

有限要素法を用いた圧縮粘性流れにおける形状最適化

中島修治*, 川原睦人**

* 中央大学大学院 理工学研究科 土木工学専攻

** 中央大学 理工学部 土木工学科

Shape Optimization in Compressible Viscous Flows Based on the Finite Element Method

by

Shuji Nakajima and Mutsuto Kawahara

ABSTRACT

The objective of this paper is to determine the optimal shape of a body - a two-dimensional elliptical cylinder in this study - located in a compressible viscous flow governed by the Navier-Stokes equations, such that the fluid force acting on the surface of the body is minimized. The optimal state is defined as the state in which the performance function - the integration of the square sum of the fluid force on the surface of the body - is minimized due to a reduction in fluid force on the body. A gradient of the performance function is computed by using the adjoint variables. The weighted gradient method is used as the minimization algorithm. The volume of the body is assumed to be constant. For the discretization of both the state and adjoint equations, the mixed interpolation method based on the bubble function interpolation presented previously by the authors is employed. Both the structured mesh around the surface and the smoothing procedure are employed for the gradient. As numerical studies, the shape optimization of a body in a uniform flow field is carried out. The initial shape of the body is assumed to be an ellipse. Finally, a stable optimal shape determination of a body in a compressible viscous flow is obtained by using the presented method.

1. 序論

本研究では、圧縮粘性流れにおける物体の流体力最小化問題を解くことにより、物体形状の最適化を実施する。圧縮非粘性流れにおいて、物体の面積が一定を仮定した場合、物体にかかる圧力が最小となる理論的な最適形状は無制限長さの平板である。前研究において、圧縮非粘性流れの形状最適化問題は解かれ、数値解析的に平板の形状が得られた¹⁾。流体力最小化問題について、圧縮粘性流れにおける物体形状の最適化を同手法によって行なう。

本研究では、評価関数は流体力の二乗和の積分で構成される。評価関数の拘束条件に、状態方程式の圧縮性 Navier-Stokes 方程式を用いる。評価関数の勾配は随伴方程式によって計算され、評価関数を最小にすることにより、形状が最適化される。最小化アルゴリズムには、重み付き勾配法が使われる。また、物体の面積は初期形状の面積から変化せず、一定として形状更新する。状態方程式及び随伴方程式の離散化には有限要素法が適用され、空間方向の離散化として気泡関数要素を用い、時間方向の離散化に Θ 法を用いる²⁾³⁾。時間項における気泡関数に基づいた混合補間は、気泡関数の節点値をプログラム上で保存する必要がなく効率的かつ安定に解くことが可能である。それゆえ、形状最適化問題を容易に扱うことが可能である。最適形状は勾配を用いて形状の導出を行なうため、アルゴリズムにおける重要な過程は、表面座標に関する評価関数の勾配を計算することである。勾配は物体表面に面した不均等なメッシュに依存する。その上、物体表面の節点間隔は形状の更新が進むにつれ、狭くなる。そのため、物体周りの構造メッシュ及び物体表面における等間隔の節点配置は、スムーズな勾配を得るのに必要となる。本研究では、リメッシング法に物体表面の節点間隔を一定とする方法を適用した Delaunay 三角分割法を用い⁴⁾、スムージング法も同時に導入する⁵⁾。これらによって、物体表面に対する勾配の安定な計算が可能となる。

数値解析例として、一様流に置かれた物体の形状最適化を実施する。初期形状には楕円を用いる。楕円は物体

の流体力を減少させる形状に更新され、圧縮粘性流れにおける最終形状が得られる。

2. 基礎方程式

基礎方程式として、保存変数による圧縮性 Navier-Stokes 方程式を用いる。

$$\dot{U} + A_j U_{,j} - (K_{ji} U_{,i})_{,j} = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (1)$$

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u_i \\ \rho e \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \rho \\ m_i \\ \rho e \end{bmatrix} \quad (2)$$

A_j 及び K_{ji} はヤコビ行列であり、 U の ρ 、 u_i 、 e は密度、流速、エネルギー密度を示す。本研究では理想気体を仮定するため、以下の状態方程式を用いる。

$$p = (\gamma - 1)\rho e \quad (3)$$

$$e = \varepsilon + \frac{u_i u_i}{2} \quad (4)$$

ここで、 γ は比熱比である。また、粘性係数と温度の関係式には Sutherland の公式を用いる。

初期条件には一様流を与え、図1に示す境界 Γ_B 、 Γ_O 、 Γ_S は、最適形状問題における解析時間域 I において、以下のように定義する。

$$U = \hat{U}(x_i, 0) \quad \text{in } \Omega \quad (5)$$

$$\begin{aligned} u_t &= \hat{u}_t \quad \text{on } \Gamma_I \times I \\ (\tau_{1j}, u_2, q_n) &= (0, 0, 0) \quad \text{on } \Gamma_S \times I \\ (p_0, \tau_{1j}, q_n) &= (\hat{p}_0, 0, 0) \quad \text{on } \Gamma_O \times I \\ (u_i, q_n) &= (0, 0) \quad \text{on } \Gamma_B \times I \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、 q_n 及び p_0 は法線方向の熱流束と静圧である。流入境界 Γ_I はリーマンの不変量及び等エントロピー条件により、以下のように定義する。

