

正多角形断面容器内スロッシングの計算と実験

郷門将直（同志社），谷川博哉（舞鶴高専），舟木治郎（同志社），平田勝哉（同志社）

Computations and Experiments on Sloshing in Equilateral-Polygonal-

by

Masanao Gomon, Hirochika Tanigawa, Jiro Funaki, and Katsuya Hirata

ABSTRACT

This study reports the vertical sloshing, that is, the liquid surface motion in container oscillating in the vertical direction, concerning various equilateral-polygonal-section containers: namely, octagonal, heptagonal, hexagonal, pentagonal, square and triangular containers together with a circular container, in order to generalise their sloshing modes. As a result, the authors classify the sloshing modes based on the circular-container sloshing modes. The stability diagrams for all the polygonal-section containers are investigated by both experiments and computations. The present computation is based on the discrete singularity method. Furthermore, it is found that the equivalent diameter d_{e1} based on the hydraulic mean depth is the most adequate as a characteristic length scale to classify all the sloshing modes. The authors show an unified formula to predict the eigen frequencies, using the proposed modal classification and d_{e1} .

1. はじめに

スロッシングとは容器内の自由表面を有する流体が、容器を加振することにより振動する現象である。液体燃料ロケットの安定化のほかにも、石油タンクや化学プラント内のコンテナ、タンカー等、液体が大きな比重を占める場合は深刻な問題を引き起こし、工学的に重要である。特に容器を設計する上で、共振を避けるために、多数存在する励起振動数を知ることは重要になる。

本研究では、縦スロッシングを対象とする。縦スロッシングについての研究としては、容器内の液体が鉛直振動外力を受けた場合に、自由表面が外力振動の 1/2-subharmonic 応答することを *Faraday* が 1831 年に発見して以来、液面動揺についてさまざまな研究がなされている。例えば、*Benjamin and Ursell*¹⁾ が自由表面での境界条件を線形化し、速度ポテンシャルを用いて解析を行い、自由表面が不安定となる領域およびそのモードについて明らかにしている。*Dodge, Kana and Abramson*²⁾、池田、秋山ら³⁾ は摂動法を用いて、3 次のオーダーまでの非線形解析による波形や動水圧の分布等についての研究を行い、*Gerlach*⁴⁾、*Hashimoto and Sudo*^{5, 6)} は、液体自由界面の崩壊による気泡群を形成する場合の液体内の圧力変動についての研究を報告している。その後も大型高速計算機の発達に伴い、自由表面を有する流体の問題に対しては、種々の数値計算法が提案されてきた^{7, 8)}。

我々の最終目標は、複雑な形状をした容器に発生するスロッシングの予測である。正多角形断面容器を対象にしてそのスロッシングモードおよび発生領域をより明らかにし、円筒容器との比較も行う。すなわちスロッシングモードを一般化するために、正三角形から正八角形までに関する実験と数値解析を実施している。なお数値計算に関しては、理想流体を想定し、離散特異点法を用いた。

2. 実験

2.1 実験方法

本実験において容器を縦振動している際に、液面の振動数が励起振動数の 1/2 倍となる($f_0=2f_{mn}$) 波が発生する。その応答は 1/2-subharmonic response と呼ばれる。この波は液体自由表面が崩壊しない範囲では他の共振波に比べて液面振幅が最も大きい。本研究では、この 1/2-subharmonic response が発生する領域において実験を行った。

図 1 に、実験で用いた正多角形断面を持つ柱状容器の一例、すなわち、正七角形容器の概略図を示す。

各形状の容器で発生するモードの分類のため、励起振動数を一定に保ったまま励起振幅を上げてゆき、発生したモードをデジタルカメラで撮影し観察する。

2.2 実験装置

図 2 に、本実験で使用した実験装置を示す。容器②は、側壁厚さ 5[mm]の透明アクリル樹脂製であり、加振器③の上に作動流体(水)の入った状態で固定されている。加振器は、動電型振動発生機であり、ファンクションジェネレーター⑤によって鉛直方向に容器を正弦加振する。容器と自由液面の鉛直変位を 2 つのレーザー式変位センサー①で検出し、パーソナルコンピュータ⑥に取り込むことにより、励起変位と液面変位をリアルタイムで観察する。スロッシングモードの確認の為、デジタルムービーカメラ④による撮影を同時に実施している。

