乱流境界層の速度分布に関する考察

西岡通男（京大）

Considerations on the velocity profile of turbulent boundary layer

Michio.Nishioka
Graduate School of Eng., Kyoto University

ABSTRACT

This paper is concerned with the flat plate turbulent boundary layer without pressure gradient. It is shown that the recent measurements almost perfectly follow the Rotta skin friction law derived by assuming the existence of the logarithmic overlap region, and that the Schoenherr empirical formula holds as a high Reynolds number asymptotic form of the Rotta law. We next clarify the Reynolds number dependent mean flow dynamics of the inner wall layer. With these results we discuss usefulness of the so-called combined velocity profile.

Key Words: turbulent boundary layer, Rotta skin friction law, law of the wall, combined velocity profile

1. まえがき

本稿の主題は平板乱流境界層である．谷先生の生誕百年を記念する研究会でこれを選んだのは次の理由による．定年退職で風洞から離れ，風洞がなくてもできる研究を模索しているうちに，平板乱流境界層への興味がだんだん強くなってきて，自分の過去の研究も含めていろいろ考えをめぐらせていた．谷先生がおられたとき，こんなふうに新しい研究を始める場合にはよく相談し，ご指導いただいたので，今回，谷先生記念の研究会で話をするようにと打診されたとき，谷先生に聞いていただくつもりでいま考えていることを述べてみようと思った．谷先生ご自身が乱流境界層の速度分布や壁面摩擦の特性を精力的に調べておられたので，自然にこのような気持ちが働いた．

2. 切実な問題

周知のように対数法則分布について従来の定説が見直され [1~3]，流れの構造，スケール，速度分布に関する問題, Clauser チャートやプレストン管などによる従来の壁面摩擦評価法の再検討，さらには高レイノルズ数の特性を明らかにする課題など，実験に携わるものにとって切実な問題が提起されているのであるが，そのいくつかは私が若い頃から疑問や興味をもっていたことに直接つながっている．それは壁法則や壁面摩擦則に関係する課題である．

3. 壁面摩擦則の問題

壁法則の内層速度分布と速度欠損則の外層速度分布の成り立つ領域が部分的に重なり合っている場合，すなわち重なり領域 (オーバラップ領域) が存在する場合，この二つの速度分布式から壁面摩擦応力の表式が得られるが，Karman が円管流の考察からこのアイデア得たのは 1930 年（文献 4 参照），それを Rotta[5] が改善した形で境界層に適用したのは 1950 年のことである．私はこの Rotta の壁面摩擦則が数ある壁面摩擦公式のなかでも最も基本的なものと判断するが，その妥当性の検証は高精度の実測データを必要とするために容易ではなく，大方の視野の外に置かれてきたように思われる．

その一方で多くの研究者･技術者が信頼を寄せていたのは 1932 年に造船分野で発表された Schoenherr[6] の平板摩擦公式である．これは Karman の理論をベースにした考察と実験（平板前縁からの距離 $\boldsymbol{x}$ に基づくレイノルズ数 $\boldsymbol{R_x}$ が 4.5×10^8 に至るまでの範囲での摩擦応力の実測）に基づくものであり，実験結果が決定的な役割を担っているので経験則とみてよい公式である．

私は Schoenherr の摩擦公式はレイノルズ数が大きいときの Rotta 壁面摩擦則の漸近形に対応するのではないかと考えていたので，この点について谷先生とお話の機会があったなら，いろいろな情報を頂き，もっと早く取り組んでいたと思うが，最近になってやっと自分でこの点を確かめることができた．そして，Rotta Skin Friction Law and Schoenherr Formula と題した論文を Fluid Dynamics Research に投稿することができた．

この研究で重要な役割を果たしたのは壁面摩擦応力（局所摩擦係数 : $\boldsymbol{C_f}$）を精度よく直接計測し，運動量厚さに基づくレイノルズ数 $\boldsymbol{R_\theta}\geq 6000$で壁法則と欠損則の重なり領域が存在することを確認した実験 [1,2]である．この実験結果によると，$\boldsymbol{R_\theta}\geq 6000$のレイノルズ数域で次の Rotta 壁面摩擦則がなりたつ．

$$\ln \boldsymbol{R_\theta} = \boldsymbol{p} + \ln[1-(\boldsymbol{J}/\boldsymbol{p})] - \boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{K}) \tag{1}$$