$$\begin{aligned} u_t &= \hat{u}_t, \quad \text{on } \Gamma_I \times I \\ R_\infty &= u_n - \frac{2c}{\gamma-1}, \quad \text{on } \Gamma_I \times I \\ c^2 &= \gamma(\gamma-1)(e - \frac{1}{2}u_i u_i), \quad \text{on } \Gamma_I \times I \\ S &= \ln(p\rho^{-\gamma}), \quad \text{on } \Gamma_I \times I \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、 u_t 及び u_n 、 c 、 R_∞ 、 S は、それぞれ、接線方向及び法線方向の速度、音速、リーマン不変量、エントロピーである。

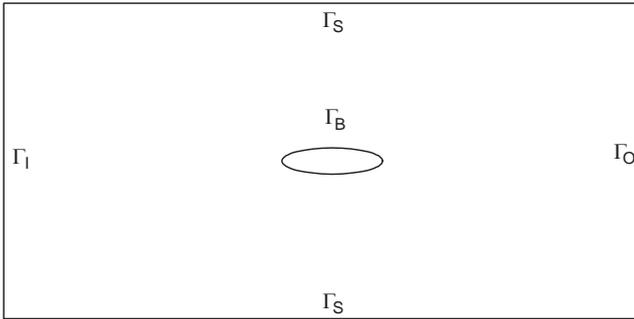


図1 解析領域及び境界条件

3. 評価関数

流体力最小化問題として、物体表面の流体力を直接的に用いた評価関数 J を最小とする物体形状の座標を求め、拘束条件の式(1)を考慮した拡張評価関数 J^* は以下の式となる。

$$\begin{aligned} J^* &= \frac{1}{2} \int_I (F_i - \bar{F}_i) Q_{ij} (F_j - \bar{F}_j) dt \\ &+ \int_I \int_\Omega \Lambda^T \cdot \{ \dot{U} + A_j U_{,j} - (K_{ji} U_{,i})_{,j} \} d\Omega dt, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta_i \\ \zeta \end{bmatrix} \quad (9)$$

F_i 及び \bar{F}_i 、 Q_{ij} は、それぞれ、流体力及び目的とする流体力、重み定数であり、 ξ 、 η_i 、 ζ は随伴変数である。最適化における必要条件は拡張評価関数 J^* の第一変分による停留条件

$$\delta J^* = 0 \quad (10)$$

によって得られる。これにより、次の随伴方程式及び随伴変数に対する境界条件、終端条件が導かれる。随伴方程式は

$$\begin{aligned} -\dot{\Lambda} &= (\bar{A}_j \Lambda)_{,j} + \bar{A}_{j,j} \Lambda - (\bar{K}_{ji}^1 \Lambda_{,i})_{,j} \\ &+ \bar{K}_{ji,j}^1 \Lambda_{,i} - \bar{K}_{ji,j}^2 \Lambda_{,i} = 0, \quad \text{in } \Omega \times I \end{aligned} \quad (11)$$

であり、 \bar{A}_j 及び \bar{K}_{ji}^1 、 \bar{K}_{ji}^2 を以下に示す。

$$\bar{A}_j = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\delta_{j1}\bar{\gamma}u^2 - u_j u_1 & \frac{1}{2}\delta_{j2}\bar{\gamma}u^2 - u_j u_2 \\ \delta_{j1} & \delta_{j1}u_1 - \delta_{j1}\bar{\gamma}u_1 + u_j & \delta_{j1}u_2 - \delta_{j2}\bar{\gamma}u_1 \\ \delta_{j2} & \delta_{j2}u_1 - \delta_{j1}\bar{\gamma}u_2 & \delta_{j2}u_2 - \delta_{j2}\bar{\gamma}u_2 + u_j \\ 0 & \delta_{j1}\bar{\gamma} & \delta_{j2}\bar{\gamma} \\ (\bar{\gamma}u^2 - \gamma e)u_j & & \\ \delta_{j1}\bar{\varepsilon} - \bar{\gamma}u_j u_1 & & \\ \delta_{j2}\bar{\varepsilon} - \bar{\gamma}u_j u_2 & & \\ \bar{\gamma}u_j & & \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\bar{\gamma} = \gamma - 1, \quad u^2 = u_i u_i, \quad \bar{\varepsilon} = \gamma e - \bar{\gamma} \frac{u_i u_i}{2} \quad (13)$$