3. 数値解析

数値計算方法は離散特異点法(代用電荷法)を用いた。この計算手法は境界のみを離散化するものであり、計算手順が比較的簡単で、計算時間が短いという長所を持っている⁹⁾。

液体は非粘性、非圧縮とし、流体内部は非回転流れであるとすれば、連続の式はラプラス方程式になり、次式で表される。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

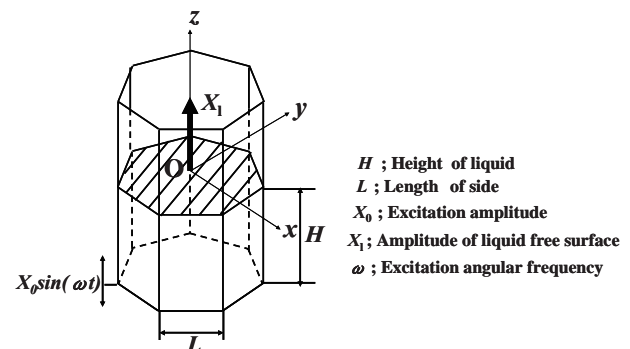


Fig.1 Coordinate system of a container (heptagonal-section)

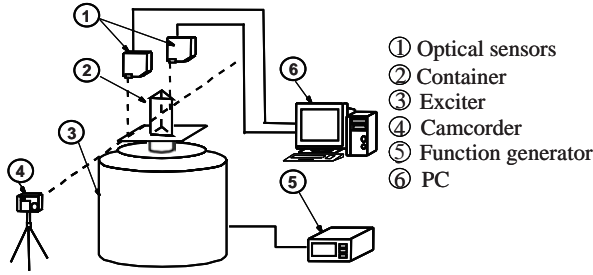


Fig.2 Experimental apparatus.

ここで、 $\phi = \phi(x, y, z, t)$ は速度ポテンシャルである。

このとき、座標系に対する流体の速度成分 (u, v, w) を用いると境界条件は次のように表される。

$$\frac{D\phi}{Dt} - \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + \{g + a(t)\}\zeta = 0. \quad \Gamma_1 \text{上} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = u = \frac{D\xi}{Dt}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = v = \frac{D\eta}{Dt}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = w = \frac{D\zeta}{Dt}. \quad \Gamma_1 \text{上} \quad (3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0. \quad \Gamma_2 \text{上} \quad (4)$$

ここで、 Ω は流体内部、 Γ_1, Γ_2 はそれぞれ自由表面境界と流体に接する容器壁境界を表す。また、 t は時間、 $a(t)$ は容器に加えられる垂直方向の励起加速度である。 D/Dt はラグランジュ微分演算子、 n は外向法線ベクトルであり、 (ξ, η, ζ) は自由表面上の流体粒子の座標を表す。

本方法では、自由表面上の流体粒子をラグランジュ的に移動させることによって時々刻々の自由表面形状の変化を追跡するものである。時刻 $t=0$ で容器内の液体は静止しているものとすれば、初期条件は

$$\xi, \eta, \zeta: \text{既知}, \quad \phi = 0$$

で与えられる。

4. 結果および考察

4.1 円筒容器スロッシングからの類推によるモードの分類

我々は、全ての正多角形容器スロッシングモードを、円筒容器スロッシングからの位相幾何学的類推により、分類することを考える。円筒容器スロッシングは、容器形状の単純さから、解析的アプローチが容易であり、よって、そのスロッシングモードの定義も円筒容器スロッシングモード (m, n) の定義は、以下の通りである^{2, 9)}

$$\zeta = \alpha(t) J_m(\lambda_{mn} r) \cos(m\theta). \quad (5)$$

ここに、 r と θ は、極座標である。 $\alpha(t)$ は時間 t に関する関数、

J_m は m 次の第一種ベッセル関数、 λ_{mn} は次式を満たす n 番目の根である。 d を円筒容器の直径とし、

$$\left. \frac{d J_m(\lambda_{mn} r)}{dr} \right|_{r=d/2} = 0. \quad (6)$$

また、線形理論より求めた微小振幅時の固有振動数は、

$$f_{mn} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2\lambda_{mn} g}{d}} \quad (7)$$

