

# 周期的急拡大管流れの遷移と対流不安定性

水島 二郎<sup>1</sup>, 高岡 正憲, 山本 寿一, 佐野 太郎 (同志社大工)

## Transition and convective instability of flow in a symmetric channel with spatially periodic structures

Jiro Mizushima, Masanori Takaoka, Hisakazu Yamamoto and Taro Sano

*Department of Mechanical Engineering, Doshisha University*

### ABSTRACT

Transition and convective instability of flow in a two-dimensional symmetric channel with periodic suddenly expanded sections is investigated numerically and experimentally. The flow is found to deflect in the opposite side in every pair of adjacent expanded sections due to a pitchfork bifurcation and has a spatial period twice the periodicity of the channel geometry. Adding a localized disturbance at the inlet of the channel, the subsequent spatiotemporal development of the disturbance is observed. The disturbance induces two localized packet-like waves, one of which travels downstream reversing each deflection direction in expanded sections, and the other localized wave travels downstream forming a wave-packet. It is found that the wave-packet always splits into two intrinsic waves propagating with distinct phase velocities. The spatial structure and the phase velocity of the intrinsic waves are compared with the eigen mode of stability under two different periodic boundary conditions, one of which imposes the flow to have the same periodic length with that of the channel geometry and the other twice the periodic length together with a shift-and-reflect symmetry.

Key Words: symmetric channel, periodic sudden expansions, bifurcation, convective stability.

### 1. はじめに

周期的な空間構造をもつ管路は熱交換器や化学反応器などに見られ、同じ形をしたユニット管が多数連結した形をしている。このような流れの理論的な研究では、ユニット管路が無限につながっていると仮定され、しばしば管路内流れも同じ空間的周期をもつという仮定のもとでその性質が調べられる。実際、Ghaddar *et al.*<sup>1)</sup> は平行平板の片側にのみ周期的な急拡大部をもつ管路の流れについて数値シミュレーションと線形安定性解析を行い、その安定性と遷移について議論を行った。また、Adachi and Uehara<sup>2)</sup> は平行平板管路の両側に凹凸のある周期的管路流れの数値シミュレーションを管路と同じ周期条件のもとで行い、管壁からの流体への熱伝達特性と圧力降下との関係を調べた。しかし、実験や実用的な装置では有限の長さの管路が用いられ、その流れの不安定性には対流不安定性と絶対不安定性の2種類の不安定性が存在するため<sup>3, 4)</sup>、周期境界条件の妥当性とその適用限界を検証する必要がある。また、この周期的管路流れは、円柱を過ぎる流れなどの周期性をもたない流れに比較すると、攪乱の空間成長率の定義が容易であり、対流不安定性を調べる対象として最適である。

周期構造をもつ流れの安定性解析は、急拡大管路よりも、管壁が正弦関数のようになめらかに変化している管路について多くの研究が行われてきた (Guzmán and Amon<sup>5)</sup>, Blacher, Creff and Le Quére<sup>6, 7)</sup>). それらの研究においても多くの場合は、流れの空間的周期が仮定されてきた。

ここでは、周期的急拡大部をもつ対称な管路流れについて、周期性を仮定しないで数値シミュレーションを行い、この管路を伝わる波について調べる。特に、管路と同じ周期と2倍の周期の周期境界条件のもとでその線形安定性を調べ、この管路入り口部に攪乱を加えたときに発生する波との比較を行い、対流不安定性との関係を議論する。

ユニット管路の連結部である狭窄部が比較的長い場合には、流れの遷移の性質は急拡大部が1つだけの管路流れとよく似たものとなるのでこの報告では説明を省略する。このような急拡大部を1つもつ対称管路を流れる流れはこれまでによく調べられており、特に Mizushima *et al.*<sup>8)</sup> および Mizushima and Shiotani<sup>9)</sup> によって、有限長さの急拡大部をもつ管路流れが調べられ、この流れは比較的小さなレイノルズ数で対称定常流が定在波攪乱に対して不安定となり、非対称な流れへと遷移するが、もう少し大きなレイノルズ数で逆ピッチフォーク分岐を生じて再び対称定常流となるこ

とが明らかとなっている。

## 2. 周期的急拡大管の構造と問題の設定

急拡大部をもつ対称なユニット管が  $N$  個連結された管路を考え、その管路流れの遷移と対流不安定性について調べる (図 1(a)). それぞれのユニット管は図 1(b) のように、幅  $2d$  の流入部と流出部の間に幅  $2D$  の急拡大部をもつ. 導入部と導出部の長さはいずれも  $\ell_r$  であり、急拡大部の長さは  $\ell_e$  である. 座標軸を 図 1(b) のようにとる.

