

FDTD 法によるハニカムモデルの音響透過解析

村上桂一, 青山剛史
宇宙航空研究開発機構

Sound Transmission Analysis of Honeycomb Model Using FDTD Method

By
Keiichi Murakami and Takashi Aoyama

ABSTRACT

This paper provides the results of a numerical analysis on the sound transmission to modeled solid and hollow walls in order to investigate an acoustic characteristic of a honeycomb sandwich structure. The finite difference time domain (FDTD) method is used in this study because it is possible to solve both sound wave propagation in fluid and elastic wave propagation in solid simultaneously. From the results of isotropic solid wall calculations, there is the second transmission wave in the case of thick wall model, which is not observed in the case of thin wall model. On the other hand, the arch-shaped transmission wave is observed in the case of hollow wall model calculation, which is totally different from that of simple solid wall models.

1. はじめに

H-IIA ロケット 204 形態及び H-IIB ロケットなど, SRB (固体ロケットブースター) の増加及びメインエンジンのクラスター化に伴うロケット打上げ時の音響環境悪化が懸念されており, 日本の射場やロケット形態にも適用可能な搭載衛星の音響振動に関する予測方法を確立することが重要である. そこで, JAXA では, ロケットフェアリング及び衛星の流体・音響・振動連成解析を行う事を目的とし, 将来的には搭載衛星の音響試験を仮想的に行うことができ, 得られた結果から音響振動の低減策を提案できることを究極の研究目標として定め, それに必要な要素技術の確立を目指した研究を推進している. 具体的には, ロケットペイロードの音響振動に関する解析を以下の4項目に分けて考えている.

1. 音源解析: ブルームに起因する音源の解析
2. 伝播解析: 反射や回折を含む音響の伝播特性の解析
3. 透過解析: フェアリングを透過する音波の解析
4. 振動解析: フェアリング内に伝わった音波がロケットペイロードに及ぼす影響の解析

最終的には全段階で数値シミュレーションのポテンシャルを十分に活用することで, 項目1. から4. までを一括する「ロケットペイロード音響振動統合解析コード」を確立することを目指している.

本稿では, これらの要素技術研究のうち, 項目3. 透過解析の主な研究内容を報告する. 音響透過解析の第1段階として, 流体・固体中を伝播する弾性波を解析できる2次元マルチブロック計算コードを作製した. 解析手法には, 電磁波伝播解析の分野で発展してきた FDTD 法¹⁾ を用いた. FDTD 法は, 近年, 音響解析の分野でも脚光を浴びている. FDTD 法を用いた解析で得られた固体粒子速度から, スカラー速度ポテンシャルとベクトル速度ポテンシャルを求めれば, 固体中の弾性波を縦波と横波に完全に分離することができる²⁾. スカラーポテンシャルは縦波に, ベクトルポテンシャルが横波に対応する. 流体中の音波の解析にも, 粒子速度のスカラー速度ポテンシャルを用いることが可能な場合ならば, 固体粒子速度のポテンシャル表示を導入することは, 流体と固体からなる系を解析するとき, 大変都合が良い. これらのことから, 流体・固体内弾性波伝播解析手法として, 応力と粒子速度を変数とする FDTD 法に着目した.

2. 解法

2. 1. 流体・固体内を伝播する弾性波の支配方程式¹⁾

流体中を伝わる弾性波(音波)の支配方程式として, 連続の式と運動方程式を考える. これら非線形な流体の支配方程式を, 変数変化が小さいと仮定して線形近似することによって音波の支配方程式が得られる. 2次元直交座標系 (x, z) の場合, 以下のように記述される.

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\kappa \left(\frac{\partial \dot{u}_f}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_f}{\partial z} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \dot{u}_f \\ \dot{w}_f \end{bmatrix} = -\frac{1}{\rho_f} \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2)$$

ここで, P は圧力の増分, t は時間を表している. κ は流体の体積弾性率を, ρ_f は流体密度を表しており, これらは, 圧力変化や体積変化が微小であることから一定と仮定している. また, u_f, w_f は x, z 方向の流体要素の変位であり, その時間微分 $\dot{u}_f = \partial u_f / \partial t$, $\dot{w}_f = \partial w_f / \partial t$ は流体粒子の速度に相当する.

一方, 固体内の弾性波の支配方程式は, ひずみテンソル S_{ij} と図1に示される応力テンソル T_{ij} との関係を表すフックの法則, 及び, 運動方程式である. ひずみテンソルも応力テンソルも, 対角要素を中心として対称であるため, 3次元応力テンソルの独立な要素は6成分となり, これらの成分を持つベクトル \mathbf{S}, \mathbf{T} を用いたフックの法則は $\mathbf{T} = [\mathbf{c}] \cdot \mathbf{S}$ となる. ここで, $[\mathbf{c}]$ はスティフネステンソルであり, その成分は, $c_{ij} = c_{ji}$ の関係を持つ. 2次元等方性個体モデルの場合に, フックの法則及び運動方程式を具体的に記述すると, 次式となる.