$$\bar{K}_{ji}^1 = \begin{bmatrix} 0 & -\{\mu(\frac{m_1}{\rho^2}\delta_{ji} + \frac{m_j}{\rho^2}\delta_{1j}) + \lambda^* \frac{m_j}{\rho^2}\delta_{1i}\} \\ 0 & \frac{\mu}{\rho}(\delta_{ji} + \delta_{1j}\delta_{1i}) + \frac{\lambda^*}{\rho}\delta_{1j}\delta_{1i} \\ 0 & \frac{\mu}{\rho}\delta_{1j}\delta_{2i} + \frac{\lambda^*}{\rho}\delta_{2j}\delta_{1i} \\ 0 & 0 \\ -\{\mu(\frac{m_2}{\rho^2}\delta_{ji} + \frac{m_j}{\rho^2}\delta_{2j}) + \lambda^* \frac{m_j}{\rho^2}\delta_{2i}\} & (\bar{K}_{ji}^1)_{14} \\ \frac{\mu}{\rho}\delta_{2j}\delta_{1i} + \frac{\lambda^*}{\rho}\delta_{1j}\delta_{2i} & (\bar{K}_{ji}^1)_{24} \\ \frac{\mu}{\rho}(\delta_{ji} + \delta_{2j}\delta_{2i}) + \frac{\lambda^*}{\rho}\delta_{2j}\delta_{2i} & (\bar{K}_{ji}^1)_{34} \\ 0 & (\bar{K}_{ji}^1)_{44} \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} (\bar{K}_{ji}^1)_{14} &= -\{\mu \frac{m_k m_k}{\rho^3} \delta_{ji} + \frac{m_j m_i}{\rho^3} (\mu + \lambda^*) \\ &+ \lambda^* \frac{m_i m_j}{\rho^3} + \frac{\gamma \mu}{Pr} (\frac{e}{\rho} - \frac{1}{\rho^3} m_k m_k \delta_{ji})\} \\ (\bar{K}_{ji}^1)_{24} &= \mu \frac{m_1}{\rho^2} \delta_{ji} + \mu \frac{m_j}{\rho^2} \delta_{1i} + \lambda^* \frac{m_k}{\rho^2} \delta_{1j} \delta_{ki} - \frac{\gamma \mu}{Pr} \frac{m_1}{\rho^2} \delta_{ji} \\ (\bar{K}_{ji}^1)_{34} &= \mu \frac{m_2}{\rho^2} \delta_{ji} + \mu \frac{m_j}{\rho^2} \delta_{2i} + \lambda^* \frac{m_k}{\rho^2} \delta_{2j} \delta_{ki} - \frac{\gamma \mu}{Pr} \frac{m_2}{\rho^2} \delta_{ji} \\ (\bar{K}_{ji}^1)_{44} &= \frac{\gamma \mu}{Pr} \frac{1}{\rho} \delta_{ji} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\bar{K}_{11}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ (\mu - \lambda^*) \frac{m_l}{\rho^2} \{ (\frac{m_1}{\rho})_{,l} - (\frac{m_k}{\rho})_{,k} \delta_{l1} \} \\ -(\mu - \lambda^*) \frac{1}{\rho} \{ (\frac{m_1}{\rho})_{,1} - (\frac{m_k}{\rho})_{,k} \} \\ -(\mu - \lambda^*) \frac{1}{\rho} \{ (\frac{m_1}{\rho})_{,2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\bar{K}_{12}^2 = \bar{K}_{21}^2 = 0 \quad (17)$$

$$\bar{K}_{22}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ (\mu - \lambda^*) \frac{m_l}{\rho^2} \{ (\frac{m_2}{\rho})_{,l} - (\frac{m_k}{\rho})_{,k} \delta_{l2} \} \\ -(\mu - \lambda^*) \frac{1}{\rho} \{ (\frac{m_2}{\rho})_{,1} \\ -(\mu - \lambda^*) \frac{1}{\rho} \{ (\frac{m_2}{\rho})_{,2} - (\frac{m_k}{\rho})_{,k} \} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\lambda^* = -\frac{2}{3}\mu \quad (19)$$