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{U_\infty}/\boldsymbol{u_\tau}) = \boldsymbol{\kappa}\sqrt{2/\boldsymbol{C_f}} \tag{2}$$

ここで $\boldsymbol{U_\infty}$ = 一様流速度，$\boldsymbol{u_\tau}$ = 摩擦速度であり，最近の実験 [1, 2]によると $\boldsymbol{\kappa}$ = 0.384（カルマン定数），$\boldsymbol{B}$ = 4.173

（対数分布定数）, $J = 2.7398$（速度分布定数）, $K = -0.8700$（速度欠損則分布定数）である．さて，Rotta 壁面摩擦則の下で運動量方程式 $C_f = 2dR_\theta / dR_x$ を積分し，さらに $C_F = 2R_\theta / R_x$ で定義される平均摩擦係数の式を求め，その式を(1)を用いて R_θ で展開する：

$$2\kappa^2 / C_F = p^2 - 2p + 2/[1-(J/p)]$$

$$= (\ln 2R_\theta)^2 \left\{ 1 - \frac{0.2137}{\ln 2R_\theta} + \frac{1.0114}{(\ln 2R_\theta)^2} + \cdots \right\} \quad (3)$$

この式より R_θ が十分大きいときの漸近形として

$$\sqrt{2}\kappa / \sqrt{C_F} = \ln 2R_\theta, \quad \sqrt{2}\kappa = 0.543 \quad (4)$$

を得るが，私の予想通り Schoenherr[6] が得た経験則

$$K_S / \sqrt{C_F} = \ln 2R_\theta, \qquad K_S = 0.558 \quad (5)$$

と一致する．また，この計算の過程で(1)と精度上等価な平板局所摩擦公式を得た． (6)

$$\sqrt{2/C_f} = 2.604 \left\{ \ln R_\theta - \ln(1 - \frac{2.7398}{\ln R_\theta + 1.5863}) \right\} + 3.303$$

壁面摩擦の計測値[1, 2]は(1)，(6)式と一致する．これらの成果を谷先生に直接ご報告できていたら，関連する事柄をいろいろ教えて下さったことでしょう．

4. 壁法則に関する考察

乱流境界層が壁法則に従う場合，内層流れは速度スケール u_τ，長さスケール ν / u_τ を用いて記述される．二次元乱流境界層の場合，その流れ方向（x-方向）速度 U の y-分布は次のように表される．

$$U^+ = U / u_\tau = f(yu_\tau / \nu) = f(y^+) \quad (7)$$

U の x-方向偏微分は摩擦速度が x-変化するので

$$\partial U / \partial x = (du_\tau / dx) d(y^+ f) / dy^+ \quad (8)$$

この式と連続の式から $-V^+ / (U^+ y^+) = K_i^+$ (9)

x-方向運動方程式については，加速度項が

$$U\partial U / \partial x + V \partial U / \partial y$$
$$= U(du_\tau / dx) \left\{ d(y^+ f) / dy^+ - y^+ df / dy^+ \right\}$$
$$= (U^2 / u_\tau) du_\tau / dx \quad (10)$$

と表され， $(U^+)^{-2} \partial(\tau / \rho)^+ / \partial y^+ = K_i^+$ (11)

を得る．また(9)，(11)式から

$$-U^+ V^+ / y^+ = \partial(\tau / \rho)^+ / \partial y^+ \quad (12)$$

ただし， $K_i^+ = (U_\infty^+ / u_\tau) du_\tau / dR_x$ (13)

これらの式は「Separation of Turbulent Boundary Layer」と題する 1972 年の論文 7)で筆者が導いたものである．注目されるのは f の関数形を指定せずに導出され，直線分布，対数分布，バッファー層を介してそれらを接合したものなど，いずれの分布にも適用される点である．直線分布や対数分布の場合(11)式は簡単に積分でき，たとえば，対数分布の場合の剪断応力分布として，次式を得る． (14)

$$(\tau / \rho)^+ = 1 + K_i^+ y^+ [(\kappa^{-1} \ln y^+ + B - \kappa^{-1})^2 + \kappa^{-2}]$$