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} -T_1 \\ -T_3 \\ -T_5 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} c_{11} & c_{13} & 0 \\ c_{31} & c_{11} & 0 \\ 0 & 0 & c_{55} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{u}_s}{\partial x} \\ \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial z} \\ \frac{\partial \dot{u}_s}{\partial z} + \frac{\partial \dot{w}_s}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \dot{u}_s \\ \dot{w}_s \end{bmatrix} = -\frac{1}{\rho_s} \begin{bmatrix} \frac{\partial(-T_1)}{\partial x} + \frac{\partial(-T_5)}{\partial z} \\ \frac{\partial(-T_3)}{\partial z} + \frac{\partial(-T_5)}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (4)$$

ここで、式の形を流体の支配方程式に合わせるため、応力ベクトルに負号を付け、固体粒子の速度 \dot{u}_s, \dot{w}_s を変数として式を整理した。応力ベクトルの成分は、図1に示された3次元応力のうち、 xz 平面内の T_1, T_3 が x, z 方向の垂直応力を、 T_5 がせん断応力をそれぞれ表す。また、 $c_{31} = c_{13}$ 、 $c_{55} = (c_{11} - c_{13})/2$ である。

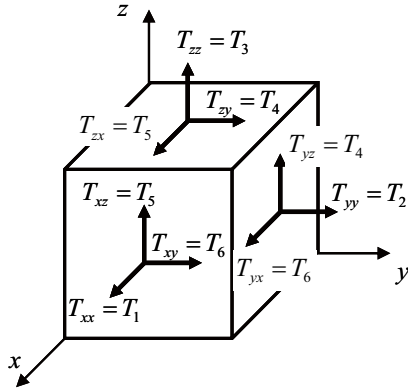


図1 応力の定義

2. 2. FDTD 法による定式化¹⁾

FDTD 法では、前述の弾性波の支配方程式の時間及び空間微分を2次精度中心差分で近似する。支配方程式(1)から(4)のFDTD法による近似式は、次の式(5)から(12)のようになる。

流体：

$$P_{i,k}^{n+1/2} = P_{i,k}^{n-1/2} - \kappa \frac{2\Delta t}{2\Delta x} \left\{ (\dot{u}_f)_{i+1/2,k}^n - (\dot{u}_f)_{i-1/2,k}^n \right\} \quad (5)$$

$$- \kappa \frac{2\Delta t}{2\Delta z} \left\{ (\dot{w}_f)_{i,k+1/2}^n - (\dot{w}_f)_{i,k-1/2}^n \right\}$$

$$(\dot{u}_f)_{i+1/2,k}^{n+1} = (\dot{u}_f)_{i+1/2,k}^n - \frac{1}{\rho} \frac{2\Delta t}{2\Delta x} \left\{ P_{i+1,k}^{n+1/2} - P_{i,k}^{n+1/2} \right\} \quad (6)$$

$$(\dot{w}_f)_{i,k+1/2}^{n+1} = (\dot{w}_f)_{i,k+1/2}^n - \frac{1}{\rho} \frac{2\Delta t}{2\Delta z} \left\{ P_{i,k+1}^{n+1/2} - P_{i,k}^{n+1/2} \right\} \quad (7)$$

固体：

$$(-T_1)_{i,k}^{n+1/2} = (-T_1)_{i,k}^{n-1/2} - c_{11} \frac{2\Delta t}{2\Delta x} \left\{ (\dot{u}_s)_{i+1/2,k}^n - (\dot{u}_s)_{i-1/2,k}^n \right\} \quad (8)$$

$$- c_{13} \frac{2\Delta t}{2\Delta z} \left\{ (\dot{w}_s)_{i,k+1/2}^n - (\dot{w}_s)_{i,k-1/2}^n \right\}$$

$$(-T_3)_{i,k}^{n+1/2} = (-T_3)_{i,k}^{n-1/2} - c_{13} \frac{2\Delta t}{2\Delta x} \left\{ (\dot{u}_s)_{i+1/2,k}^n - (\dot{u}_s)_{i-1/2,k}^n \right\} \quad (9)$$

$$- c_{11} \frac{2\Delta t}{2\Delta z} \left\{ (\dot{w}_s)_{i,k+1/2}^n - (\dot{w}_s)_{i,k-1/2}^n \right\}$$

