

低推力を用いた編隊飛行制御の解析

山田克彦*¹

Analysis of Formation Flying with Low Thrust

By

Katsuhiko YAMADA*¹

Abstract : In this paper, precise position keeping of a deputy spacecraft with respect to a chief spacecraft is considered in the formation flight. Especially, the case where the deputy spacecraft is located at the certain distance from the chief spacecraft in the tangential direction is analyzed under the J_2 perturbation. The relative position between the two spacecraft is affected by the J_2 perturbation, and the two methods to compensate the J_2 effects are considered. One is to set the initial velocity of the deputy spacecraft and the eccentricity of the chief spacecraft orbit to alleviate the relative position variation. The other one is to add the low thrust force to the deputy spacecraft to cancel the J_2 effects. These two cases are analyzed and the appropriate control values are derived to compensate the J_2 perturbation.

Keywords : formation flying, Hill coordinates, J_2 perturbation, position keeping

概 要

2機の編隊飛行制御において、従宇宙機が主宇宙機に対して進行方向に一定距離だけ離れた場合を対象に、地球重力の J_2 項の影響が2機の宇宙機の相対位置にどう影響するかを解析した。その結果に基づき、 J_2 項による相対位置変動を低減するための、従宇宙機の初期速度と主宇宙機の軌道離心率の設定について考察した。また相対位置変動を除去するために、従宇宙機に連続的に入力を加える場合の連続入力の大きさを求め、主宇宙機の軌道離心率を適切に設定することで連続入力の変動をある程度抑えられることを述べた。

1. はじめに

複数の宇宙機がフォーメーションを構成する場合に、地球重力の J_2 項による歪みがフォーメーションに影響を与えることがよく知られている。フォーメーションによる影響には、軌道1周期でキャンセルされる周期内変動と永年のものの両方があり、永年の影響項についてはその影響を初期速度でキャンセルする方法が検討されているが、周期内変動についてはこれまであまり問題にはされていない。しかし、たとえば2機の宇宙機をその進行方向に配置してその間の距離を一定に保つ場合を考えると、周期内変動がどの程度になるかを見積もること

*¹ Nagoya University

が重要となる。本稿では、進行方向に配置された2機の宇宙機において、 J_2 項による影響が2機の相対位置にどのような影響を及ぼすかを解析し、永年項と周期内変動項の見積もりと、その変動をなるべく少なくするような方法について検討する。

本稿で用いるおもな記号を以下に示す。 μ ：地球の重力定数、 R ：地球の赤道半径、 J_2 ：地球の重力ポテンシャルにおける2次項の係数 ($J_2=1.0826 \times 10^{-3}$)、 r ：宇宙機の慣性系における位置ベクトル、 a ：軌道長半径、 e ：離心率、 i ：軌道傾斜角、 ω ：近地点引数、 Ω ：昇交点赤経、 M ：平均近点離角、 E ：離心近点離角、 v ：真近点離角、 θ ：緯度引数 ($\theta = v + \omega$)、 q_1, q_2 ：離心率ベクトルの成分 ($q_1 = e \cos \omega$, $q_2 = e \sin \omega$)、 n ：平均軌道角速度。ただし宇宙機の状態を表す量において主宇宙機を表すときには添字 c を、従宇宙機を表すときには添字 d をつけることにする。また近地点における量を表すときには添字 0 をつける。またベクトルやマトリクスに $\dot{\cdot}$ をつけるときは、各成分ごとに時間微分することを意味する。

2. Hill 座標系における遷移マトリクス

2.1 Hill 座標系

基準軌道上を運動する宇宙機を主宇宙機 (Chief Spacecraft)、この主宇宙機に対してフォーメーションフライトを形成する宇宙機を従宇宙機 (Deputy Spacecraft) とする。主宇宙機の質量中心を原点とする局所的な直交座標系を、地心から主宇宙機に向かう方向が x 軸、主宇宙機の軌道面に垂直な方向が z 軸 (主宇宙機の回る向きを正にとる) となるように選ぶ。この局所的な座標系を Hill 座標系と呼ぶ。主宇宙機と従宇宙機には地心からの距離の2乗に反比例するノミナルの重力に加えて J_2 項による重力が働くものとする。主宇宙機に働く J_2 項による重力項を Hill 座標系で $[f_x \ f_y \ f_z]^T$ とすると、これらは主宇宙機の軌道要素を用いてつぎのように表すことができる [1]。

$$f_x = \frac{3\mu J_2 R^2}{2r_c^4} (3\sin^2 i_c \sin^2 \theta_c - 1) \quad (1)$$

$$f_y = -\frac{3\mu J_2 R^2}{2r_c^4} \sin^2 i_c \sin 2\theta_c \quad (2)$$

$$f_z = -\frac{3\mu J_2 R^2}{2r_c^4} \sin 2i_c \sin \theta_c \quad (3)$$

2.2 状態ベクトルの変換

宇宙機の位置 r を Hill 座標系で表現して

$$\mathbf{r} = [r_x \ r_y \ r_z]^T \quad (4)$$

とし、宇宙機の状態 p を

$$\mathbf{p} = [r_x \ r_y \ r_z \ \dot{r}_x \ \dot{r}_y \ \dot{r}_z]^T \quad (5)$$