である。ここで、 $\lambda_{mn} = \lambda_{mn} d/2$ である。

図3に、円筒容器スロッシングに基づくモード分類の一例として、正七角形の場合を示す。図では、それぞれのモードについて、模式図と解析結果、さらに低次モードでは、可視化実験により得られた写真を、掲載している。白い領域は初期液面よりも液面が高いことを示し、黒い領域は低いことを示している。調べた

他の全ての正多角形スロッシングモードについても、正七角形と同様に、本分類法(円筒容器スロッシングに基づくモード分類法)により、分類ができることを実験と数値解析で確認した。

ただし、図3に現れるスロッシングモードと同じものが常に観察される訳ではない。なぜならば、たとえ微小液面振幅時だけを考えたとしても、正多角形という幾何学的特異性のために、一部のモードを除いて、縮退が容易に起こる為である。更に、後述するように、大液面振幅時には、異なる固有振動数モードの重ね合わせも観察される。

よって、縮退を考えて、我々は次の正多角形容器スロッシングモード c -mode $(m, n; k)$ の定義を考える。円筒容器モードを参考に、 m を周上の節点数の $1/2$ 、 n を半径上の節点数(原点での節点を含む)とする。 k は、正多角形の対称性のための縮退により、複数個現れる同じ固有振動数をもつモードを分類するためのものである。例えば、正七角形容器で、 c -mode $(1,1)$ は、実際は、7個の縮退モード系があるので(図4を参照)、 c -mode $(1,1; k)$ (ただし、 $k=1-7$)とする。なお、円筒容器では、 $k=1, 2, \dots, \infty$ と考える。ただし以上の定義は、 N が小さい時には、若干の特異例があり、その際は、位相幾何学的相似性を参考にモード分類する必要がある。

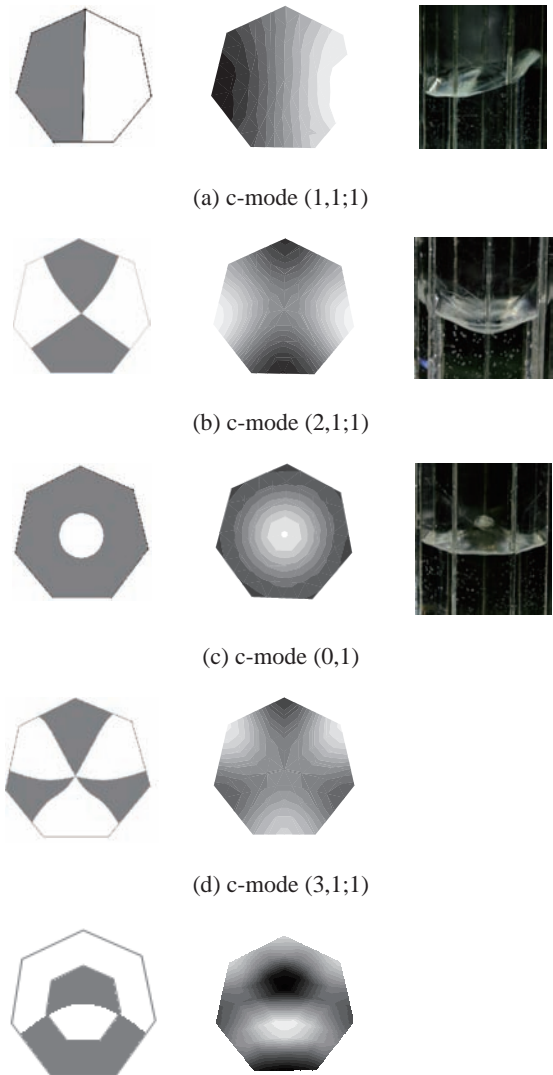


Fig.3 Slashing modes classified based on the circular-cylinder-sloshing modes (heptagonal-section container).

