

# 搭載宇宙機の音響構造連成解析手法に関する研究

高橋 孝、村上桂一、青山剛史、相曽秀昭

宇宙航空研究開発機構 総合技術研究本部 計算科学研究グループ

## Study on Coupled Structural-Acoustic Analysis for Spacecraft

by

Takashi Takahashi, Keiichi Murakami, Takashi Aoyama, and Hideaki Aiso (JAXA)

### ABSTRACT

This paper focuses on numerical prediction approaches for steady-state coupled interior vibro-acoustic problems, especially for spacecraft structural vibrations by acoustic loads with the wide frequency range acted during the liftoff. Lightweight and large area structures, such as solar arrays and antenna dishes, and some components with relatively high natural frequencies are sensitive to acoustic loads. Numerical prediction of vibro-acoustic responses enables us to partially cover the ground acoustic tests, and is therefore quite important to design and develop reliable spacecraft. For spacecraft vibro-acoustic simulations, there are deterministic prediction techniques such as finite element method (FEM) and boundary element method (BEM) applicable in the low frequency range, and statistical ones such as statistical energy analysis (SEA) in the high frequency range. However, there generally exists mid-frequency range where no mature numerical methods are applicable. In this paper, a novel deterministic prediction method called the wave based method (WBM) is applied to obtain detailed responses in vibro-acoustic analysis of spacecraft. Then we consider two simple models, an uncoupled acoustic model with a single cavity, and a coupled vibro-acoustic model with a spacecraft and a payload fairing. Using a 2-dimensional WBM code developed in this study and commercial FEM software, these models are solved to compare the results. The results show that FEM is limited to apply in low frequency range, and WBM is quite practical and has high potential for the vibro-acoustic analysis with the wide frequency range.

### 1. はじめに

ロケット打上げ時の轟音は、フェアリング内に搭載された宇宙機に大きな影響を与える<sup>1)</sup>。宇宙機の音響振動を解析により予測できれば、地上試験では考慮できない影響まで検討することが可能となり、信頼性の高い宇宙機の設計・開発に寄与できると考えられる。本論文では、ロケットのフェアリング内に搭載された宇宙機の音響振動を予測するための内部定常音響構造連成問題の解析手法に焦点をあてる。

従来、統計的エネルギー法(SEA: Statistical Energy Analysis)<sup>2)</sup>が、宇宙機の音響振動を予測するために適用されてきた<sup>3), 4)</sup>。一般に、個々の構造振動モードがもはや区別できないほどの高周波帯では、材料特性や寸法などの微小な違いで応答が大きく変化してしまう。そのような場合、決定論的手法よりもむしろ確率統計的なSEAが適する。「フィル・エフェクト」(fill effect/fill factor)と呼ばれるフェアリング内の局所的な音圧レベル(SPL: Sound Pressure Level)の変化に関する簡易評価式も、SEAの考え方に基いて与えられている<sup>5)</sup>。しかし、SEAはあくまで空間的・周波数的に平均的な値を扱う手法であり、共振ピークのような局所的な応答を予測することはできない。さらに、解析周波数が低くなるほど、予測精度が低くなる。一方、音響や構造などの局所的な応答を解析できる決定論的手法である有限要素法(FEM: Finite Element Method)<sup>6)</sup>は、現状、宇宙機の構造解析において、100Hz以下程度の低周波領域における解析に適用されるほぼ唯一の手法である<sup>7)</sup>。宇宙機の音響振動解析においても、いくつかの単純な構造に対して適用されている<sup>8), 9)</sup>。しかし、解析周波数が高くなると数値分散誤差(numerical dispersion error)が補間誤差(interpolation error)に比べて支配的となり、それを許容範囲内に収めるためには解析の自由度が爆発的に大きくなるという問題がある<sup>1)</sup>。