とする。従宇宙機の主宇宙機に対する状態を $\delta p = p_d - p_c$ で与える。また宇宙機の軌道要素を

$$\mathbf{q} = [a \ \theta \ i \ q_1 \ q_2 \ \Omega]^T \quad (6)$$

$$\mathbf{s} = [a \ e \ i \ \Omega \ \omega \ M]^T \quad (7)$$

として従宇宙機と主宇宙機の軌道要素の偏差を $\delta q = q_d - q_c$, $\delta s = s_d - s_c$ とする。ここでは δs の時間発展を求

めて、それから $\delta p(0)$ と $\delta p(v_c)$ (ただし δp を主宇宙機の真近点離角 v_c の関数とみなす) の関係を状態遷移マトリクスの形で求める。以下では、この計算に必要な関係式を導く。

2.3 $\delta p \leftrightarrow \delta q$ の変換

δp と δq の変換はつぎのように表すことができる。

$$\delta p = A_{Hq} \delta q, \quad A_{Hq} = \left. \frac{\partial p}{\partial q} \right|_c \quad (8)$$

$$\delta q = A_{qH} \delta p, \quad A_{qH} = A_{Hq}^{-1} = \left. \frac{\partial q}{\partial p} \right|_c \quad (9)$$

上式の偏微分における添字 c は主宇宙機の状態 (軌道要素) で評価することを意味している。 J_2 項の存在する場合のマトリクス A_{Hq} , A_{qH} はすでに導かれている [3]。

2.4 $\delta q \leftrightarrow \delta s$ の変換

q と s はともに軌道要素であり、 a , i , Ω は共通成分となるのでこれらの間の変換はさほど複雑なものとはならない。いま、

$$\delta q = A_{qs} \delta s, \quad A_{qs} = \left. \frac{\partial q}{\partial s} \right|_c \quad (10)$$

$$\delta s = A_{sq} \delta q, \quad A_{sq} = A_{qs}^{-1} = \left. \frac{\partial s}{\partial q} \right|_c \quad (11)$$

とおくことにしよう。 M と E の間には

$$M = E - e \sin E \quad (12)$$

の関係があることから、主宇宙機の回りで $\delta M = M_d - M_c$ を求めるとつぎのようになる [2]。

$$\delta M = \frac{\sqrt{1-e_c^2}}{(1+e_c \cos v_c)^2} [(1-e_c^2)\delta v - \sin v_c (2+e_c \cos v_c)\delta c] \quad (13)$$

したがって $\delta v = \delta\theta - \delta\omega$ であることから

$$\delta\theta = \frac{(1+e_c \cos v_c)^2}{\sqrt{1-e_c^2}^{\frac{3}{2}}} \delta M + \delta\omega + \frac{\sin v_c (2+e_c \cos v_c)}{1-e_c^2} \delta e \quad (14)$$

この関係を用いれば A_{qs} の非零の成分を求めることができる [4]。

2.5 δs の時間発展

最後に δs の時間発展を遷移マトリクスの形で求めよう。この遷移マトリクスが得られると、上記の変数変換にともなう係数マトリクスをかけることで最終的に Hill 座標系における遷移マトリクスが得られることになる。ここで接触軌道要素の変動分を表す Gauss の惑星方程式はつぎのように表される [2]。ただし $p_c = a_c(1-e_c^2)$, $h_c = n_c \sqrt{1-e_c^2} a_c^2$ とおく。

$$\frac{da_c}{dt} = \frac{2a_c^2}{h_c} \left(e_c \sin v_c f_x + \frac{p_c}{r_c} f_y \right) \quad (15)$$

$$\frac{de_c}{dt} = \frac{1}{h_c} [p_c \sin v_c f_x + ((p_c + r_c) \cos v_c + r_c e_c) f_y] \quad (16)$$

$$\frac{di_c}{dt} = \frac{r_c \cos \theta_c}{h_c} f_z \quad (17)$$

$$\frac{d\Omega_c}{dt} = \frac{r_c \sin\theta_c}{h_c \sin i_c} f_z \quad (18)$$

$$\frac{d\omega_c}{dt} = \frac{1}{h_c e_c} [-p_c \cos v_c f_x + (p_c + r_c) \sin v_c f_y] - \frac{r_c \sin\theta_c \cos i_c}{h_c \sin i_c} f_z \quad (19)$$

$$\frac{dM_c}{dt} = n_c + \frac{b_c}{a_c h_c e_c} [(p_c \cos v_c - 2r_c e_c) f_x - (p_c + r_c) \sin v_c f_y] \quad (20)$$

この Gauss の惑星方程式を

$$\frac{ds}{dt} = f \quad (21)$$

と表す。これより δs の時間発展はつぎのように求めることができる。

$$\frac{d\delta s}{dt} = A_{\delta s} \delta s, \quad A_{\delta s} = \frac{\partial f}{\partial s} \quad (22)$$