ここで、 μ 及び Pr は粘性係数及びプラントル数である。随伴量の境界条件及び終端条件は

$$\begin{aligned}
(\eta_i, \zeta) &= (0, 0) \quad \text{on } \Gamma_I \times I \\
(\bar{\xi}, \bar{\eta}_i, \bar{\zeta}) &= (0, 0, 0) \quad \text{on } \Gamma_O \times I \\
(\bar{\xi}, \bar{\eta}_1, \eta_2, \bar{\zeta}) &= (0, 0, 0, 0) \quad \text{on } \Gamma_S \times I \\
(\eta_i, \zeta_n) &= -(F_j - \bar{F}_j)Q_{ij}, 0 \quad \text{on } \Gamma_B \times I \\
\Lambda(x_i, t_f) &= 0, \quad \text{in } \Omega
\end{aligned} \tag{20}$$

である．ここで， ζ_n は法線方向 n_j における ζ_j の流束であり， $\bar{\xi}$ ， $\bar{\eta}_i$ ， $\bar{\zeta}$ は

$$\begin{aligned}
\bar{\xi} &= \left\{ -u_i u_j + \frac{1}{2} \bar{\gamma} u_k u_k \delta_{ij} \right\} \eta_i + (\bar{\gamma} u_k u_k - \gamma e) u_j \zeta \Big\} n_j \\
&\quad - \left\{ \mu(\eta_{i,j} + \eta_{j,i}) + \lambda^* \eta_{k,k} \delta_{ij} + \mu \left(\frac{m_i}{\rho} \zeta_{,j} + \frac{m_j}{\rho} \zeta_{,i} \right) \right. \\
&\quad \left. + \lambda^* \frac{m_k}{\rho} \zeta_{,k} \delta_{ij} \right\} \frac{m_i}{\rho^2} n_j
\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\eta}_i &= \left\{ \xi \delta_{ij} + (u_k \delta_{ij} - \bar{\gamma} u_i \delta_{kj}) \eta_k + \eta_i u_j \right. \\
&\quad \left. + (\bar{\varepsilon} \delta_{ij} - \bar{\gamma} u_i u_j) \zeta \right\} n_j + \left\{ \mu(\eta_{i,j} + \eta_{j,i}) + \lambda^* \eta_{k,k} \delta_{ij} \right. \\
&\quad \left. + \mu \left(\frac{m_i}{\rho} \zeta_{,j} + \frac{m_j}{\rho} \zeta_{,i} \right) + \lambda^* \frac{m_k}{\rho} \zeta_{,k} \delta_{ij} \right\} \frac{1}{\rho} n_j
\end{aligned} \tag{22}$$

$$\bar{\zeta} = (\bar{\gamma} \delta_{ij} \eta_i + \gamma \zeta u_j) n_j \tag{23}$$

である．次の関係式：

$$\delta m_i = \delta(\rho u_i) = u_i \delta \rho + \rho \delta u_i = u_i \delta \rho + \rho u_{i,l} \delta x_l \tag{24}$$

を用いて， δx_i に関する拡張評価関数 J^* の勾配が以下の式で表される．

$$\begin{aligned}
grad(J^*)_l &= \left\{ \rho \xi \delta_{ij} + (\rho e + p) \zeta \delta_{ij} + \mu(\eta_{i,j} + \eta_{j,i}) \right. \\
&\quad \left. + \lambda^* \eta_{k,k} \delta_{ij} \right\} u_{i,l} n_j
\end{aligned} \tag{25}$$

拡張評価関数 J^* の勾配は，基礎方程式及び随伴方程式を解くことによって得られる．

4. 離散化手法

基礎方程式に対する時間方向の離散化として，陰的解法である Θ 法を適用する．

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Delta t} (U^{n+1} - U^n) + \mathbf{A}_j(U^*) U_j^{n+\Theta} \\
- \{ \mathbf{K}_{ji}(U^*) U_{,i}^{n+\Theta} \}_{,j} = 0, \tag{26}
\end{aligned}$$

ここで， U^* は Adams-bashforth 公式により，線形近似として得られる状態量である．

空間方向の離散化には，通常 Galerkin 法を適用する．補間関数として安定化気泡関数を用い，時間項に対し混合補間を適用する²³⁾．すなわち，適用される補間関数は，時間項に一次要素を，その他の項及び重み関数に気泡関数要素を用いる．気泡関数の安定化パラメータを安定化有限要素法の安定化パラメータ⁶⁾と等価にすることにより安定化作用を得る．