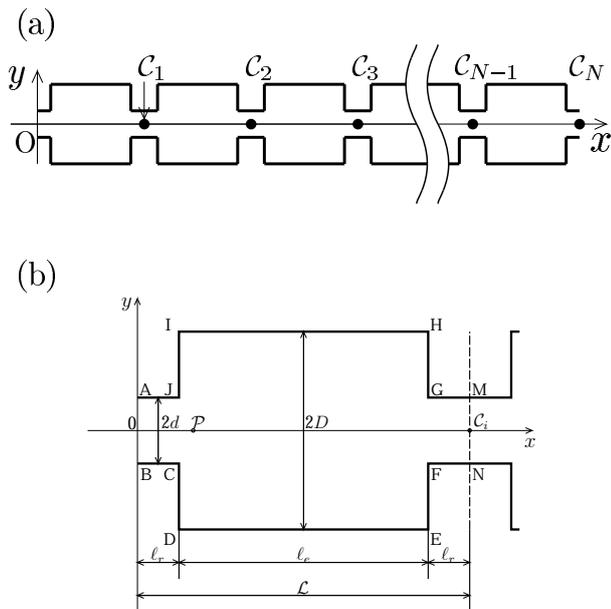


図 1: 管路の形状と座標系. (a) 周期的急拡大管路. (b) ユニット管の構造.

ユニット管の形状を特徴づけるパラメータは拡大比  $E = D/d$ , 急拡大部アスペクト比  $A = \ell_e/2D$ , 無次元流入部長さ  $s = \ell_r/d$  である. 流体の動粘性係数を  $\nu$  として, レイノルズ数を  $Re = Ud/\nu$  と定義する. 流れは二次元非圧縮流であると仮定する. 流れを支配する方程式はナビエ・ストークス方程式と連続の式であるが, 二次元非圧縮性の仮定より, 流れ関数  $\psi$  を導入し, 流れ関数  $\psi(x, y, t)$  と渦度  $\omega(x, y, t)$  を用いて定式化する.

第 1 個目の管路への流入条件として, 十分に発達したポワズイユ流を仮定する.  $N$  個目のユニット流出口での流出条件には, ゾンマーフェルト放射条件を用いる. この流れと比較するために  $n$  個 ( $n = 1, 2$ ) のユニットで周期的境界条件を満たす流れを求める. すなわち, 管路と同じ周期をもつ流れ (この 1 周期流れを「モード 1」と呼ぶ) と 2 ユニットで 1 周期となる流れ (「モード 2」) である. 一般にはモード 2 はモード 1 を含むが, ここではモード 2 は 2 ユニットで 1 周期をもつ流れの

中でモード 1 でない流れ, すなわち各ユニット流れを管路中央線に対して反転して 1 ユニットずらせると, 元と同じ流れパターンとなる流れをモード 2 と呼ぶことにする. いずれの場合にも, すべての壁面境界では滑りなし条件を適用する.

このような管路流れの遷移と安定性を調べるために, 主に差分法による数値シミュレーションを行い, その結果を解釈するために, 周期境界条件のもとで, 流れの線形安定性解析を行った. また, 可視化実験を行って数値シミュレーションの結果を検証した.

## 3. 計算と実験の結果および考察

周期的急拡大部をもつ管路流れの数値シミュレーションと実験により得られた結果の概略を紹介する. これまでの研究で最もよく調べられているパラメータとして, 管路拡大比  $E = 3$ , アスペクト比  $A = 7/3$  の場合を選んだ. 流れの性質は, 狭窄部の長さ  $s$  によって大きく異なる. ここでは,  $s = 0.5$  の場合についてのみ説明する.

ユニットの数  $N$  として実験では 12 を選び, 数値シミュレーションでは 12 または 24 とした. レイノルズ数が小さいときは, 急拡大部が 1 つの場合と同様に, どのような初期条件から出発しても流れは必ず定常で管路の中央線に対して対称な流れとなる. このことを数値シミュレーションだけでなく実験でも確かめた. 図 2(a) は  $Re = 35$  のときの可視化写真である. また, 図 2(b) は同じレイノルズ数における数値シミュレーションの結果である.