通常、この方程式の解を解析的に求めることはできない。しかし初期状態において2機の宇宙機は進行方向に d_y だけ離れているという初期条件のもとでは解を近似的に求めることができる。簡単のために初期状態は主宇宙機が近地点における状態であるとする。このとき δs の初期値 $\delta s(0)$ はつぎのように求めることができる。ただし後述するように独立変数は主宇宙機の真近点離角 v_c とする。

$$\delta s(0) = A_{sH} \delta p(0), \quad A_{sH} = A_{sq} A_{qH} \quad \delta p(0) = \begin{bmatrix} 0 & d_y & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (23)$$

上式から $\delta s(0)$ を求めるとつぎのようになる。

$$\delta s(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{3J_2 R^2 \sin 2i_{c0} \sin \omega_{c0} \cos \omega_{c0} dy}{2a_{c0}^3 (1+e_{c0})(1-e_{c0})^3} \\ -\frac{3J_2 R^2 \sin 2i_{c0} \sin^2 \omega_{c0} dy}{2a_{c0}^3 (1+e_{c0})(1-e_{c0})^3 \sin i_{c0}} \\ \frac{dy}{a_{c0}(1-e_{c0})} + \frac{3J_2 R^2 \sin 2i_{c0} \cos i_{c0} \sin^2 \omega_{c0} dy}{2a_{c0}^3 (1+e_{c0})(1-e_{c0})^3 \sin i_{c0}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

ただし a_{c0} , e_{c0} , i_{c0} , ω_{c0} 等の軌道要素は主宇宙機の初期状態における軌道要素の値を意味する。一方、 $A_{\delta s}$ の項は複雑になるが、 J_2 項に依存しない項はその (6, 1) 成分 ($-3n_c/(2a_c)$) だけであり、他の成分はすべて J_2 項に依存する。したがって式 (22) の右辺はすべて J_2 項に依存することになる。これより式 (22) の右辺における主宇宙機の軌道要素 a_c , e_c , i_c , ω_c , Ω_c はすべて一定とみなして時間積分をしても J_2 項の 1 次の範囲においては正しい値が求められる。また式 (22) の右辺において時間 t が陽に含まれることはなく、主宇宙機の真近点離角 v_c が時間変化する変数として含まれる。そこで $A_{\delta s}$ および δs を真近点離角 v_c の関数とみなして $A_{\delta s}(v_c)$, $\delta s(v_c)$ と表すとき、 $\delta s(v_c)$ は J_2 項の 1 次の範囲においてつぎのように求めることができる。

$$\delta s(v_c) = \int_0^{v_c} A_{\delta s}(v_c) \delta s(0) \frac{r_c^2}{h_c} dv_c \quad (25)$$

ただし上式においては $h_c = r_c^2 \dot{v}_c$ の関係を用いて t による積分を v_c による積分に変換した。また式 (25) の計算は必ずしもすべての項で解析的に実行できるわけではなく、 $\delta s(v_c)$ の第 6 成分では解を陽に表現できない。その場合には r_c を次式のように展開して扱う。

$$r_c = a_c (1 - \cos v_c e_c - \sin^2 v_c e_c^2 + \cos v_c \sin^2 v_c e_c^3 - \dots) \quad (26)$$

2.6 δp の時間発展

$\delta s(v_c)$ が得られれば、その真近点離角における $\delta p(v_c)$ は $A_{Hs} = A_{Hq}A_{qs}$ をかけることで得られる。 A_{Hs} は真近点離角 v_c の関数となるのでこれを $A_{Hs}(v_c)$ と表すと、

$$\delta p(v_c) = A_{Hs}(v_c) \delta s(v_c) \quad (27)$$

ただし $A_{Hs}(v_c)$ の各項は軌道要素 $(a_c, e_c, i_c, \Omega_c, \omega_c, v_c)$ から構成され、これらは J_2 項により変動する。これらの各軌道要素を v_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) とするとき、 $A_{Hs}(v_c)$ では各軌道要素の J_2 項による変動分も考慮する必要がある。 J_2 項による変動分を考慮しない場合を $A_{Hs0}(v_c)$ と書くことにすると、 $A_{Hs}(v_c)$ は $A_{Hs0}(v_c)$ からつぎのように求めることができる。

$$A_{Hs}(v_c) = A_{Hs0}(v_c) + \sum_{i=1}^6 \frac{\partial A_{Hs}}{\partial v_i} \Big|_0 \Delta v_i \quad (28)$$

ただし上式において $\partial A_{Hs} / \partial v_i|_0$ は A_{Hs} において J_2 項の影響を省略するときの $\partial A_{Hs} / \partial v_i$ の値を意味し、 Δv_i は軌道要素 v_i の J_2 項の影響による変化分を意味する。 Δv_i は次式で求められる。

$$\Delta v_i = \int_0^{v_c} \frac{dv_i}{dt} \frac{r_c^2}{h_c} dv_c \quad (29)$$

上式において、 dv_i/dt は式 (15)~(20) から求めることができる。ただし dv_c/dt については式 (13) と同様にしてつぎのように求められる。

$$\frac{dv_c}{dt} = \frac{(1 + e_c \cos v_c)^2}{(1 - e_c^2)^{3/2}} \frac{dM_c}{dt} + \frac{\sin v_c (2 + e_c \cos v_c)}{1 - e_c^2} \frac{de_c}{dt} \quad (30)$$