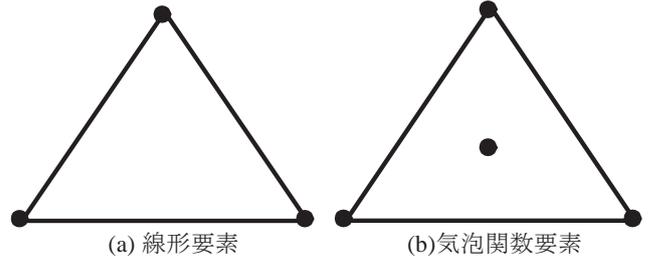


図1 補間要素

5. 衝撃波補足項

マッハ数の高い流れの数値的な安定性を確保して解くために，Tezduyar らの衝撃波捕捉項を導入する⁶⁷⁾．

6. リメッシング法及びスムージング法

評価関数の第一変分より，得られた勾配は物体周りのメッシュの不規則性に依存し，さらに，物体表面の節点間隔は形状の更新が進むにつれ，狭くなる．そのため，物体境界上の節点間隔は，リメッシングの過程で等間隔となるようにし，物体の周囲を構造メッシュで分割した後，その外部領域を Delaunay 三角形分割法により分割する⁴⁾．初期形状の物体面積と更新された物体の面積を一定とする条件を付加するために，リメッシングは2度行なわれる．

また，数値的な振動のない勾配を得るために，スムージング法を導入する⁷⁾．

$$G_i - \epsilon \frac{\partial^2 G_i}{\partial^2 L} = grad(J^*)_i \tag{27}$$

ここで， G_i はスムージングにより得られる勾配である．上式の離散化には，Galerkin 法を適用する．

7. 最小化手法

本研究では，最小化手法として重み付き勾配法を適用する．物体の更新座標 $x_i^{(l+1)}$ が以下の式で得られる．

$$W_{ij}^{(l)} x_j^{(l+1)} = W_{ij}^{(l)} x_j^{(l)} + G_i. \tag{28}$$

ここで， (l) 及び W_{ij} は繰り返し回数及び重み定数である．また，計算アルゴリズムは次のようになる．

- (1) 初期の物体表面座標を設定する．
- (2) 初期の状態量を求める．
- (3) 初期の評価関数を求める．
- (4) 随伴変数を求める．
- (5) スムージングをした勾配を求める．
- (6) 表面座標を求める．
- (7) もし，物体境界同士が交わって壊れた場合，重みを $W^{(l)} = 2.0W^{(l)}$ として，(6)へ．
その他は(8)へ．
- (8) 計算領域をリメッシングする．
- (9) 物体面積を一定になるように，表面座標を移動し，流れに平行となるように物体の両端を基準に回転移動させる．
- (10) 計算領域をリメッシングする．
- (11) $E = \|x_i^{(l+1)} - x_i^{(l)}\|$ により，収束判定をする．
もし， $E < \bar{E}$ ならば，終了
その他は(12)へ．
- (12) 状態量を求める．

- (13) 評価関数を求める.
 - (14) 重み定数を更新する.
- もし, $J^{(l+1)} \leq J^{(l)}$ ならば, (4)へ,
 その他は, $W^{(l)} = 2.0W^{(l)}$ として(6)へ.

ここで, \bar{E} は物体形状の収束判定基準である.

8. 数値解析例

圧縮粘性流れに置かれた物体の流体力最小化問題を解き, 流体力を減少させた物体形状を導出する. 本研究では, 抗力の減少について考え, $Q_{11} = 1.0$ 及び $Q_{22} = 0.0$ とし, 目的の流体力 \bar{F}_i をゼロと設定する. 長軸と短軸の比が6対1の楕円を初期形状とする. 計算領域及び境界条件を図2に示す. 各計算条件は $\gamma = 1.4$ 及び $Re = 10000$, $Pr = 0.72$ とする. 一様流を $\rho = 1.0$ 及び $u_1 = 1.0$, $u_2 = 0.0$, $\theta = 1.0$, $M_\infty = 0.8$, $\theta_\infty = 216.7[^\circ K]$ と設定する. 物体周りにおける初期形状及び最終形状における4種類の有限要素分割を図3に示す. 4種類の有限要素メッシュ(1)から(4)の初期形状における節点数及び要素数, 物体周りの節点数, 物体周りの最小要素幅について表1に示す. それぞれのメッシュは物体周りに20層の構造メッシュを用い, さらに外側を Delaunay 三角形分割法により分割する. 外側が構造メッシュでなく, Delaunay 三角形分割法であるため, 最終形状の節点数及び要素数は初期形状のもの異なる. なお, 最終形状の物体周りの節点数及び物体周りの最小要素幅は初期形状のものと同じである. 各パラメータは, $\Theta = 1.0$ 及び $\Delta t = 0.005$, $\epsilon = 1.0$, $W = 1.0$ である. 形状決定は3000ステップ順解析を行なった後に, 145ステップの逆解析により行なう. 収束判定 $\bar{E} = 10^{-6}$ とする.