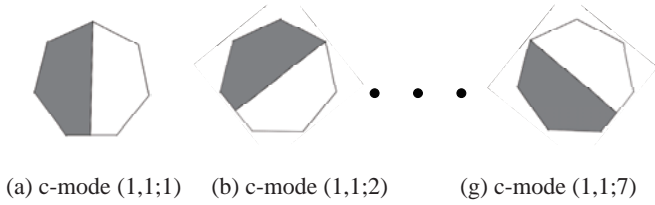


Fig.4 Degeneration-family members of c-mode (1,1; k) (heptagonal-section container).

上で定義した, c-mode $(m, n; k)$ について, 注意点を補足する. 一般に正 N 角形では, $k = 1, 2, \dots, N$, つまり, N 個の縮退モードを考える必要がある. しかし, N が偶数の場合は, 対称性の為, $k = 1, 2, \dots, N/2$ で充分である. 更に, 規則性を持ついくつかの例外も, 存在する. すなわち, $k = 1$ つまり縮退モードを考えなくてもよい場合が存在する. 例えば, $N = 4$ での c-mode (2,1) や, $N = 6$ での c-mode (3,1), $N = 4$ を除く全ての N での c-mode (0,1) などが, それである.

4.2 正方形容器スロッシングからの類推によるモード分類の欠点

正方形断面容器を含む矩形断面容器のスロッシングについては, 円筒容器スロッシングと同様に, 解析解が得られており, よく知られている. よって, 円筒容器スロッシングの代わりに, 正方形容器スロッシングに基づき, 正多角形容器スロッシングを分類することも一案として検討に値するであろう.

以下に, 正方形容器スロッシングの線形近似解を示す^{2, 10}. 正方形容器のスロッシングモード (m, n) の鉛直方向液面変位 ζ は,

$$\zeta = \alpha(t) \cos\left(m\pi \frac{x}{L}\right) \cos\left(n\pi \frac{y}{L}\right) \quad (8)$$

と表すことができる. また, 固有振動数は,

$$f_{mn} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\pi g \sqrt{\left(\frac{m}{L}\right)^2 + \left(\frac{n}{L}\right)^2}} \quad (9)$$

ここで, $\alpha(t)$ は時間のみの関数であり, L は正方形の辺の長さである.

正方形容器も, 他の正多角形容器と同様に, 幾何学的特異性のために, 一部のモードを除いて, 縮退が容易に起こる. よって, 同じ固有振動数をもつ縮退モード群の重ね合わせの結果として, 微小振幅かつ同一励起振動数で無限個のスロッシングパターンを観察できる¹⁰. 例えば, モード(1,0)とモード(0,1)が同じ固有振動数を持つ. ただし, モード(1,1)の様に, 縮退を起こさない例外を持つことも, 他の正多角形容器と同様である.

式(8)の従来の正方形容器スロッシングモードに基づき, 正多角形容器のスロッシングモード s-mode $(m, n; k)$ の定義を考えることもまた可能である. すなわち, 正多角形の対称軸の1つ1つについて, 正方形のモード (m, n) と位相幾何学的に相似なスロッシングモードを対応させることができる. 対称軸は, 通常 N 個または $N/2$ 個のことが多く, k で区別する.

今, s-mode $(m, n; k)$ と, c-mode $(m, n; k)$ との対応を考える. 例えば, 正方形容器 ($N = 4$) に関して, 慣例的正方形容器モード(1,0)とモード(0,1)すなわち s-mode (0,1;1)と s-mode (0,1;2) は, それぞれ, c-mode (1,1;1)と c-mode (1,1;2)に該当する. 慣例的正方形モード(1,1)すなわち s-mode (1,1)は, c-mode (2,1)に該当する. 慣例的正方形モード(2,0)とモード(0,2)すなわち s-mode (0,2;1)と s-mode (0,2;2)は, それぞれ, c-mode (0,1;1)と c-mode (0,1;2)に該当する. 慣例的正方形モード(2,1)とモード(1,2)すなわち s-mode (1,2;1)と s-mode (1,2;2)は, それぞれ, c-mode (3,1;1)と c-mode (3,1;2)に該当する.