以上をまとめて、 $\delta p(0)$ から $\delta p(v_c)$ を求めるには、式 (24) によって $\delta s(0)$ を求め、その結果を式 (25) に代入して $\delta s(v_c)$ を求め、さらに式 (27) によって $\delta p(v_c)$ を求めればよい。

3. 一周内の相対位置の変動量

3.1 変動量の初期速度と離心率による補正

前節の手順で相対位置の変動量を求めることができる。従宇宙機は近地点において Hill 座標系の y 方向に d_y だけ離れている状態を初期値とすると、その後の従宇宙機の主宇宙機に対する運動は、Hill 座標系においてつぎのように表すことができる。ただし $\alpha = J_2 R^2 / a_{c0}^2$ として主宇宙機の離心率 e_{c0} で展開するときの 1 次の項までを示す。

$$x = \alpha \sin^2 i_{c0} \cos 2\omega_{c0} \sin v_c (1 - \cos v_c) dy + \frac{1}{2} \alpha \sin^2 i_{c0} \sin 2\omega_{c0} (1 - \cos v_c) (7 + 2\cos v_c) d_y \\ + \alpha \left[\sin^2 i_{c0} \cos 2\omega_{c0} \sin v_c (1 - \cos v_c) + \frac{1}{2} \sin^2 i_{c0} \sin 2\omega_{c0} (25 - 9v_c \sin v_c - 23\cos v_c - 2\cos^2 v_c) \right] d_y e_{c0} \quad (31)$$

$$y = d_y - \frac{3}{4} \alpha (1 - 3\cos^2 i_{c0}) (1 - \cos v_c) d_y - \frac{1}{4} \alpha \sin^2 i_{c0} \cos 2\omega_{c0} (1 - \cos v_c) (17 + 4\cos v_c) d_y \\ - \frac{1}{2} \alpha \sin^2 i_{c0} \sin 2\omega_{c0} (9v_c - 11\sin v_c + 2\sin v_c \cos v_c) d_y \\ + \left[1 - \cos v_c + \frac{3}{4} \alpha (1 - 3\cos^2 i_{c0}) (1 + v_c \sin v_c - 3\cos v_c + 2\cos^2 v_c) \right. \\ \left. - \frac{1}{4} \alpha \sin^2 i_{c0} \cos 2\omega_{c0} (1 - \cos v_c) (33 - 11\cos v_c - \cos^2 v_c) \right. \\ \left. - \frac{1}{4} \alpha \sin^2 i_{c0} \sin 2\omega_{c0} (72v_c + 18v_c \cos v_c - 107\sin v_c + 18\sin v_c \cos v_c - \sin v_c \cos^2 v_c) \right] d_y e_{c0} \quad (32)$$

$$z = -\alpha \sin i_{c0} \cos i_{c0} (1 - \cos v_c) (\cos \omega_{c0} - \cos (\omega_{c0} + v_c)) d_y e_{c0} \quad (33)$$

上記に示すように J_2 項の影響によって x , y , z は軌道一周内で変動する。 z 方向についてはその変動が小さいが、 x , y 方向は変動量が大きく、とくに y 方向については真近点離角 v_c がそのまま含まれていることから永年変動項が存在する。ここでは x , y 方向の変動量をなるべく抑えるように従宇宙機の x , y 方向の初期速度と主宇宙機の離心率 e_{c0} を設定することを考えよう。つぎの仮定をおく。

- ・主宇宙機はノミナル状態で離心率0の円軌道を運動し、変動を抑えるための離心率は J_2 のオーダーであるとする。
- ・従宇宙機の Hill 座標系における初期速度は、主宇宙機の初期状態における軌道角速度を $n_{c0} = \sqrt{\mu/a_{c0}^3}$ とするとき $d_y n_{c0}$ に対して J_2 のオーダーであるとする。

このとき従宇宙機の Hill 座標系における初期速度を \dot{x}_0 , \dot{y}_0 とおくと、これらによる変動分 Δx , Δy は e_{c0} の 1 次の項までをとると次式で表すことができる。

$$\Delta x = \frac{\sin v_c}{n_{c0}} (1 - 2e_{c0}) \dot{x}_0 + \left[\frac{2(1 - \cos v_c)}{n_{c0}} + \frac{2 - 2\cos v_c - 3v_c \sin v_c}{n_{c0}} e_{c0} \right] \dot{y}_0 \quad (34)$$

$$\Delta y = -\frac{2(1 - \cos v_c)}{n_{c0}} [1 - (3 + \cos v_c) e_{c0}] \dot{x}_0 - \left[\frac{3v_c - 4\sin v_c}{n_{c0}} + \frac{3v_c + 3v_c \cos v_c + 2\sin v_c \cos v_c}{n_{c0}} e_{c0} \right] \dot{y}_0 \quad (35)$$