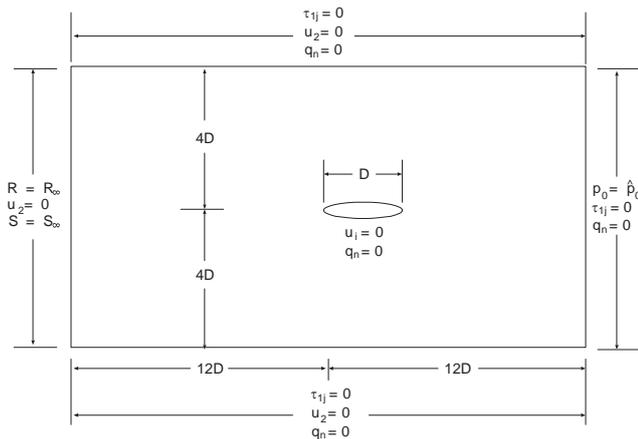
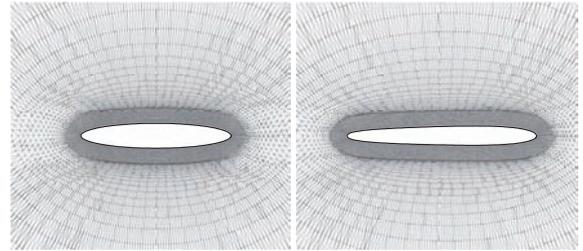


図2 境界条件及び計算領域

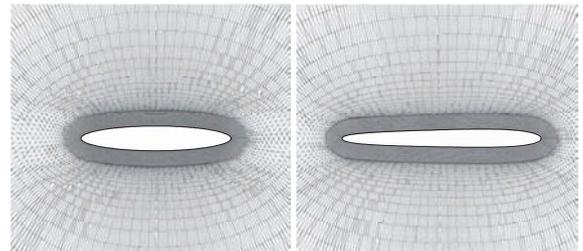
表1 各メッシュの節点数及び要素数

メッシュ	節点数	要素数	物体周りの節点数	物体周りの最小要素幅
メッシュ(1)	17268	34028	256	0.005
メッシュ(2)	20964	41288	320	0.005
メッシュ(3)	31824	62628	512	0.005
メッシュ(4)	22500	44360	320	0.002



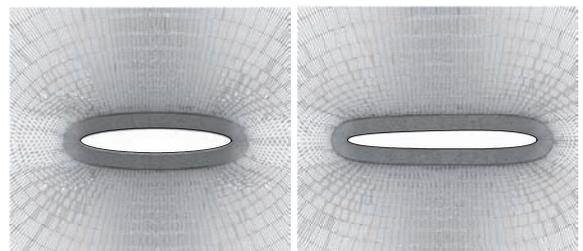
初期形状 最終形状

(a) メッシュ(1)



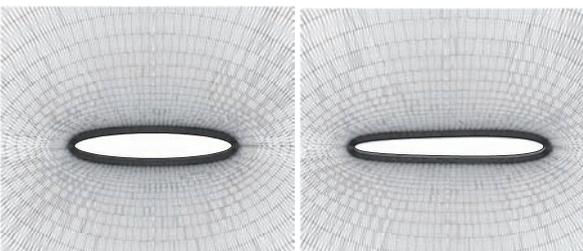
初期形状 最終形状

(b) メッシュ(2)



初期形状 最終形状

(c) メッシュ(3)



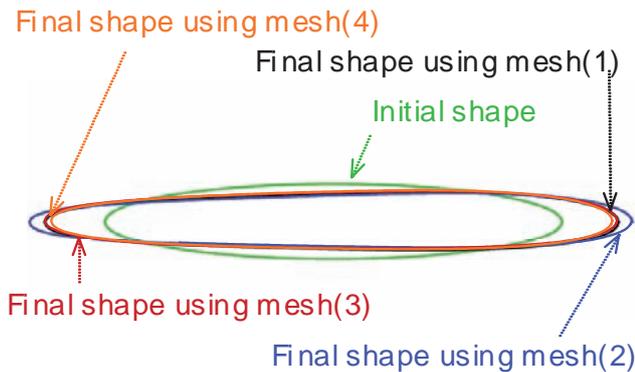
初期形状 最終形状

(d) メッシュ(4)