一般に、高周波側の手法(SEAなど)と低周波側の手法(FEMなど)のいずれの手法でも信頼性の高い解析のできない周波数領域(中間周波数領域(mid-frequency range))が存在すると指摘されている<sup>10)</sup>。既存のアプローチを高度化したり、新たな手法を提案したりして、この狭間を埋め

るために多くの研究がなされてきているのが現状である。図1に、既存の音響振動解析手法により解析可能な周波数領域の比較と、対応する宇宙機の固有振動数を示す。宇宙機にとって重要な点は、この中間周波数領域に、宇宙機の音響設計に関してクリティカルな搭載機器の固有振動数が含まれることである。

そこで、本論文では、共振ピークなどの局所的な応答を解析できる決定論的な手法であり、FEMなどの既存の手法の欠点を克服するために提案された波動ベース法(WBM: Wave Based Method)<sup>10)</sup>に着目する。この手法を、解析周波数領域の広い宇宙機の2次元定常音響振動解析に適用することにより、モデル化の容易さや計算負荷などの性質、実用性について検討する。

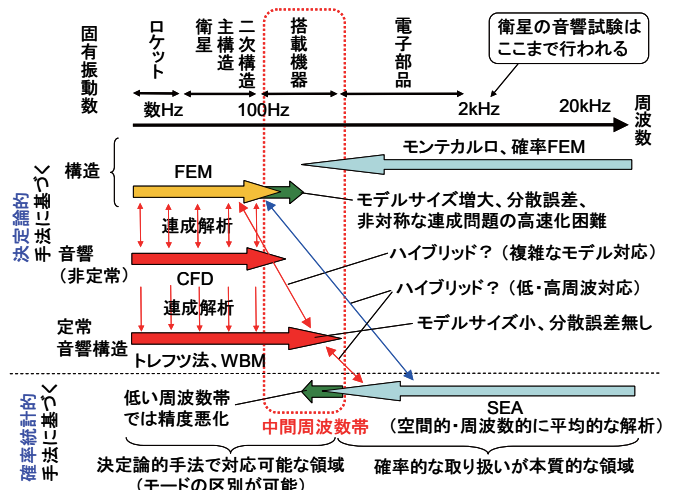


図1 音響振動解析手法の比較

### 2. 波動ベース法

WBMは、間接トレフツ法(indirect Trefftz method)<sup>11)</sup>に基づく定常音響構造連成解析のための決定論的手法である。適当な波動関数を定義することにより、トレフツ法の実装時に生じる悪条件問題(ill-conditioned problem)を克服したブ

レークスルー的な手法である。この手法の注目すべき性質は、支配方程式を厳密に満たす波動関数で解を展開するために空間を離散化する必要がなく（メッシュが不要）、それに伴って、FEM 等による音響振動解析で問題となる数値分散誤差がないということである。したがって、広い解析周波数領域を含む音響振動を予測するためのポテンシャルが極めて高いと考えられる。