\dot{y}_0 によって永年変動項が現れるので、 J_2 項によって y に現れる永年変動項を打ち消すことを考える。一般の離心率の場合に \dot{y}_0 はつぎのように求められる [4]

$$\dot{y}_0 = -\frac{3\alpha 2n_{c0} \sin^2 i_{c0} \sin 2\omega_{c0}}{2\sqrt{1 + e_{c0}} (1 - e_{c0})^{7/2}} d_y \quad (36)$$

上式を e_{c0} の 1 次の項まで展開すると次式となる。これは式 (32) における永年項を e_{c0} の 1 次の項までキャンセルすることになる。

$$\dot{y}_0 = -\frac{3\alpha}{2} \sin^2 i_{c0} \sin 2\omega_{c0} n_{c0} (1 + 3e_{c0}) d_y \quad (37)$$

つぎに J_2 項による x の変動を考える。 \dot{x}_0 を設定することによって x の変動分のうち \dot{x}_0 と同期する $\sin v_c$ の成分はキャンセルすることができ、 \dot{x}_0 は次式となる。ただし x の変動における e_{c0} の影響は J_2 の 2 次のオーダーとなるので無視する。

$$\dot{x}_0 = -\alpha \sin^2 i_{c0} \cos 2\omega_{c0} n_{c0} d_y \quad (38)$$

このように \dot{x}_0 , \dot{y}_0 を定めるとき、 J_2 項による y の変動において離心率 e_{c0} の影響は J_2 の 1 次のオーダーで現れるので、離心率 e_{c0} を適切に設定することで y の変動分のうち離心率と同期する成分をキャンセルすることができる。このときの離心率は次式で与えられる。

$$e_{c0} = \frac{3\alpha}{2} - \frac{\alpha}{4} \sin^2 i_{c0} (9 - 5\cos 2\omega_{c0}) \quad (39)$$

式 (36), (38), (39) のように \dot{y}_0 , \dot{x}_0 , e_{c0} を設定するとき、 J_2 項による x , y の変動は式 (31), (32) から、つぎの \bar{x} , \bar{y} のように変化する。ただし $\theta_c = \omega_{c0} + v_c$ とし、 J_2 の 1 次のオーダーまでを表記する。

$$\bar{x} = -\frac{\alpha}{2} \sin^2 i_{c0} [\sin 2\theta_c - \cos v_c \sin 2\omega_{c0}] d_y \quad (40)$$

$$\bar{y} = d_y - \frac{\alpha}{2} \sin^2 i_{c0} \sin v_c [2\sin(2\omega_{c0} + v_c) + \sin 2\omega_{c0}] d_y \quad (41)$$

このように x , y の一周内で変動は \dot{x}_0 , \dot{y}_0 , e_{c0} の設定だけで完全に抑えられるわけではないが、式 (31), (32) と比較すれば相当に低減できることがわかる。

3.2 変動量の低推力連続入力による除去

相対変動量を完全に抑えるためには J_2 項によって生じる擾乱力を連続的に補償する必要がある。ここではこの擾乱力の大きさを求めよう。 δp は Hill 座標系における相対位置と相対速度の成分で構成されている。したがって $\dot{\delta p}$ を求めれば Hill 座標系における加速度項がわかり、 J_2 項が Hill 座標系においてどのような力として作用するかがわかる。この力をキャンセルするように推力を加え続けることができれば Hill 座標系において相対位置を一定に保つことができる。式 (27) を時間微分することで $\dot{\delta p}(v_c)$ はつぎのように求められる。

$$\dot{\delta p}(v_c) = \dot{A}_{Hs}(v_c) \delta s(v_c) + A_{Hs}(v_c) \dot{\delta s}(v_c) = \left[\frac{\partial A_{Hs}(v_c)}{\partial s} \dot{s}(v_c) + A_{Hs}(v_c) A_{ss}(v_c) \right] \delta s(v_c) \quad (42)$$

上式によって $\dot{\delta p}(v_c)$ を求めることができるが、各軌道要素は J_2 項による変動をうけるのでその分の影響を式 (28) と同様に考慮する必要がある。

主宇宙機の真近点離角が v_c のときに従宇宙機の主宇宙機に対する相対位置が $\delta p(v_c) = [0 \ d_y \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ であるとする。このとき $\dot{\delta p}(v_c)$ の値からこの相対位置を保つために従宇宙機に加えるべき力を Hill 座標系で f_{dx} , f_{dy} , f_{dz} とし、これらを J_2 の 1 次のオーダーで求めると次式となる。

$$f_{dx} = -an_{c0}^2 [3\sin v_c + \sin^2 i_{c0} (-7\sin v_c \sin^2 \omega_{c0} - 2\sin \theta_c \cos \omega_{c0} + 11\sin \theta_c \cos \theta_c)] d_y + 2n_{c0}^2 \sin v_c d_y e_{c0} \quad (43)$$

$$f_{dy} = \frac{1}{2} an_{c0}^2 [3\cos v_c + \sin^2 i_{c0} (-7\cos v_c \sin^2 \omega_{c0} - 2\cos \theta_c \cos \omega_{c0} + 8 - 16\cos^2 \omega_{c0} \quad (44)$$