$$(-T_5)_{i+1/2,k+1/2}^{n+1/2} = (-T_5)_{i+1/2,k+1/2}^{n-1/2} - c_{55} \frac{2\Delta t}{2\Delta z} \left\{ (\dot{u}_s)_{i+1/2,k+1}^n - (\dot{u}_s)_{i+1/2,k}^n \right\} \quad (10)$$

$$- c_{55} \frac{2\Delta t}{2\Delta x} \left\{ (\dot{w}_s)_{i+1,k+1/2}^n - (\dot{w}_s)_{i,k+1/2}^n \right\}$$

$$(\dot{u}_s)_{i+1/2,k}^{n+1} = (\dot{u}_s)_{i+1/2,k}^n - \frac{1}{\rho_s} \frac{2\Delta t}{2\Delta x} \left\{ (-T_1)_{i+1,k}^{n+1/2} - (-T_1)_{i,k}^{n+1/2} \right\} \quad (11)$$

$$- \frac{1}{\rho_s} \frac{2\Delta t}{2\Delta z} \left\{ (-T_5)_{i+1/2,k+1/2}^{n+1/2} - (-T_5)_{i+1/2,k-1/2}^{n+1/2} \right\}$$

$$(\dot{w}_s)_{i,k+1/2}^{n+1} = (\dot{w}_s)_{i,k+1/2}^n - \frac{1}{\rho_s} \frac{2\Delta t}{2\Delta z} \left\{ (-T_3)_{i,k+1}^{n+1/2} - (-T_3)_{i,k}^{n+1/2} \right\} \quad (12)$$

$$- \frac{1}{\rho_s} \frac{2\Delta t}{2\Delta x} \left\{ (-T_5)_{i+1/2,k+1/2}^{n+1/2} - (-T_5)_{i-1/2,k-1/2}^{n+1/2} \right\}$$

ここで、 n は時間ステップ、 i, k はそれぞれ x 及び z 方向の格子インデックスを示しており、 Δt は時間離散間隔、 $\Delta x, \Delta z$ は空間離散間隔である。式(5)に示されるように、半整数 $n+1/2$ タイムステップの圧力は、現時刻 n の粒子速度と半整数タイムステップ $n-1/2$ での圧力から求められ、現時刻の圧力を必要としない。これは、この差分法が蛙飛び差分³⁾と呼ばれる所以である。また、これらの差分式から、圧力及び応力と粒子速度は Δt 毎に交互に計算されるので、これらの値が同時に決まらないことが分かる。

2. 3. 蛙飛び差分の特徴

Von Neumann の安定解析から、蛙飛び差分法の特徴を調べる^{3, 4)}。1次元の線形輸送方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (c > 0)$$

に、蛙飛び差分を適用すると、次式となる。

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

クーラン数 $\nu = c\Delta t/\Delta x$ を用いて変形すると、

$$u_j^{n+1} = u_j^{n-1} - \nu(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \quad (13)$$

となる。式(13)に対し、次式の形の厳密解が存在すると仮定する。

$$u_j^n = g^n \exp(i(j\theta)) \quad (14)$$

式(14)で、 i は虚数、 j は格子点位置を表す。また、 g は複素振幅率と呼ばれ、時間ステップ毎の振幅の増加を示す。式(13)に式(14)を代入して整理すると、次式が得られる。

$$g = \frac{1}{g} - \nu(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$$

$$g = -i\nu \sin \theta \pm \left(1 - \nu^2 \sin^2 \theta\right)^{1/2} \quad (15)$$

$\nu^2 \leq 1$ ならば、式(15)の平方根は実根を持ち、 $|g| = 1$ となる。即ち、クーラン数が1以下とすれば、このスキームは振幅誤差の無い中立安定であることが分かる。

しかし、複素数 g を更に振幅と位相に分けて調べると、特にクーラン数が小さいとき、遅延位相誤差が顕著になるなど、波の速度が周波数によって異なるときに起きる分散誤差が見られることが分かる⁴⁾。このことを、式で見るために、 g を次式で表す。

$$g = |g| \exp(i\varphi) = |g| (\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (16)$$

ここで、 φ は位相差を表しており、ある周波数成分 θ に対し、 φ が厳密解からずれていれば、その周波数成分の波の位相速度が正しくなくなる。式(15)と(16)を比較すると、

$$\varphi(\theta, \nu) = -\tan^{-1} \left[\frac{\nu \sin \theta}{(1 - \nu^2 \sin^2 \theta)^{1/2}} \right] \quad (17)$$

となる。式(17)は、クーラン数 $\nu = 1$ のとき、厳密解 $\varphi_{exact} = -\nu\theta$ に等しくなる。ところが、図2に示すように、特に ν が小さいときに厳密解からのずれが大きく、位相誤差から来る分散誤差が、遅延位相誤差となって波の後方の振動として現れる。