## 2. 1. 問題定義

本節では、WBM を用いた 2 次元内部定常音響振動問題について述べる。図 2 は、いくつか種類の境界に囲まれた流体から成る音響キャビティを示している。まず、後述する WBM の波動関数の性質から、このキャビティ領域をいくつかの凸領域に分割する必要がある。定式化を簡単化するため、キャビティは、2 つの凸部分領域  $\Omega^{(e)}$  ( $e = 1, 2$ ) から構成されているものとする。各部分領域  $\Omega^{(e)}$  は、 $L_x^{(e)} \times L_y^{(e)}$  の外接する矩形領域を有する。 $\Omega^{(e)}$  の音響境界  $\Gamma_a^{(e)}$  は、5 種類の境界面から成る。つまり、 $\Gamma_a^{(e)} = \Gamma_p^{(e)} \cup \Gamma_v^{(e)} \cup \Gamma_z^{(e)} \cup \Gamma_s^{(e)} \cup \Gamma_c^{(e,f)}$  ( $f$  は、 $\Omega^{(e)}$  と隣接する部分領域の番号) である。ここで、 $\Gamma_p^{(e)}$ 、 $\Gamma_v^{(e)}$ 、 $\Gamma_z^{(e)}$  は、それぞれ、圧力、法線方向速度、法線方向インピーダンスの境界条件 (BC) が課される境界面である。 $\Gamma_s^{(e)}$  は、薄い平板を境界とする面であり、板の両端には固定や単純支持などの BC が課される。平板は、紙面に垂直に無限の長さをもつ幅  $L_s$  ( $s = 1, 2$ ) の平板であると仮定し、簡単のため、系に含まれる境界上の平板は各部分領域に 1 つずつあるとする。 $\Gamma_c^{(e,f)}$  ( $\Gamma_c^{(1,2)} = \Gamma_c^{(2,1)}$ ) は、部分領域  $\Omega^{(1)}$  と  $\Omega^{(2)}$  の間の境界面であり、圧力と法線方向速度の両方の連続性条件が課される。さらに、外力  $f_s$  を、 $\Gamma_s^{(e)}$  上の局所位置  $\mathbf{r}'_s$  に作用させ、外部点音源  $q^{(e)}$  を、 $\Omega^{(e)}$  内の局所位置  $\mathbf{r}_q^{(e)}$  に置く。簡単のため、平板に働く外力は各平板において 1 ヶ所だけであるとし、音源は各部分領域に 1 つずつ存在するとする。また、ここでは定常（周波数）解析を考えているので、両外部励振源は、周波数  $\omega$  の時間調和関数であると仮定する。

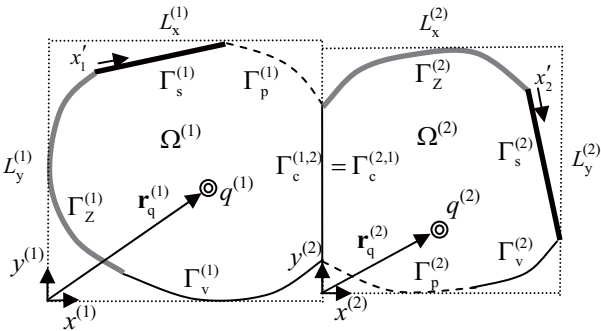


図 2 2 次元内部音響振動連成モデル

## 2. 2. 音響の支配方程式と変数展開式

部分領域  $\Omega^{(e)}$  の絶対位置  $\mathbf{r}$  における定常音圧  $p^{(e)}(\mathbf{r})$  は、次式のヘルムホルツ方程式 (Helmholtz equations) により支配される。

$$\nabla^2 p^{(e)}(\mathbf{r}) + k^2 p^{(e)}(\mathbf{r}) = -j\rho\omega q^{(e)}\delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}_q^{(e)}) \quad (1)$$

ここで、 $k = \omega/c$  ( $c$  は音速) は音響波数であり、 $\delta$  はディラックのデルタ関数、 $j = \sqrt{-1}$  は虚数単位である。WBM の定式化では、音圧  $p^{(e)}(\mathbf{r})$  を次式のように展開する。

$$p^{(e)}(\mathbf{r}) \approx \hat{p}^{(e)}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\phi}_a^{(e)}(\mathbf{r})^T \mathbf{p}_a^{(e)} + \hat{p}_q^{(e)}(\mathbf{r}) \quad (2)$$

ここで、 $\boldsymbol{\phi}_a^{(e)}(\mathbf{r})$  は方程式 (1) の同次式を厳密に満たす音響波動関数 (acoustic wave functions) から成るベクトルであり、 $\mathbf{r}^{(e)} = [x^{(e)} y^{(e)}]^T$  は絶対位置  $\mathbf{r}$  を部分領域  $\Omega^{(e)}$  において定義された局所座標系からみたときの局所位置ベクトル、 $\mathbf{p}_a^{(e)}$  は波動関数の寄与分を表す未知のベクトル、 $\mathbf{T}$  は行列の転置を表す。関数  $\hat{p}_q^{(e)}(\mathbf{r})$  は方程式 (1) の右辺の外部音源項を考慮したときの特解の 1 つであり、次式で与えられる。

$$\hat{p}_q^{(e)}(\mathbf{r}) = \frac{\rho_0 \omega}{4} Q^{(e)} H_0^{(2)}(k \|\mathbf{r}^{(e)} - \mathbf{r}_q^{(e)}\|) \quad (3)$$