$$- 16\cos^2 v_c + 32\cos \theta_c \cos v_c \cos \omega_{c0})] d_y - n_{c0}^2 \cos v_c d_y e_{c0} \quad (45)$$

$$f_{dz} = 0 \quad (46)$$

主宇宙機の軌道に J_2 のオーダーの離心率があると式 (43), (46) の右辺最終項にあるような影響が現れるが、軌道離心率 e_{c0} を f_{dx} および f_{dy} において離心率と同期して変動する成分をキャンセルするように定めることにすると、 f_{dx} , f_{dy} から得られる離心率の値は等しくなって次式となる。

$$e_{c0} = \frac{3a}{2} - \frac{a}{4} \sin^2 i_{c0} (9 - 5\cos 2\omega_{c0}) \quad (47)$$

これは式 (39) と同じ値であり、従宇宙機に加える力のある程度キャンセルするために主宇宙機に設定する離心率は、初期速度と離心率によって相対位置変動を抑えるために主宇宙機に設定する離心率と同じ値となる。このように主宇宙機の離心率を設定するときの従宇宙機に加えるべき力を \bar{f}_{dx} , \bar{f}_{dy} とするとこれらはつぎのように表される。

$$\bar{f}_{dx} = -\frac{a}{2} n_{c0}^2 \sin^2 i_{c0} (11 \sin 2\theta_c - 2 \cos v_c \sin 2\omega_{c0}) d_y \quad (48)$$

$$\bar{f}_{dy} = \frac{a}{2} n_{c0}^2 \sin^2 i_{c0} (8 \cos 2\theta_c + \sin v_c \sin 2\omega_{c0}) d_y \quad (49)$$

なお、従宇宙機に初期速度 \dot{x}_0 , \dot{y}_0 を設定すると、初期速度による Coriolis 力成分が f_{dx} , f_{dy} に対して $-2n_{c0}\dot{y}_0$, $2n_{c0}\dot{x}_0$ として加わることになるが、式 (48), (49) にみられる周期項をキャンセルするものではないのでここでは初期速度の設定は考えない。

4. 数値計算例

4.1 周期内変動の値

ここでは従宇宙機が主宇宙機に対して近地点において進行方向に一定距離だけ離れたときに、 J_2 項の影響によって相対位置がどう変動するかを数値計算を行い、解析結果と比較する。主宇宙機と従宇宙機はともに J_2 項の影響のもとに独立にシミュレーションを行い、その結果から相対位置変動を求めて Hill 座標系で成分表示する。

主宇宙機の軌道要素として近地点におけるつぎの値を用いる.

$$a_{c0} = 7000 \text{ [km]}, \quad \Omega_{c0} = 0^\circ, \quad \omega_{c0} = 30^\circ, \quad i_{c0} = 45^\circ$$

離心率 e_{c0} は 0 または式 (39) の値を用いる.

離心率 $e_{c0} = 0$ として従宇宙機の主宇宙機に対する近地点（昇降点から角度 ω_{c0} の点）での初期値を $\delta p = [0 \quad d_y \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$ として $d_y = 50 \text{ [m]}$ とするときの、従宇宙機の主宇宙機に対する x, y 方向の相対位置変動を図 1 に示す (y 方向では d_y を差し引いた値. z 方向はほとんど位置変動が生じないので省略). この図ではシミュレーション結果と式 (31), (32) の結果を比較しており, 式 (32) から予想されるように y 方向に永年変動が生じること, シミュレーション結果は解析結果とよい一致を示すことがわかる.

