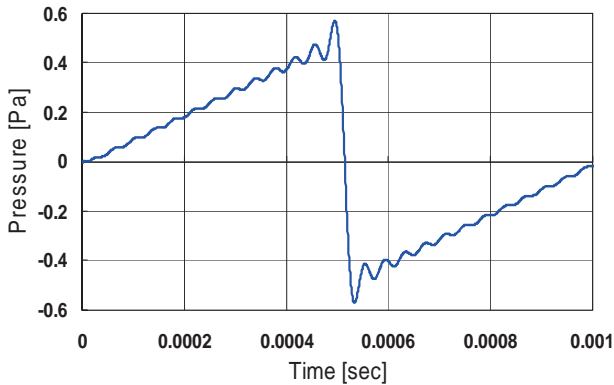


図8 近似鋸波の波形

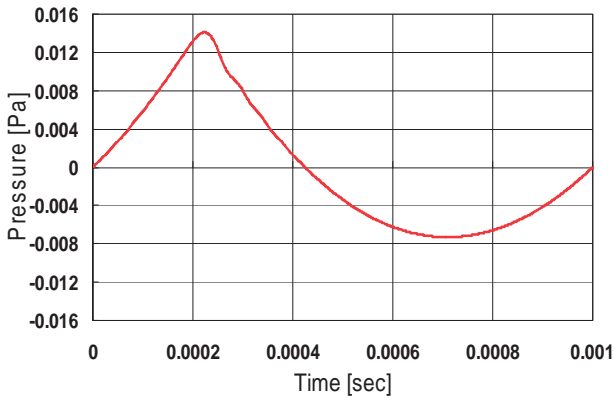


図9 近似鋸波が入射したときの透過波の波形

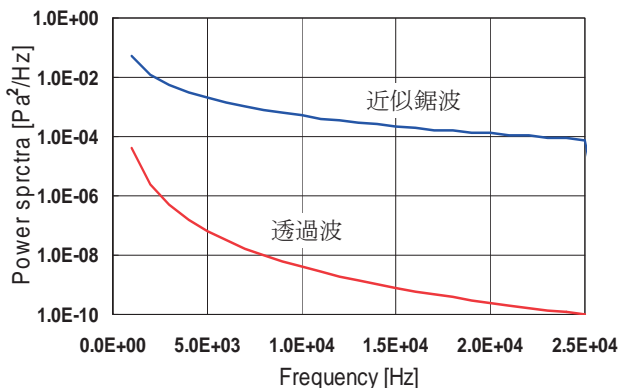


図10 近似鋸波及び透過波の FFT 解析結果

5. まとめ

作製した FDTD 法による流体・固体弾性波伝播解析コードを用いて、薄い平板の透過損失を計算した。質量則が成り立つ条件で計算した結果と、質量則の理論式から得られた値とを比較したところ、両者は良く一致しており、解析コードの妥当性が確認できた。

また、作製した FDTD 解析コードを用いて、薄い平板に対する近似鋸波の透過解析を行った。その結果、無限に広い薄い平板に平面波が垂直入射する条件の計算では、入射する近似鋸波の高周波成分の透過損失が大きく、透過波の波形が鋸波の波形とは大きく異なることが、確かめられた。今後の課題として、

- 透過損失の実験データとの比較による検証
 - 4辺を拘束した平板の透過損失
- 実際の3次元ハニカム形状への適用
 - フェアリングなどの一般形状への適用
 - 一般座標系の支配方程式へのFDTD法の適用
 - 薄い外板やコア部に起因する計算コストの削減
 - 音響透過特性を考慮したモデル化

などが挙げられる。

参考文献

- 1) 佐藤正弘, FDTD 法による弾性振動・波動の解析入門, 森北出版, 2003.
- 2) C. Hirsh, *Numerical Computation of Internal and External Flows*, Volume 1, JHON WILEY & SONS, 1989.
- 3) G. Mur, "Absorbing boundary condition for the finite-difference approximation of the time-domain electromagnetic-field equations," *IEEE Transactions on EMC*, Vol. 23, pp. 377-382, 1981.
- 4) J. P. Berenger, "A perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves," *J. Comp. Phys.* Vol. 114, pp. 185-200, 1994.
- 5) 社団法人 日本音響材料協会編, 騒音・振動対策ハンドブック, 技報堂出版, 1982.