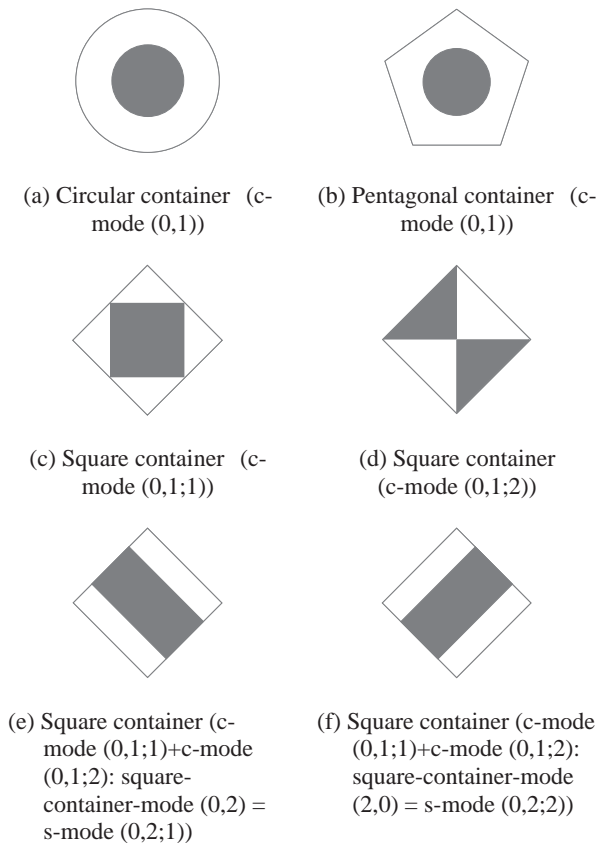


Fig.5 c-mode (0,1; k).

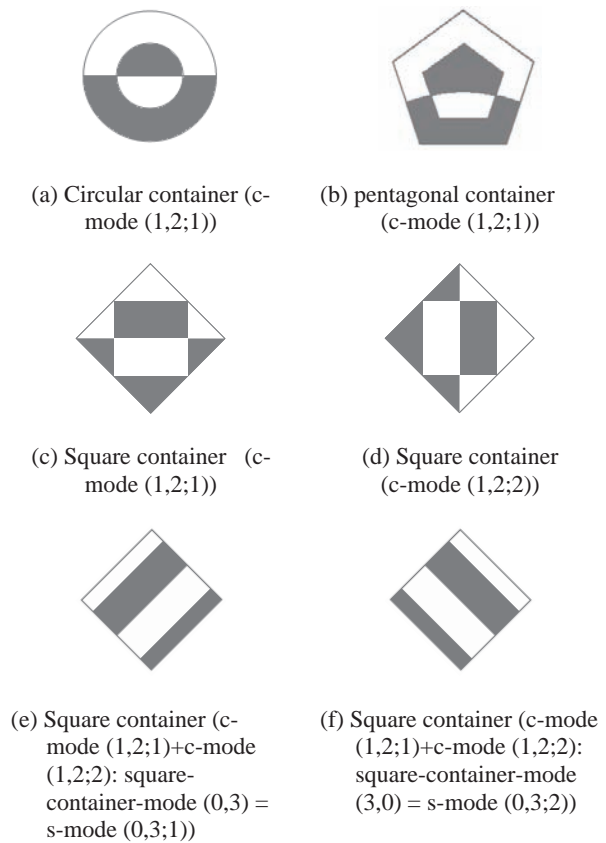


Fig.6 c-mode (1,2; k).

ここで注意すると、正方形は $N = 4$ であるが、s-mode (1,0;3) や s-mode (1,0;4) (すなわち、c-mode (1,1;3) や c-mode (1,1;4)) を考えないのは、単に、先に述べた N が偶数の正多角形の対称性の為である。つまり、正 N 角形 (ただし、 N は偶数) では、同じ固有振動数を持つモードとしては、縮退があるときは、それぞれ $N/2$ 個だけ考えれば、充分なことになる。

c-mode ($m, n; k$) による分類の方が、s-mode ($m, n; k$) による分類よりも、正多角形モードの一般化に適している理由として、以下の2つの理由が挙げられる。