$H_i^{(2)}(\bullet)$  は  $i$  次の第 2 種ハンケル関数である。 $Q^{(e)}$  は音源強さであり、次式で定義される。

$$Q^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} q^{(e)} d\Omega \quad (4)$$

また、ベクトル  $\boldsymbol{\phi}_a^{(e)}(\mathbf{r})$  の成分である各音響波動関数は次式のように定義される。

$$\phi_{ai}^{(e)}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \phi_{ari}^{(e)}(\mathbf{r}) = \cos(k_{xri}^{(e)} x^{(e)}) e^{-jk_{yri}^{(e)} y^{(e)}} \\ \phi_{asi}^{(e)}(\mathbf{r}) = e^{-jk_{xsi}^{(e)} x^{(e)}} \cos(k_{ysi}^{(e)} y^{(e)}) \end{cases} \quad (5)$$

この波動関数が、方程式 (1) の厳密解であるためには、

$$(k_{xri}^{(e)})^2 + (k_{yri}^{(e)})^2 = (k_{xsi}^{(e)})^2 + (k_{ysi}^{(e)})^2 = k^2 \quad (6)$$

であることが要求され、次の波数成分を選択することが提案されている。

$$(k_{xri}^{(e)}, k_{yri}^{(e)}) = \left( \frac{i_r^{(e)} \pi}{L_x^{(e)}}, \pm \sqrt{k^2 - (k_{xri}^{(e)})^2} \right) \quad (7-a)$$

$$(k_{xsi}^{(e)}, k_{ysi}^{(e)}) = \left( \pm \sqrt{k^2 - (k_{ysi}^{(e)})^2}, \frac{i_s^{(e)} \pi}{L_y^{(e)}} \right) \quad (7-b)$$

ここで、 $i_r^{(e)}, i_s^{(e)} = 0, 1, 2, \dots$  である。これらは、数値的な悪条件を緩和するために実装上は正規化され、さらに、物理的な波数や外接矩形領域のサイズに基づいて有限次元に打ち切られる。この波動関数を用いた展開式が厳密解に収束するための十分条件は、全ての部分領域が凸であるということが示されている<sup>11)</sup>。

## 2. 3. 構造の支配方程式と変数展開式

一方、 $\Gamma_s^{(e)}$  に属する板の局所位置  $\mathbf{r}'_s$  における定常法線方向変位  $w_s(\mathbf{r}'_s)$  は、次式の薄い平板の面外曲げの方程式であるキルヒホッフ方程式 (Kirchhoff equations) により支配される。

$$\frac{d^4 w_s(x'_s)}{dx_s'^4} - k_{bs}^4 w_s = \frac{f_s}{D_s} \delta(x'_s, x'_{fs}) + \frac{p^{(e)}(\mathbf{r}_s)}{D_s} \quad (8)$$

ここで、 $k_{bs}$ は構造波数、 $D_s$ は曲げ剛性であり、それぞれ次のように定義される。

$$k_{bs} = \sqrt[4]{\frac{\rho_s t_s \omega^2}{D_s}} \quad (9)$$

$$D_s = \frac{E_s t_s^3 (1 + j\eta_s)}{12(1 - \nu_s^2)} \quad (10)$$

$t_s$ は板厚、 $\rho_s$ は密度、 $E_s$ は弾性係数、 $\nu_s$ はポアソン比、 $\eta_s$ は減衰係数である。WBMの定式化では、構造変位  $w_s(x'_s)$  を次式のように展開する。

$$w_s(x'_s) \approx \hat{w}_s(x'_s) = \boldsymbol{\psi}_s(x'_s)^T \mathbf{w}_s + \hat{w}_{fs}(x'_s) + \hat{\mathbf{w}}_{as}^{(e)}(x'_s)^T \mathbf{p}_a^{(e)} + \hat{w}_{qs}^{(e)}(x'_s) \quad (11)$$