従来から剪断応力一定の領域で対数法則が成り立つとされてきたが，$R_\theta = 27000$ で $K_i^+ = -2.68\mathrm{E}{-07}$ の平板乱流境界層（Osterlund[1] の実験）の場合，(14)式（あるいは(11)式）から評価すると，対数分布領域内 $y^+=97.5$～594.7 において剪断応力は$(\tau/\rho)^+=0.995$～0.944 と変化し，一定とは言いがたい．このような検討だけにとどまらず，(a) DNS の結果が内層において(9)，(11)，(12)式を満足しているかどうかという DNS 精度評価の問題，(b) 重なり領域の概念とは異なる立場から(9)，(11)，(12)式に基づき内層外縁を定義する問題などについていま考えを進めているところである．内層流れの挙動に関するこのような考察は筆者が知る限り他にはないので，新しい知見が得られることを期待して楽しんでみたい．

5. 複合速度分布

先に述べたように壁法則と欠損則の重なり領域が現れ流れが対数速度分布に従うようになるのは $R_\theta \geq 6000$ である．では，この値より小さいレイノルズ数域ではどのような速度分布を採用するのが合理的であろうか？ 私は次に示す Reichardt-Finley 複合分布[8, 9]に注目し，速度分布の特徴や表現法などを調べるツールとして期待しつつ，これについて種々調べている．

$$U^+ = \kappa^{-1} \ln(1 + \kappa y^+)$$
$$+ C\{1 - \exp(-y^+ / \eta_1) - (y^+ / \eta_1) \exp(-by^+)\}$$
$$+ \kappa^{-1}\{(1 + 6\Pi)(y^+ / \delta^+)^2 - (1 + 4\Pi)(y^+ / \delta^+)^3\} \quad (15)$$

ここでκ= カルマン定数, $C = B - \kappa^{-1}\ln\kappa$, $\eta_1 = 11$, $b = 0.33$, $\delta^+ = \delta u_\tau / \nu$, Π = 後流因子で，次式がなりたつ.

$$2\Pi = \kappa(U_\infty^+ - C) - \ln(1 + \kappa\delta^+) \quad (16)$$

この複合分布は，高いレイノルズ数において漸近すべき対数分布を基本とし，(9)，(11)，(13)式が示唆するレイノルズ数効果を Finley の後流関数で近似的に考慮していると判断される．それゆえ，低レイノルズ数で対数分布が未発達の段階の速度分布を表現できると期待されるが，実際，複合分布（15）式は Kawahara and Kida[10] が N-S 方程式の厳密解として得た下限レイノルズ数におけるクエット乱流の速度分布を精度よく再現する．さらに，レイノルズ数δ^+が増すにしたがって対数分布に漸近する様子もよく表現する．筆者には冪分布や対数分布単独よりもこの複合分布の方がより合理的で実験の分布を表現する上で優れていると思われる．

参考文献

1) Osterlund, J.M. et al. Phys. Fluids **12**(2000) 1-4.
2) Nagib, H.M. et al. Phil. Trans. R. Soc. A **365**(2007)755-770.
3) McKeon, B.J. Phil. Trans. R. Soc. A **365**(2007).
4) von, Karman, Th. J. Aero. Sci. **1**(1934) 1-20.
5) Rotta, J.C. NACA TM 1344
6) Schoenherr, K.E. Trans Soc. Nav. Arch. and Mar. Eng. **40** (1932) 279-313.
7) Nishioka, M. Bulletin of JSME **15**,(1972), pp.1084-1092.
8) Reichardt, H. Z. angw. Math. Mech. **31**(1951) 208-219.
9) Finley, P.J. La Houille Blanche **21**(1966) 713-721.
10)Kawahara, G. and Kida, S. J. Fluid Mech. 449 (2001) 291-300.