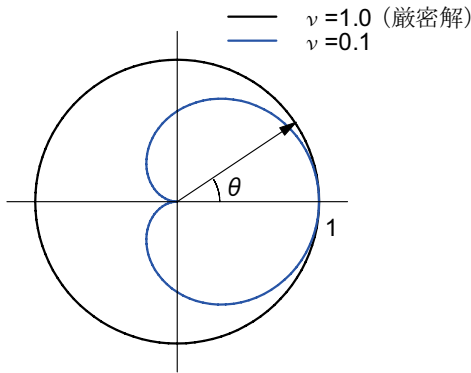


図2 蛙飛び差分スキームの相対位相誤差 $\varphi / \varphi_{exact}$

2. 4. 流体と固体の境界条件

図3に、2次元の場合の変数と格子点の対応を示す。図3の中で、水色の点及び白点は半整数タイムステップでの圧力及び応力を、黒点は整数タイムステップでの粒子速度を表している。図3のように流体と固体が接する場合、その間の境界条件は、境界面に垂直な応力 T_3 と圧力 P が等しくなるように（緑色の点）、境界面に対し垂直方向の流体粒子速度 \dot{w}_f と固体粒子速度 \dot{w}_s が等しくなるように

（青色の点）与える。また、その面のせん断応力 T_5 は 0 とする（赤色の点）。

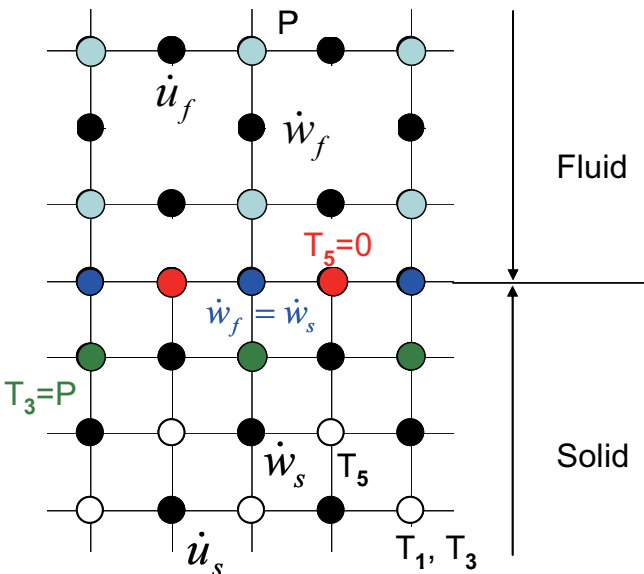


図3 FDTD法による変数とインデックスの対応

2. 5. 吸収境界条件

計算領域の外側境界で不必要な反射を防ぐために、必要に応じた精度の吸収境界条件を適用する。例えば、吸収境界に平行な方向の変化が小さいならば、Murの1次精度吸収境界条件⁵⁾を用いることができる。これは、音速を c で表した圧力に対する1次元波動方程式

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0 \quad (18)$$

を、代数的に因数分解した次式

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) P = 0 \quad (19)$$

から導かれる。即ち、 x 方向のインデックス i の面に吸収境界を設定するならば、そこから負の方向に進行する波が 0 となるように、次式を差分近似した式から境界での圧力を求める。

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (20)$$

式(20)の差分式は、時間インデックス n 、空間インデックス $i-1/2$ で求められるが、FDTD法における圧力 P の時間と空間のインデックスは $n+1/2$ と i なので、両隣の差分式の平均を用いる。具体的には、次式のようにになる。

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_{i-1/2}^n = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_{i-1/2}^{n+1/2} + \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_{i-1/2}^{n-1/2} \right\} \quad (21)$$

$$\approx \frac{1}{2\Delta x} \left(P_i^{n+1/2} - P_{i-1}^{n+1/2} + P_i^{n-1/2} - P_{i-1}^{n-1/2} \right)$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial t} \right)_{i-1/2}^n = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial P}{\partial t} \right)_i^n + \left(\frac{\partial P}{\partial t} \right)_{i-1}^n \right\} \quad (22)$$

$$\approx \frac{1}{2\Delta t} \left(P_i^{n+1/2} - P_i^{n-1/2} + P_{i-1}^{n+1/2} - P_{i-1}^{n-1/2} \right)$$

式(16)と(17)を式(15)に代入し、インデックス $(i, n+1/2)$ における P を求めると、次式のように Mur の 1次精度吸収境界条件式が得られる。

$$P_i^{n+1/2} = P_i^{n-1/2} + \frac{c\Delta t - \Delta x}{c\Delta t + \Delta x} \left(P_{i-1}^{n+1/2} - P_i^{n-1/2} \right) \quad (23)$$