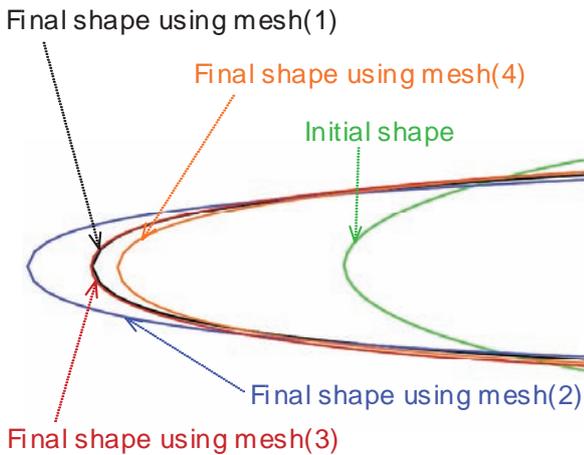
図3 初期形状及び最終形状における物体周りの有限要素分割

初期形状及び最適化により得られた最終形状の形状比較を図4に示す. 順に, 物体形状の全体図, 物体前方及び後方の拡大図を示す. 各メッシュを用いたケースで, 評価関数は一定値に収束した(図5). メッシュ(4)において評価関数の収束率が悪いのは, 初期の繰り返し計算において, 重み W_{ij} が大きく変化したため, 物体形状の移動量が小さくなったからである. 評価関数の減少率を表1に示す. メッシュ(1)より, 物体回りが細かいメッシュ(2)を用いた場合のほうが評価関数は, より減少し, 左右に伸びた形状となった. これは, 形状決定において, 細かな有限要素分割が必要となることを示す. しかしながら, メッシュ(3)に関しては, さらに細かいメッシュを用いたが評価関数は, 他と比べて減少率が小さかった. メッシュ(4)で

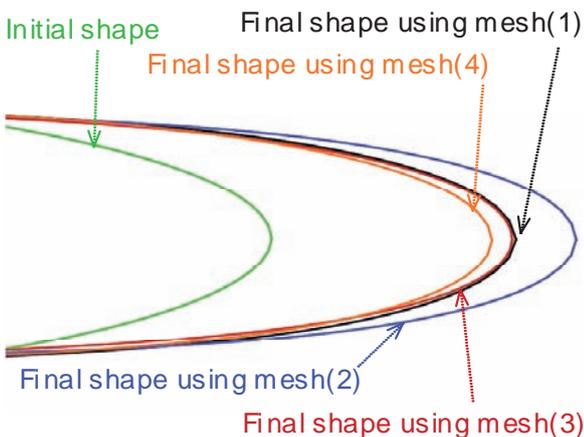
は物体回りの最小要素幅を変えて形状を導出したがメッシュ(3)同様に、評価関数はメッシュ(1)及びメッシュ(2)のように減少しなかった。これは、より細かいメッシュを用いることにより、物体周りの流れを正確に解析できたため、物体周りのせん断応力が強く影響したと考えられる。この影響に関しては圧力分布図から確認できる。



(a) 全体図



(b) 前方部分の拡大図



(c) 後方部分の拡大図

図4 最終形状の比較

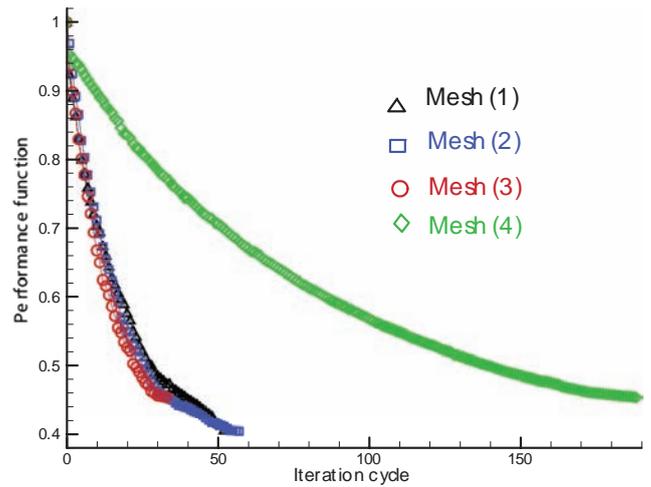


図5 評価関数の比較

表2 各メッシュにおける評価関数の減少率

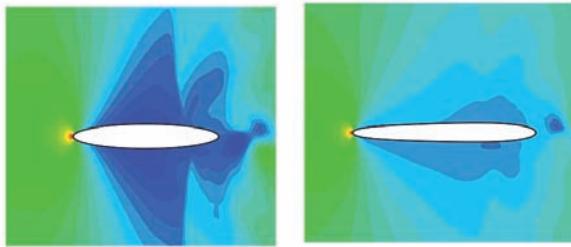
	物体周りの の節点数	物体周りの 最小要素幅	評価関数
メッシュ(1)	256	0.005	40.55%
メッシュ(2)	320	0.005	40.52%
メッシュ(3)	512	0.005	45.55%
メッシュ(4)	320	0.002	45.48%