$\boldsymbol{\psi}_s(x'_s)$ は、方程式(8)の同次式を厳密に満たす次式の4つの構造波動関数(structural wave function)  $\psi_{si}(x'_s)$  から成るベクトルである。

$$\psi_{si}(x'_s) = e^{-j^i k_{bs} x'_s} \quad (i=1, \dots, 4) \quad (12)$$

この関数も、音響波動関数と同様に実装上是正規化される。また、 $\hat{w}_{fs}(x'_s)$ は、方程式(8)の外力による励振を考慮したときの特解の1つであり、次式で定義される。

$$\hat{w}_{fs}(x'_s) = -\frac{1}{4D_s k_{bs}^3} f_s \left( j e^{-jk_{bs}|x'_s - x'_{fs}|} + e^{-k_{bs}|x'_s - x'_{fs}|} \right) \quad (13)$$

$\hat{\mathbf{w}}_{as}^{(e)}(x'_s)$ は、音響波動関数と関連し、次式で定義される方程式(8)の音圧項を考慮したときの特解  $\hat{w}_{asi}^{(e)}(x'_s)$  を要素にもつベクトルである。

$$\hat{w}_{asi}^{(e)}(x'_s) = -\frac{1}{4D_s k_{bs}^3} \times \int_0^{L_s} \phi_{ai}^{(e)}(\mathbf{r}_{ss}^{(e)}(\xi)) \left( j e^{-jk_{bs}|x'_s - \xi|} + e^{-k_{bs}|x'_s - \xi|} \right) d\xi \quad (14)$$

さらに、関数  $\hat{w}_{qs}^{(e)}(x'_s)$  は、外部音源に関連した方程式(8)の音圧項を考慮したときの特解の1つであり、次式で定義される。

$$\hat{w}_{qs}^{(e)}(x'_s) = -\frac{\rho_0 \omega}{16D_s k_{bs}^3} Q^{(e)} \times \int_0^{L_s} H_0^{(2)}(k \|\mathbf{r}_{ss}^{(e)}(\xi) - \mathbf{r}_q^{(e)}\|) \left( j e^{-jk_{bs}|x'_s - \xi|} + e^{-k_{bs}|x'_s - \xi|} \right) d\xi \quad (15)$$

以上の定義から、支配方程式(1)と(8)に含まれる変数の展開式(2)と(11)は、支配方程式を厳密に満たす。これは、WBMにより得られる数値変数には数値分散誤差が含まれないことを表しており、広い周波数領域を有する音響振動応答を予測するために非常に重要な性質である。

## 2. 4. 重み付き残差法による定式化

変数の展開式(2)と(11)における未知数である、波動関数の寄与分を表す係数  $\mathbf{p}_a^{(e)}$  と  $\mathbf{w}_s$  を決めるため、音響 BC に重み付き残差法(weighted residual method)を適用する。つまり、支配方程式は厳密に満たされるが、BC は積分の意味で近似的に満たされることになる。FEMにおけるガラーキン法と同様にして、重み関数  $\tilde{p}^{(e)}(\mathbf{r})$  を次式のように音響波動関数を用いて展開する。

$$\tilde{p}^{(e)}(\mathbf{r}) = \tilde{\mathbf{p}}_a^{(e)T} \boldsymbol{\phi}_a^{(e)}(\mathbf{r}^{(e)}) = \boldsymbol{\phi}_a^{(e)}(\mathbf{r}^{(e)})^T \tilde{\mathbf{p}}_a^{(e)} \quad (16)$$