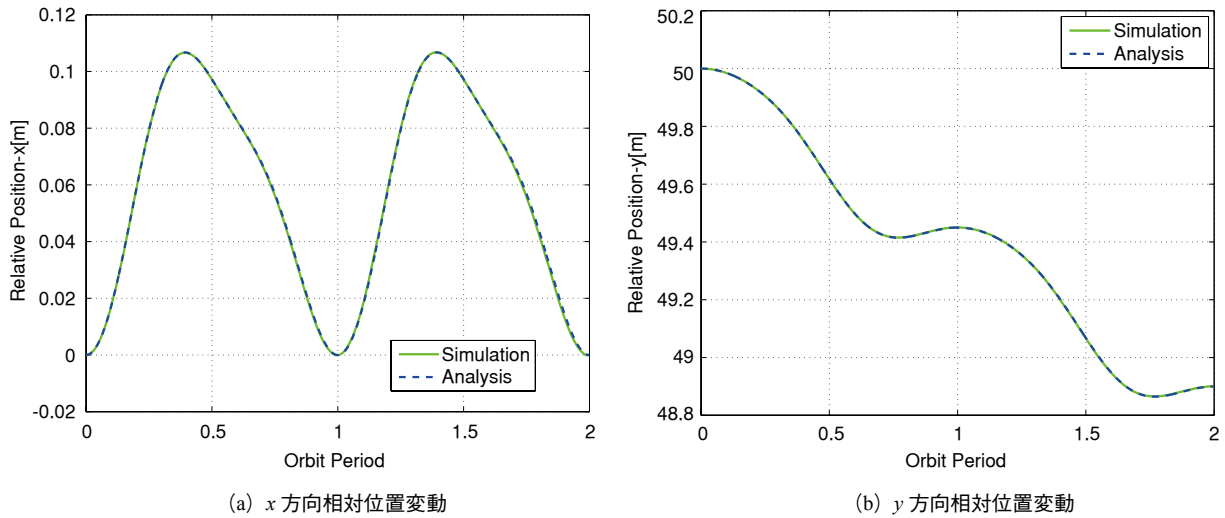


図 1. 相対位置の変動量と解析結果の比較

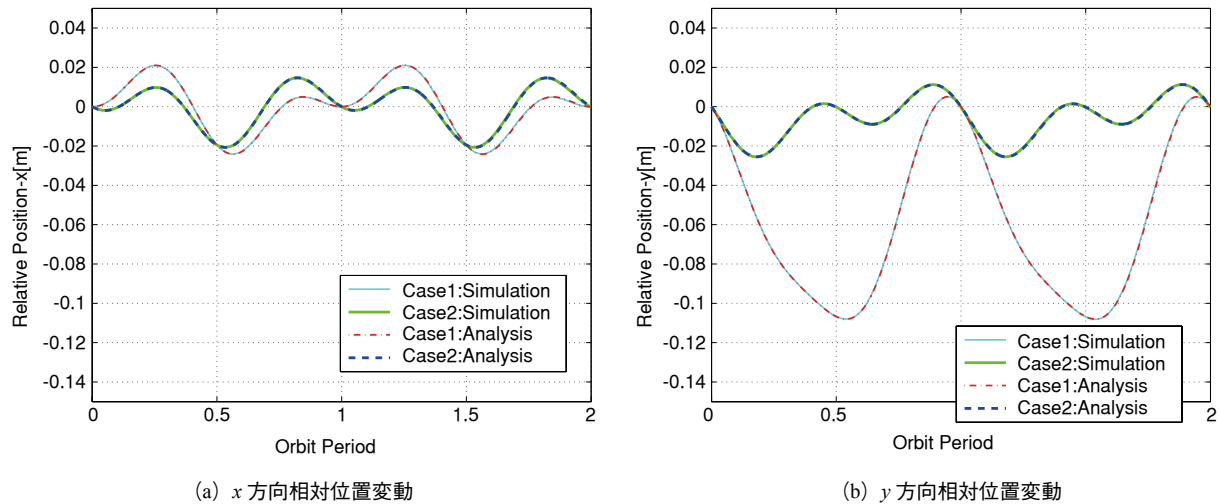


図 2. 相対位置の変動量と解析結果の比較 (初期速度と離心率で補正を行う場合)

4.2 初期速度と離心率による周期内変動の補正

つぎにこの周期内変動を初期速度と離心率によって補正することを考える。従宇宙機の主宇宙機に対する近地点（昇降点から角度 ω_{c0} の点）での初期値を $\delta p = [0 \ d_y \ 0 \ \dot{x}_0 \ \dot{y}_0 \ 0]^T$ とし $d_y = 50$ [m] とするとき、つぎの2つのケースについて計算を行う。

1. $e_{c0} = 0$, $\dot{x}_0 = 0$, とし, \dot{y}_0 として式 (36) に示す値を用いるとき
2. \dot{x}_0 , \dot{y}_0 , e_{c0} として式 (38), (36), (39) に示す値を用いるとき

前者では y 方向の永年変動を除去することができ、後者ではさらに周期内変動を軽減することができる。この結果を図2に示す。この図に示すように、1のケースでは y 方向の永年変動は抑えられるが周期内変動はとくに y 方向において顕著である。また2のケースでは周期内変動をある程度小さく抑えられていることがわかる。また図中、破線および一点鎖線は解析結果を示しているが、シミュレーション結果とよい一致を示すことがわかる。

4.3 連続入力による周期内変動の除去

つぎに連続的なスラスト入力により周期内変動を完全に抑える場合を考える。従宇宙機の主宇宙機に対する近地点（昇降点から角度 ω_{c0} の点）での初期値を $\delta p = [0 \ d_y \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ とし $d_y = 50$ [m] とするとき、つぎの2つのケースについて計算を行う。

3. $e_{c0} = 0$ として、従宇宙機に加える x 方向力と y 方向力に式 (43), (45) の値を用いるとき
4. e_{c0} として式 (47) の値を用い、従宇宙機に加える x 方向力と y 方向力に式 (48), (49) の値を用いるとき

この2つのケースで従宇宙機に加えるべき力を図3に示す。この図に示すように、 $e_{c0} = 0$ のケースではやや力の変動が大きくなるが、 e_{c0} として式 (47) の値を用いると力の変動をある程度抑えて、ほぼ平均値を0とすることができる。