第一の理由は、正方形容器以外の正多角形容器の s-mode ($m, n; k$) を、正方形容器の s-mode ($m, n; k$) から類推することの方がより難しいケースがいくつかあることである。その例として、図5と図6を示す。図5は、円筒容器 (図5(a))、および、正五角形容器 (図5(b))、正方形容器 (図5(c)-(f)) についての c-mode (0,1; k) でのスロッシングモードを示す。ここで、正方形では $k = 1, 2$ であり、正方形以外では、 $k = 1$ であるので、 k の値は省略している。c-mode (0,1;1) (図5(c)) と c-mode (0,1;2) (図5(d)) の適当な重ね合わせにより、慣例的正方形容器モード (0,2) (すなわち、s-mode (0,2;1)、図5(e)) とモード (2,0) (すなわち、s-mode (0,2;2)、図5(f)) を生成でき、その逆も可能である。我々が最初原始的に解析解として得るのは、円筒容器に対する c-mode (0,1) と、正方形容器に対する s-mode (0,2;1) と s-mode (0,2;2) のみであることを注意すべきである。仮に任意正多角形の代表として正五角形を考えると、図5(b)を c-mode (0,1) と判断することは容易であろうが、s-mode (0,2; k) (すなわち、s-mode (0,2;1) と s-mode (0,2;2)) の重ね合わせと判断することは容易でなさそうである。図6は、円筒容器 (図6(a))、および、正五角形容器 (図6(b))、正方形容器 (図6(c)-(f)) についての c-mode (1,2; k) でのスロッシングモードを示す。c-mode (1,2;1) (図6(c)) と c-mode (1,2;2) (図6(d)) の適当な重ね合わせにより、慣例的正方形容器モード (0,3) (すなわち、s-mode (0,3;1)、図6(e)) とモード (3,0) (すなわち、s-mode (0,3;2)、図6(f)) を生成でき、その逆も可能であることは図5と同様である。仮に任意正多角形の代表として正五角形を考えると、図6(b)を、c-mode (1,2;1) と判断することは容易であろうが、s-mode (0,3; k) (すなわち、s-mode (0,3;1) と s-mode (0,3;2)) の重ね合わせと判断することは容易でなさそうである。図5, 6の様に c-mode ($m, n; k$) が直観的に s-mode ($m, n; k$) よりも優れている点は、c-mode ($m, n; k$) が s-mode ($m, n; k$) の定義よりも平易であることに対応していると思われる。

第二の理由は、慣例的正方形容器スロッシングモード (式(8)) が、円筒容器も含めて他の正多角形容器のスロッシングモードと比べて、特異性を有する点にある。正方形容器の特異性は、例えば、c-mode (0,1; k) (あるいは、s-mode (0,2; k)) に見ることができる。先に述べた様に、他の正多角形では、 $k = 1$ であるが、正方形のみ $k = 2$ となる (図5を参照)。第一の理由は、直的ではないが、この第二の理由の意味は大きい。以上、c-mode 観的かどうかであり、実務的には重要であっても、原理的に致命 ($m, n; k$) の方が、s-mode ($m, n; k$) よりも正多角形容器のスロッシングモードの一般化に適当であると、著者らは考える。

4.3 モード安定領域図

円筒容器と正三角形～正八角形断面容器において数値解析と実験で現れたモード分布の一例を Fig.7, 8 に示す。なお、 f_0 は固有振動数を表している。 d_{e1} は代表長さであり、後に詳しく述べる。各図の横軸は無次元化した励起振動数、縦軸は無次元化した励起振幅である。また、実線は数値解析による値をしめしており、点は実験値を表している。このときの数値解析によって求められた領域は励起振幅が上がるにつれて途中まではほぼ直線的に広がっていく。ただし、隣接するモードの発生領域が近づくと、その影響を受けて、発生領域はあまり広がらない。なお、数値計算と実験とは若干の差が見られる。この原因については、さらなる研究が必要であるが、主な理由として、数値

計算での表面張力効果の無視が挙げられる。その他の理由として、流体粘性の効果やヒステリシス効果のような有限振幅時の非線形効果なども考えられる。ただし、今回のモード発生順序などの定性的議論には、影響を及ぼしていない。