本解析では、平面波の透過を解析対象としており、吸収境界における境界面の接線方向の圧力変化は小さいとみなせるので Mur の 1次精度吸収境界条件を用いた。しかし、球面波の伝播解析など、接線方向の圧力変化が無視できない場合には、Mur の 2次精度吸収境界条件⁵⁾ や PML (Perfectly Matched Layer)⁶⁾ などが一般的に用いられる。

2. 6. 流体と固体の媒質定数

本解析に用いた流体と固体の媒質定数¹⁾を表1に示す。これらは、流体と固体の密度差や縦波の速度差が小さく、波の伝播が解析しやすいなどの理由から選ばれた。

表1 解析に用いた媒質定数

	密度 [kg/m ³]	縦波速度 [m/s]	横波速度 [m/s]
流体(水)	1,000	1,500	
固体(鉄)	7,700	5,850	3,230

3. 解析例

解析例として、流体中の固体壁（解析モデル1）及びハニカムサンドイッチ構造のような中空壁（解析モデル2）を透過する入射正弦波の計算結果を示す。

3. 1. 解析モデル1：固体壁

解析モデル1の形状を図4に示す。図4のモデルの左右の境界には周期境界条件を与え、上下の境界にはMurの1次精度吸収境界条件を与えた。

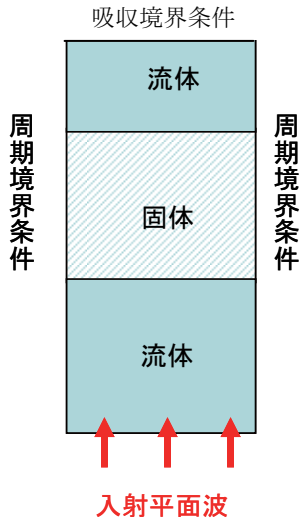


図4 解析モデル1

解析モデル1に対し、固体壁が入射正弦波の波長 λ と比較して十分厚い場合 (7.5λ) と薄い場合 (0.75λ) での、入射波が固体表面で反射計算領域下限近くまで伝播した時刻における応力分布の計算結果を図5に示す。図5の縦軸は z 方向インデックス k を、横軸は x 方向インデックス i を表しており、本解析では $\Delta x = \Delta z$ としているので実形状に等しい。また、図5のカラーマップは、流体部は圧力 P を、固体部は z 方向垂直応力 T_3 をそれぞれ表している。壁厚が波長に対して十分大きい場合、上部の流体部には初期入射波の透過による第1波と、固体内で反射を繰り返して発生する第2波が見られる。これに対し、薄い固体壁では、固体内反射による第2波が見られない。

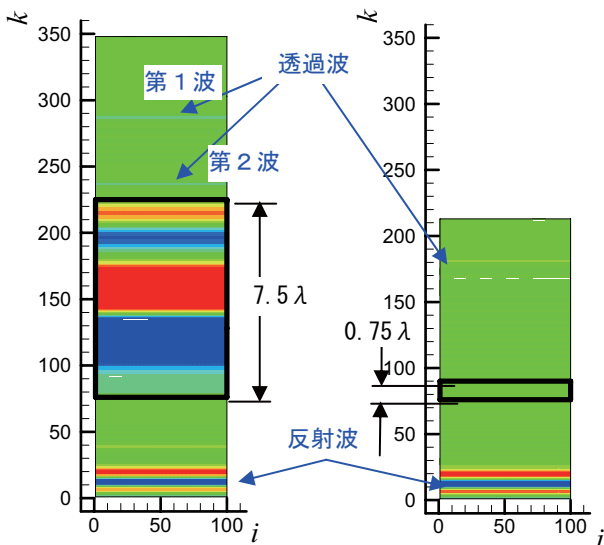


図5 流体・固体内の応力分布 (左：厚さ 7.5λ ，右：厚さ 0.75λ)