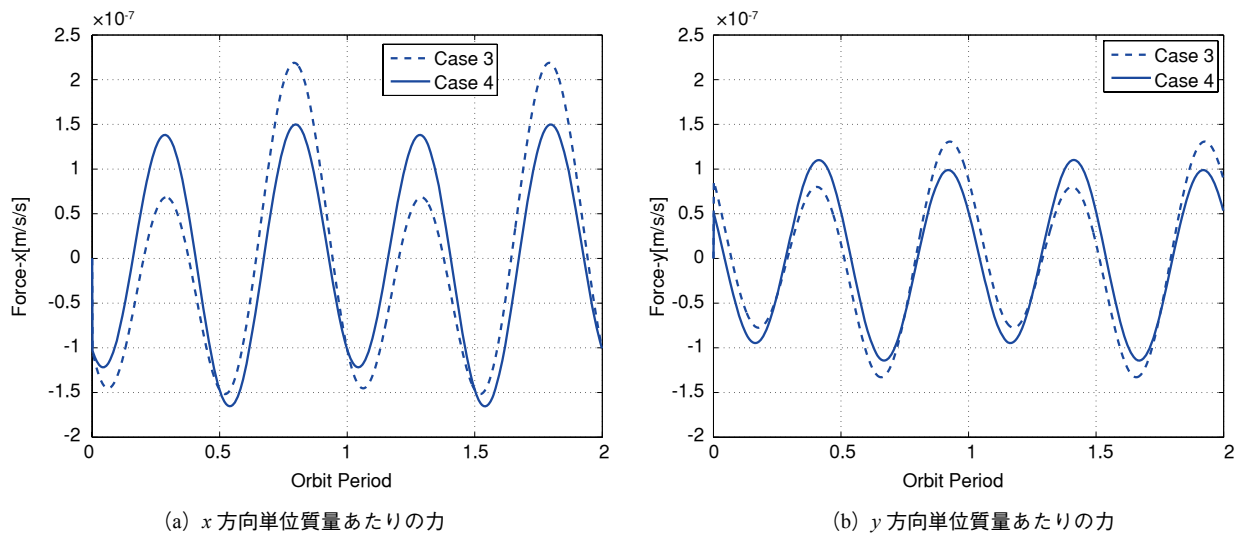


図3. 相対位置の変動量を除去するために従宇宙機に加えるべき力

4.4 周期内変動の補正の比較

以上、従宇宙機の主宇宙機に対する相対位置変動を抑えるために、従宇宙機の初期速度と主宇宙機の離心率を設定して相対位置変動をある程度抑える場合と、主宇宙機の離心率を設定して従宇宙機に連続的に力を加えて相対位置変動を除去する場合について述べた。ここでは、これらの各場合に従宇宙機に必要な速度増分と相対位置変動の大きさについて、簡単のために $\omega_{c0} = 0$ の場合で比較する。この結果を表1に示す。この表に示すように連続的に入力を加える場合には初期速度を設定するよりもはるかに大きな速度増分を必要とする。連続入力の

場合は1周期だけの値なので周回を重ねるたびにこの値は比例して大きくなる。一方、初期速度を設定する場合には、ある程度の相対位置変動は避けられないので、この変動が許容できない場合にはなんらかの制御が必要となる。

表1 従宇宙機の初期速度を設定する場合と従宇宙機に連続入力を加える場合の比較 ($\omega_{c0}=0$)

		初期速度設定	連続入力
速度増分 (1周期)	x	$-a \sin^2 i_{c0} n_{c0} d_y$	$\int \bar{f}_{dx} dt = 22a \sin^2 i_{c0} n_{c0} d_y$
	y	0	$\int \bar{f}_{dy} dt = 16a \sin^2 i_{c0} n_{c0} d_y$
周期内変動	x	$\frac{a}{2} \sin^2 i_{c0} d_y \sim \frac{a}{2} \sin^2 i_{c0} d_y$	0
	y	$-a \sin^2 i_{c0} d_y \sim 0$	0

5. まとめ

本稿では、2機の編隊飛行制御において、従宇宙機が主宇宙機に対して進行方向に一定距離だけ離れた場合を対象に地球重力の J_2 項の影響が2機の宇宙機の相対位置にどう影響するかを解析した。 J_2 項の影響は動径方向 x と進行方向 y に現れるが、この変動を抑えるための、従宇宙機の初期速度と主宇宙機の軌道離心率の設定について考察した。また相対位置変動を除去するために従宇宙機に連続的に入力を加える場合の連続入力の大さを求め、主宇宙機の軌道離心率を適切に設定することで連続入力の変動をある程度抑えられることを述べた。

参考文献

- [1] B. Wie, "Space Vehicle Dynamics and Control", AIAA Education Series, pp. 233-240, 1998
- [2] S. Schaub and J. L. Junkins, "Analytical Mechanics of Space Systems", AIAA Education Series, pp. 489-543, 593-628, 2003
- [3] D. Gim and K. T. Alfriend, "State Transition Matrix of Relative Motion for the Perturbed Noncircular Reference Orbit", Journal of Guidance, Control, and Dynamics, pp. 956-971, 2003
- [4] K. Yamada, T. Shima and S. Yoshikawa, "Effects of Perturbation in Formation Flight around an Eccentric Reference Orbit", Proceedings of 17th Workshop on JAXA Astrodynamics and Flight Mechanics, to appear