レイノルズ数がもう少し大きくなると, 流れはピッチフォーク分岐を生じて, 隣り合う急拡大部で逆の方向へ偏流した流れとなる. 図 2(c) は, 可視化実験で撮影した  $Re = 58$  における流れ場である. このような偏流した定常流は数値シミュレーションによっても確かめることができる. 図 2(d) は,  $Re = 60$  における流れ場であり, 初期条件にかかわらず時間が十分に経つとこの流れ場, あるいは上下反転した流れ場となる. この図では  $N = 24$  のうち, 流入口から 6 ユニットのみを描いた. このように, 対称定常流から偏流へと遷移するピッチフォーク分岐の臨界条件を評価すると, その臨界レイノルズ数  $Re_P = 38.9$  となった.

この流れ場 (図 2(d),  $Re = 60$ ) を初期条件 ( $t = 0$ ) として, 第 1 番目の管路の流入口へ局在した形の攪乱を加えたところ,  $t = 150$  において, 図 2(e) のように第 1 ユニットの蛇行した流れが山から谷へと変化し,  $t = 270$  では, 図 2(f) のように第 2 ユニットの谷が山へと変化した. このように, 時間の経過と共に各ユニット内で流れの蛇行の向きが逆の流れへと変化し,  $t \sim 2900$  で 24

個すべてのユニットで偏流の方向が逆転した。

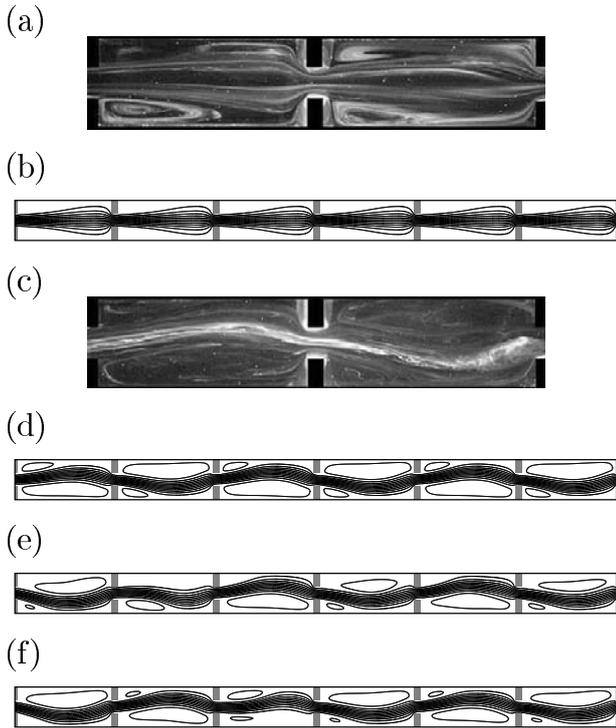


図 2: 流れ場 (流線), ユニット数  $N = 24$ .  $E = 3$ ,  $A = 7/3$ ,  $s = 0.5$ . (a) 対称定常流 (実験)  $Re = 35$ , (b) 対称定常流 (数値シミュレーション)  $Re = 35$ . (c) 非対称定常流 (実験),  $Re = 58$  (d) 非対称定常流 (数値シミュレーション,  $t = 0$ ), (e)  $t = 150$ , (f)  $t = 270$ .

第1ユニットの流入口で加えた攪乱が下流へと伝播する過程を詳しくみるために、図1(a)で $C_1$ から $C_{23}$ まで表される奇数番目の狭窄部中央における各点での $y$ 方向速度成分 $v$ の時間変化率 $\partial v/\partial t$ を時間の関数として描くと図3のようになる。この図より、流入口で加えた攪乱は、伝播速度の異なる2種類の波として伝わっていくことがわかる。図2でみたような偏流の上下反転を起こす波は伝播速度の遅い方の波であり、点 $C_3$ より下流ではほぼ一定の波形をもち、どこまでも振幅が減衰することなく伝わる非常に面白い性質をもつ波である。もちろん、ここで取り扱っている管路は流れ方向には一様でないので、この波は場所により形を変えながら伝播するが、管路の2倍の距離を隔てた点ごとに観測すると、形を変えずに伝わっているように見えるのである。遅い波はこれまでは知られていない興味深い波であるが、既に Mizushima, Yoshida and Takaoka<sup>10)</sup>によって詳しい説明があるのでそちらに譲り、ここでは速い伝播速度で伝わる波について詳しく説明する。