4.4 代表長さと固有振動数予測

固有振動数を無次元化するとき、 d_{e1} (水力平均深さに基づく等価直径)、 d_{e2} (容器断面積に基づく等価直径)、 L (1 辺の長さ) の3つの代表長さのどれが一番適当かを調べた。図9-11は、それぞれ、c-mode (1,1; k)、c-mode (2,1; k)、c-mode (0,1; k) での、無次元固有振動数 F_{mn} への角数 N の影響を示す。 F_{mn} は、数値計算または理論解析より求めている。無次元化の際に代表長さとして d_{e1} , d_{e2} , L を用いたものが、それぞれ、 $F_{mn, d_{e1}}$, $F_{mn, d_{e2}}$, $F_{mn, L}$ である。

各モードとも、 N の増加につれて、 $F_{mn, L}$ は0に近づく。その近づき方はモードごとに、若干異なる傾向を持っている。一方、 N の増加につれて、 $F_{mn, d_{e1}}$ と $F_{mn, d_{e2}}$ は円筒容器の理論値に漸近している。漸近の仕方はモードが異なってもよく似ている。更に、 $F_{mn, d_{e1}}$ と $F_{mn, d_{e2}}$ を比較した場合、 $F_{mn, d_{e1}}$ の方がより滑らかな変化をしている様に見える。よって、固有振動数 f_{mn} を重視した場合は、代表長さとして、 d_{e1} の採用が最適と思われる。

代表長さとして、 d_{e1} を用いると、モードの影響を小さくできるので、モードによらない固有振動数予測のよい近似式を得られる可能性がある。今回、我々は、経験式ではあるが、調べた c-mode (1,1; k)、c-mode (2,1; k)、c-mode (0,1) の全てに共通して使える固有振動数予測式を次のように提案する。

$$F_{mn, d_{e1}} = F_{mn, d} (1 - e^{-0.55N}) \tag{10}$$

ここに、 $F_{11, d} = 0.31$, $F_{21, d} = 0.39$, $F_{01, d} = 0.44$ であり、全て円筒容器の理論値である。式(6)は、図9-11に破線で描かれている。図からは、誤差10%以下の精度の近似式であることが分かる。

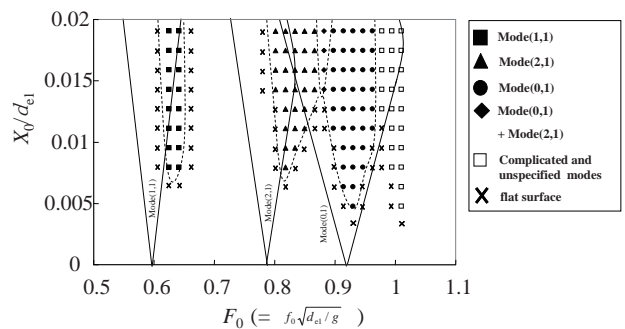


Fig.7 Stability-boundary chart by experimental and numerical simulation (cylindrical container)

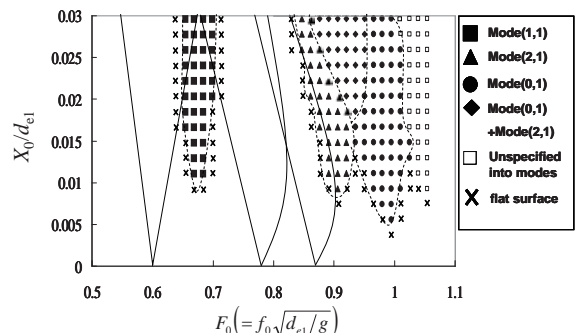


Fig.8 Stability-boundary chart by experimental and numerical simulation (heptagonal-section container)

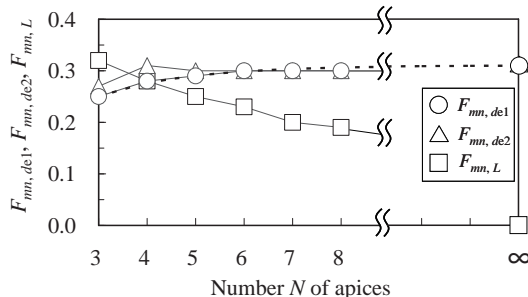


Fig.9 Eigen frequency reduced by d_{e1} , d_{e2} or L (c-mode(1,1;k))