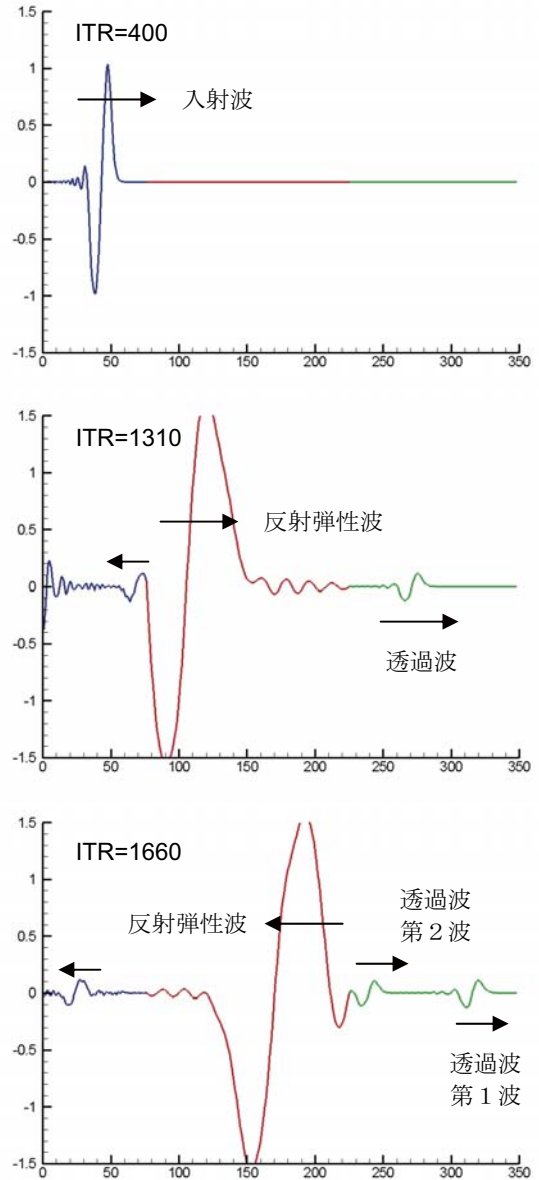


図6 入射波、弾性波、透過波の波形 (厚さ 7.5λ)

壁が厚い場合に対し、解析領域内の x 方向中心線上の応力波形を、時間をずらして図6に表示する。図6の中で、青線は下部流体内の圧力波を、赤線は固体壁内で繰り返して反射される弾性波を、緑線は上部流体へ透過した波を表している。図6上段 (ITR=400) の波形は入射正弦波を表している。波の後方で分散誤差に起因する遅延位相誤差が見られる。これは、2. 3. 節で述べた本解析手法の特徴から生じる位相誤差であり、今回の解析条件の設定上、固体内の弾性波が最も伝播速度が速く、それに合わせてクーラン数を決めているため、流体領域におけるクーラン数が小さくなることに起因する。図6中段 (ITR=1310) の波形から、入射平面波が弾性波となって壁の内部を伝播し、反対側の流体領域に透過波が生じることが分かる。この弾性波は、固体と流体の境界面で反射を繰り返して発生する第2波が生じることが、図6下段 (ITR=1660) の波形から分かる。また、本解析条件では、透過波の振幅は入射波の2割程度にまで減衰していることがこれらの図から分かる。更に、入射波の波長に比べて壁が十分厚い場合、図6下段に緑線で示される波形から、第2波の振幅は第1波と同程度であることが分かる。

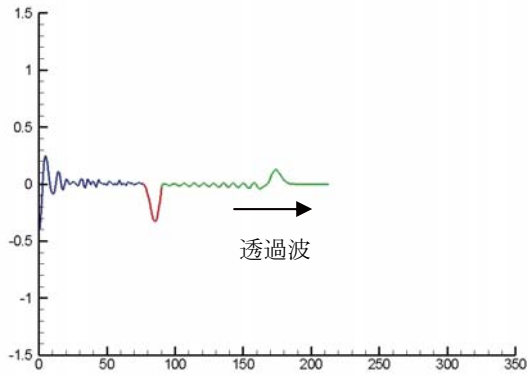


図7 入射波, 弾性波, 透過波の波形 (厚さ 0.75λ)

図6と同様に, 図7に壁が入射波の波長に比べて薄い場合の波形を示す. 図7の波形から, 透過波第1波が生じた後, 固体内の弾性波の繰り返し反射に起因する振幅の小さな波がいくつも見られるが, 第1波と同程度の第2波は生じないことが分かる.

3. 2. 解析モデル2: 中空壁

解析モデル2の模式図を図8に示す. 解析モデル2では, 入射正弦波の波長に対して, 中空壁の外板(S1, S3)の板厚は十分薄く, コア部(S2)は十分長く設定している. これらの解析モデルの流体領域 F1~F4 及び固体領域 S1~S3 は, 計算コード内でマルチブロック化されており, 流体・固体間の境界条件は適切に設定される. なお, 中空壁内部の空間は, 外部の流体と同じ特性を持つ流体で満たされていると仮定している.