図6に初期形状及び最終形状の圧力分布を示す。全ての図は3000ステップ後の圧力分布図である。圧力分布図から、流れに圧力振動は発生せず、安定に数値解析を行なえたことが分かる。初期形状の圧力分布図においては、同一の初期形状であるにも関わらず、渦の発生状況が物体の上下面の後方で異なった。この違いはメッシュ(1)及び(2)と、メッシュ(3)及び(4)において発生した。これは、メッシュの細かさによって捉えられる現象の違いがあることを示している。前述したようにメッシュ(3)及び(4)の方が正確に解析されたと考えられる。また、得られた最終形状の物体表面から衝撃波が消えたが、物体後方における渦は完全には消えなかった。物体後方の渦が完全に消えない傾向は非圧縮粘性流れにおける形状最適化の結果においても確認されている⁸⁾。これは、導出された形状が唯一の最小解ではなく、局所的な最小解に収束した可能性があると考えられる。

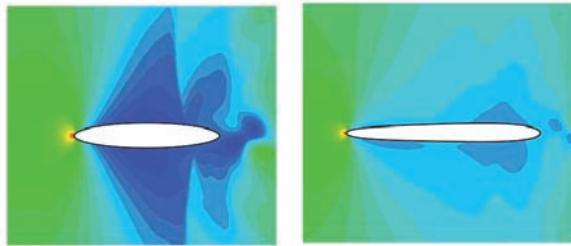
9. 結論

圧縮粘性流れにおける物体形状の最適化問題において、評価関数を減少させ、一定値に収束させた形状を導出できた。よって、本手法は、圧縮粘性流れにおいて安定に形状最適化が行なえるといえる。また、物体周りにおける有限要素分割による細かさの違いからは、導出される形状が異なることを示した。導出された形状は、圧力分布から局所的な最小解である可能性がある。

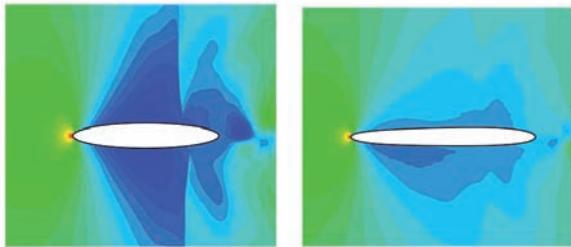
今後は、大域的な最小解となる形状の導出を検討するとともに、三次元物体における形状の導出の検討を行う。



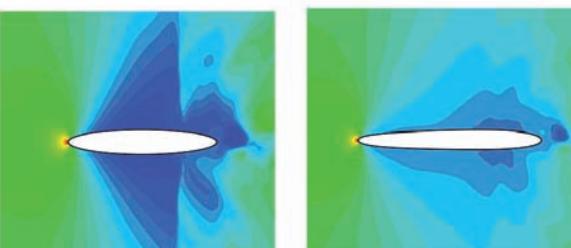
初期形状 最終形状
(a) メッシュ(1)を用いた場合の圧力分布



初期形状 最終形状
(b) メッシュ(2)を用いた場合の圧力分布



初期形状 最終形状
(c) メッシュ(3)を用いた場合の圧力分布



初期形状 最終形状
(d) メッシュ(4)を用いた場合の圧力分布

図6 初期形状及び最終形状における圧力分布

参考文献

- 1) S.Nakajima and M.Kawahara, Shape Optimization of a Body in Compressible Inviscid Flows, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 197, pp.4521-4530, 2008.
- 2) Nakajima,S. and M.Kawahara, New Finite Element Formulation Based on Bubble Function for the Transient Compressible Euler Equations, *Commun. Numer. Meth. Eng.*, 2008 (in press)
- 3) 中島修治, 川原睦人: 圧縮性オイラー及びナビエ・ストークス方程式を解くための気泡関数要素を用いた有限要素法, 第39回流体力学講演会/航空宇宙数値シミュレーション技術シンポジウム2007 論文集, JAXA-SP-07-016, pp.154-159, 2007.
- 4) K.Nojima and M.Kawahara, Three-Dimensional Shape Identification of Body Located in Viscous Fluid Flow, *I.C.H.E.*, 2006.
- 5) H.Yagi and M.Kawahara, Numerical Optimal Shape Determination of A Body Located in Incompressible Viscous Fluid Flow, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 196, pp.5084-5091,2007.
- 6) T.E.Tezduyar and M.Senga: Stabilization and Shock-Capturing Parameters in SUPG Formulation of Compressible Flows, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 195, pp.1621-1632,2006.
- 7) T.E.Tezduyar and Y.Osawa: Finite element stabilization parameters computed from element matrices and vectors, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 190, pp.411-430, 2000.
- 8) 中島修治, 川原睦人: 非圧縮粘性流れにおける部分的制御アルゴリズム及び気泡関数要素を用いた最適形状問題, *応用力学論文集*, vol.10, pp.175-186, 2007.