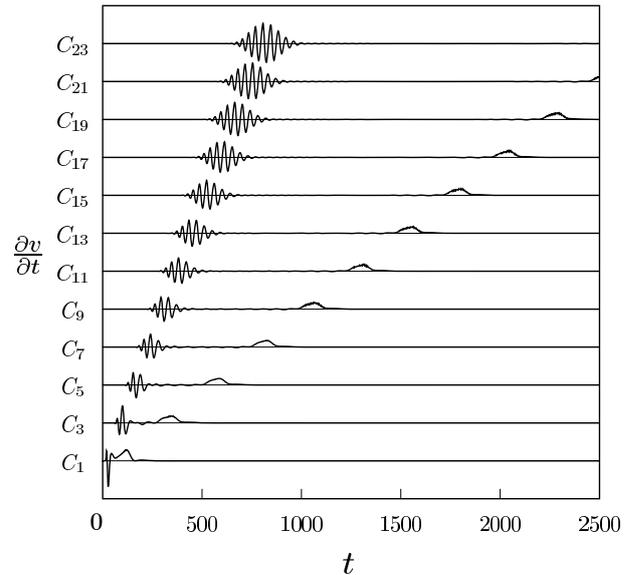


図 3: 流路入り口に攪乱を加えたときの狭窄部中央 ( $C_{2i+1}$ ) における  $\partial v/\partial t$  の時間変化.  $Re = 60$ ,  $s = 0.5$ .

速い波は、管路を伝わるとき、時々刻々と振幅と波長とを変えながら波束として下流へと伝わっていく。この速い伝播速度をもつ波 (速い波) の構造を詳しく調べるため、管路流入口において短時間のみ攪乱を与え、そのときに生じる速い波について  $\partial v/\partial t$  の時間変化を表したグラフが図4である。この図の波束を、線形安定性解析における、管路と同じ空間周期 (波長) をもつ攪乱 (モード1) と2ユニットで1周期となる攪乱 (モード2) と比較すると、図4の波束はこの2つのモードの線形固有関数で近似できることが分かった。図4で、記号Iで表されているように、波のパケットの前方部分は線形攪乱のモード1で近似できる波であり、記号IIで表されているように、波のパケットの後方部分はモード2で近似でき、波束攪乱はこれら2つのモードの重ね合わせで構成されている。初期の時刻あるいは管路流入口近くではこれらの2つのモードが重なりあっており、区別がつかないが、モード1とモード2の位相速度に違いがあるため、時間が進むにつれて攪乱の存在する領域が広くなり、下流に進むほどパケットの幅が広がる。また、モード1とモード2の位相速度の相違により、波の伝播と共にモード1の攪乱は波束の前方に進み、モード2の攪乱は波束の後方に遅れて伝播する。

図4に描かれた波束攪乱中で、パケット前方部分Iを線形固有関数モード1と同定し、パケット後方部分IIをモード2と同定し、それらの位相速度  $c_1$  および  $c_2$  を求めた。こうして求めた位

相速度  $c_1$  および  $c_2$  と周期境界条件のもとで求めた攪乱の位相速度  $\tilde{c}_1$  および  $\tilde{c}_2$  をまとめると表1のようになる。モード1と同定した部分の位相速度である  $c_1$  と  $\tilde{c}_1$  の相対誤差は9.8%であり、モード2と同定した部分の位相速度である  $c_2$  と  $\tilde{c}_2$  の相対誤差は3.0%となった。なお、表1で  $c_g$  は波束の群速度である。

表 1: 波束中に含まれる波の位相速度とモード1 およびモード2 の攪乱の位相速度.  $Re = 60$ ,  $s = 0.5$

$\tilde{c}_1$	$c_1$	$\tilde{c}_2$	$c_2$	$c_g$
0.5000	0.5454	0.3240	0.3333	0.4585

なお、紙面の制約上、それぞれの攪乱の流線図を省略するが、波束の前方領域 I および 後方領域 II の流線を、周期境界条件のもとで解いた線形攪乱のモード1 とモード2 の固有関数は非常によく似た流れパターンであることが確かめられる。モード1 の固有関数は1つのユニットの中に4つの渦構造をもち、モード2 の固有関数は1つのユニットに3つの渦構造をもっている。いうまでもないが、1つのユニット中でのモード2 の固有関数を反転して、1ユニット平行移動すると、同じ流れパターンとなる。