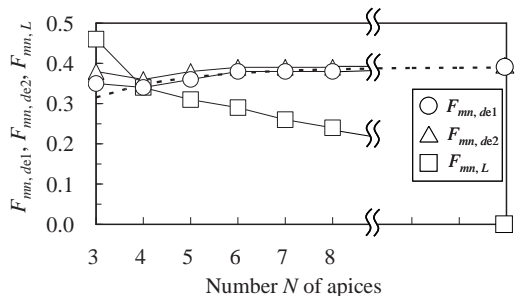


Fig.10 Eigen frequency reduced by d_{e1} , d_{e2} or L (c-mode(2,1;k))

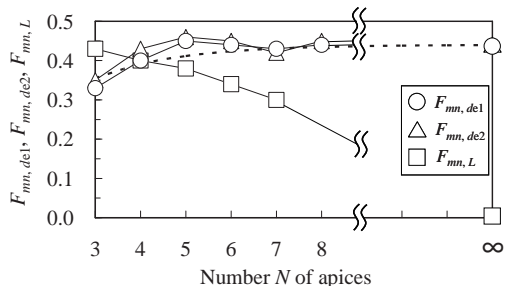


Fig.11 Eigen frequency reduced by d_{e1} , d_{e2} or L (c-mode(0,1;k))

5. 結論

- (1) 円筒容器のスロッシングモードに基づき、全ての正多角形容器のスロッシングモードを統一的に分類した。この分類法は、正方形容器のスロッシングモードに基づく分類法よりも優れた点がある。

- (2) 多くの正多角形断面容器について、各モードの発生領域を、実験と数値解析により明らかにした。
- (3) 各モードごとに水力平均深さに基づく等価直径(水力直径) d_{e1} を用いて無次元化すれば、固有振動数は正多角形の角数 N が増えるにつれて円筒容器に滑らかに漸近する。よって、代表長さとしては、 d_{e1} が、 d_{e2} や L よりもふさわしい。本モード分類法と d_{e1} とを用いることにより、正多角形容器の固有振動数を予測する経験式を提案した。そこでは、円筒形容器の固有振動数を用いると、任意の正多角形容器の固有振動数が、低次元モードであれば誤差 10%以下の精度で、予測できる。

参考文献

- 1) T. B. BENJAMIN, and F. URSELL; " The stability of the plane free surface of a liquid in vertical periodic motion ", Proc. Roy. Soc. , A225 (1954), pp.505-515.
- 2) F. T. DODGE, D. D. KANA, and H. N. ABRAMSON; " Liquid Surface Oscillations in Longitudinally Excited Rigid Cylindrical Containers ", AIAA Journal Vol. 3-4 (1965), pp.685-695.
- 3) 池田 駿介, 秋山 成興, 中村 広昭, 白井 伸一; " 円筒タンク内の液体動揺に関する研究 ", 土木学会論文報告集 第 290 号 (1979), pp.53-65.
- 4) C. R. GERLACH; " Surface Disintegration of Liquid in Longitudinally Excited Containers ", Journal Spacecraft Rockets, Vol. 5-5 (1968), pp.553-560.
- 5) H. HASHIMOTO, and S. SUDO; " Dynamic Behavior of Liquid Free Surface in a Cylindrical Container Subject to Vertical Vibration ", Bulletin of JSME, 27-227 (1984), pp.923-930.
- 6) H. HASHIMOTO, and S. SUDO; " Violent Liquid Sloshing in Vertically Excited Cylindrical Containers ", Experimental Thermal and Fluid Science, 1 (1988), pp.159-169.
- 7) N. W. MCLACHLAN; " THEORY AND APPLICATIONS OF MATHIEU FUNCTIONS ", Oxford University Press (1951), pp.10-14.
- 8) 池田 駿介, 山坂 昌成, 武藤 聡, 平井 克明; " 鉛直振動を受ける円筒容器内の二層液体海面に発生する内部波とその発生限界 ", 土木学会論文集 第 381 号 (1987), pp.65-74.
- 9) 村島 定行 " 代用電荷法とその応用 ", 森北出版 (1983), pp.9-16.