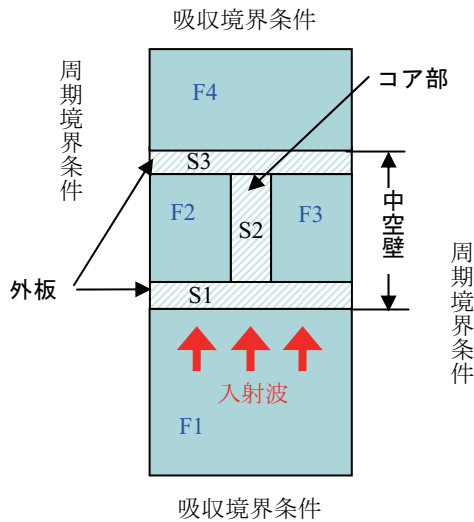


図8 中空壁モデルの模式図

解析モデル2の解析結果から, 特徴的な応力分布を図9に示す. 流体より固体のほうが弾性波の伝播速度が速いので, 中空部を透過する入射波が伝播する間に, コア部を弾性波が繰り返し往復する. 図9の上部流体部に見られる波形は, 図5に見られる平面波とは異なり, コア部を中心として弧を描いて広がり, 左右から来る波と干渉している.

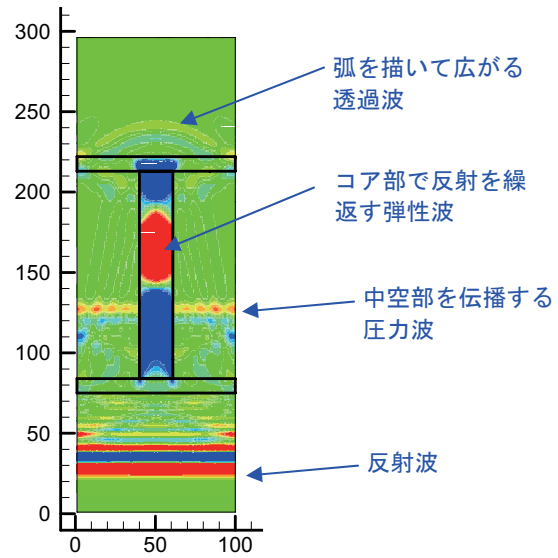


図9 中空壁を透過する弾性波

図10には, 初期 (IT=10) の波源の位置を, 図11にイタレーション 250 回毎の応力分布図をそれぞれ示す. 図11に示されるように, IT=250 から 500 にかけて, 入射波が中空壁に達し, 中空壁内を弾性波と音波が伝播していく様子がとらえられている. その後, IT=750 では弧を描いて広がる透過波が見られ, 左右の周期境界から来る波が干渉して強め合う様子が ITR=1250 の図に見られる. また, 中空部を伝播する音波は, ITR=1250 から 1500 にかけて外板 S3 の内壁で反射した後, 下方に伝播する. その間, コア部を伝播する弾性波は反射を繰り返し, 上部流体領域 F4 に複雑な透過波の波形を作っている.