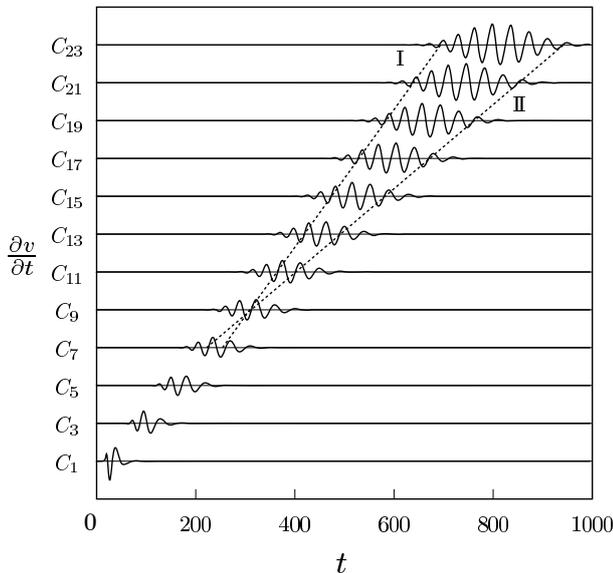


図 4: 速い波 (流路入り口に攪乱を加えたときの狭窄部中央 ( $C_{2i+1}$ ) における  $\partial v/\partial t$  の時間変化).  $Re = 60$ ,  $s = 0.5$ .

次に、波束の包絡線を取り、最大値  $a_g$  および群速度  $c_g$  を評価した。  $a_g$  が時間に対して増幅す

るとき流れは対流不安定である。この管路において  $Re = 60$  では時間と共に波束が下流へ伝播するにつれて増幅しており、その時間増幅率は  $\sigma_g = 0.001239$  である。

波束 (パケット) の時間増幅率を各レイノルズ数について評価した結果、この管路における対流不安定が生じる臨界レイノルズ数は  $Re_c = 56.6$  と求められた。また波束 (パケット) の時間増幅率は  $Re = 65$  のとき最大となることが分かった。また、この管路における波束の前方部分 I の後方部分 II の時間増幅率を求めると表2のようになった。波束の時間増幅率は正であり、増幅するにも関わらず、I と II の部分の時間増幅率が負であり、減衰する。これらの違いが生じる原因については今後調べていく予定である。

表 2: 時間増幅率.  $Re = 60$ ,  $s = 0.5$

$\sigma_{c_1}$	$\sigma_{c_2}$	$\sigma_g$
-0.00388	-0.00293	0.001239

#### 参考文献

- 1) N. K. GHADDAR, K. Z. KORCZAK, B. B. MIKIC AND A. T. PATERA (1986) *J. Fluid Mech.* **163**, 99-127.
- 2) T. ADACHI, H. UEHARA (2001) *Int. J. Heat Mass Transfer* **44**, 4333-4343.
- 3) P. HURRE AND P. A. MONKEWITZ (1990) *Annu. Rev. Fluid Mech.* **22**, 473-537.
- 4) 水島二郎, 藤村薫 (2003) 流れの安定性 (朝倉書店, Tokyo).
- 5) A. M. GUZMÁN, C. H. AMON (1994) *Phys. Fluids* **6**, 1994-2002.
- 6) S. BLANCHER, R. CREFF AND P. LE QUÉRÉ (2004) *Int. J. Heat Fluid Flow* **19**, 3726-3737.
- 7) S. BLANCHER, R. CREFF AND P. LE QUERE (2004) *Phys. Fluids* **16**, 3726-3737.
- 8) J. MIZUSHIMA, H. OKAMOTO AND H. YAMAGUCHI (1996) *Phys. Fluids* **8**, 2933-2942.
- 9) J. MIZUSHIMA AND Y. SHIOTANI (2001) *J. Fluid Mech.* **434**, 355-369.
- 10) J. MIZUSHIMA, S. YOSHIDA AND M. TAKAOKA (2006) *J. Phys. Soc. Japan* **75**, 113401-1-4.