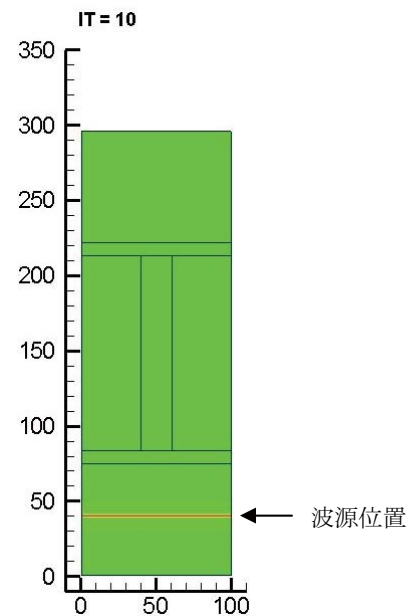


図10 初期波源の位置

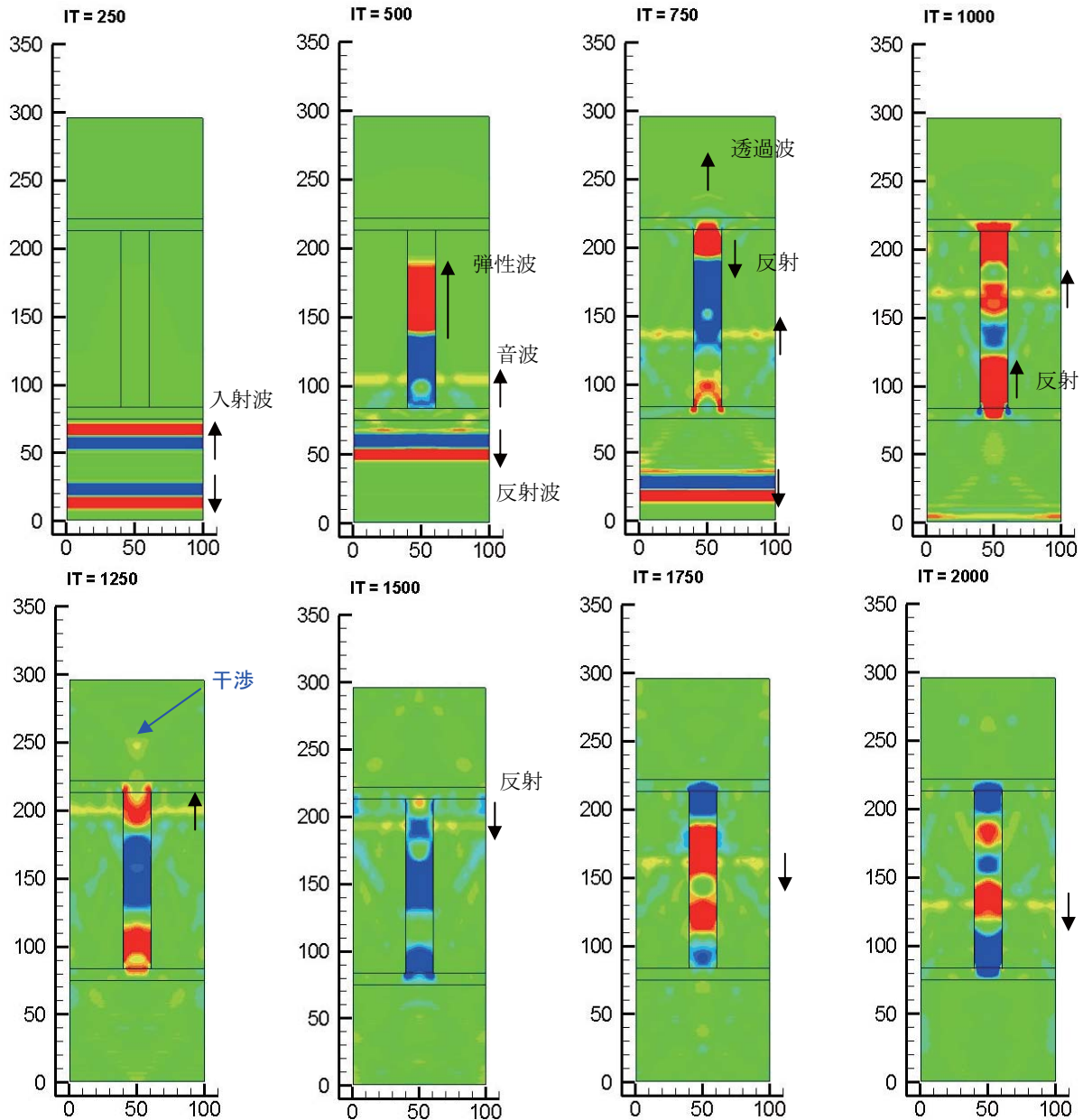


図 1 1 時系列応力分布

4. まとめ

音響透過解析技術研究の第1段階として、FDTD法を用いた流体・固体中の弾性波伝播を解析する2次元マルチブロックコードを作製し、固体壁及びハニカム構造のような中空部を有する構造内の弾性波伝播解析に適用した。その結果、入射波の波長に対して厚い固体壁の場合、固体壁内で反射を繰り返す弾性波による透過波第2波が、第1波と同程度の大きさで生じることが分かった。一方、薄い固体壁の場合には、第1波と同程度の強い第2波は見られなかった。また、固体壁と異なり中空壁では、壁を透過した後の弾性波が、流体部で、コア部を中心に弧を描いて伝播し、お互いに干渉する様子がとらえられた。

今後の課題として、

- 流体領域の散逸誤差の改善
- 透過損失などの実験データとの比較による検証
- 実際の3次元ハニカム形状への適用
 - フェアリングなどの一般形状への適用
 - 非常に薄い外板やコア部のモデル化

などが挙げられる。

参考文献

- 1) 佐藤正弘：FDTD法による弾性振動・波動の解析入門，森北出版，2003.
- 2) 佐藤正弘，高橋洋祐：弾性波動のスカラー・ベクトル速度ポテンシャルによる表示，音響学会誌，Vol. 56, No. 11, pp.741-745, 2000.
- 3) Charles Hirsh: Numerical Computation of Internal and External flows, Volume 1, JHON WILEY & SONS, 1989.
- 4) 藤井孝藏：流体力学の数値計算法，東京大学出版会，1994.
- 5) G. Mur, "Absorbing boundary condition for the finite-difference approximation of the time-domain electromagnetic-field equations," IEEE Transactions on EMC, Vol. 23, pp. 377-382, 1981.
- 6) J. P. Berenger, "A perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves," J. Comp. Phys. Vol. 114, pp. 185-200, 1994.