関数  $\tilde{p}^{(e)}(\mathbf{r})$  を用いれば、2つの凸部分領域  $\Omega^{(e)}$  に関する音響 BC に関する重み付き残差式が、次のように導出できる。

$$\int_{\Gamma_v^{(e)}} \tilde{p}^{(e)} R_v^{(e)} d\Gamma + \int_{\Gamma_z^{(e)}} \tilde{p}^{(e)} R_z^{(e)} d\Gamma + \int_{\Gamma_s^{(e)}} \tilde{p}^{(e)} R_s^{(e)} d\Gamma - \int_{\Gamma_p^{(e)}} \mathcal{L}_v^{(e)}(\tilde{p}^{(e)}) R_p^{(e)} d\Gamma + \int_{\Gamma_c^{(e)}} \tilde{p}^{(e)} R_c^{(e)} d\Gamma = 0 \quad (17)$$

ここで、 $R_v^{(e)}$ 、 $R_z^{(e)}$ 、 $R_s^{(e)}$ 、 $R_p^{(e)}$ 、 $R_c^{(e)}$  は、BC の理論式と式(2)と(11)で展開した変数を用いたときの計算式との差として定義される残差誤差であり、 $\mathcal{L}_v^{(e)}(\bullet)$  は法線方向微分を表す  $\frac{\partial \bullet}{\partial n^{(e)}}$  を用いた速度演算子  $\mathcal{L}_v^{(e)}(\bullet) = \frac{j}{\rho_0 \omega} \frac{\partial \bullet}{\partial n^{(e)}}$  で

ある。部分領域  $\Omega^{(1)}$  と  $\Omega^{(2)}$  のインターフェイス面においては、単純に圧力と法線方向速度の両方の連続性条件を課す直接連成手法が従来用いられてきたが、解析周波数が共鳴周波数と一致した場合に計算の収束速度が低下、あるいは発散するという問題があった。この問題を回避して計算の安定化と高速化を図るために、人工粘性を導入したインピーダンス連成手法<sup>12)</sup>が提案されており、一般的にはこの手法を用いるべきである。次に、音響 BC の重み付き残差式である式(17)を未知係数  $\mathbf{p}_a^{(e)}$  と  $\mathbf{w}_s$  に関して整理すると、

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{as1}^{(1)} & \mathbf{C}_{as2}^{(1)} & \mathbf{A}_a^{(1)} & \mathbf{C}_a^{(1,2)} \\ \mathbf{C}_{as1}^{(2)} & \mathbf{C}_{as2}^{(2)} & \mathbf{C}_a^{(2,1)} & \mathbf{A}_a^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_2 \\ \mathbf{p}_a^{(1)} \\ \mathbf{p}_a^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_a^{(1)} \\ \mathbf{f}_a^{(2)} \end{bmatrix} \quad (18)$$

のような形式の行列方程式を得る。各部分行列を得るためには数値積分を行う必要があり、この計算を効率的に行うことが WBM の計算負荷低減に大きく効いてくる。本論文では、FEMでも利用されている Gauss-Legendre 積分法<sup>5)</sup>を用いている。WBMでは、波動関数という大域的に定義された基底関数を利用するため、FEMに比べて多くの積分点を必要とする。そのため、任意の個数の Gauss 点に対応したルーチンを準備する必要がある。

一方、 $\Gamma_s^{(e)}$  の構造 BC として、固定、単純支持、自由、対称条件などが課される。例えば、固定 BC は次式で与えられる。

$$w_s(0) = w_s(L_s) = \frac{dw_s(0)}{dx_s'} = \frac{dw_s(L_s)}{dx_s'} = 0 \quad (19)$$

この式に展開式(11)を代入することにより、未知係数  $\mathbf{p}_a^{(e)}$  と  $\mathbf{w}_s$  に関する代数方程式が次式のように得られる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{s1} & \mathbf{O} & \mathbf{C}_{sa1}^{(1)} & \mathbf{C}_{sa1}^{(2)} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_{s2} & \mathbf{C}_{sa2}^{(1)} & \mathbf{C}_{sa2}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_2 \\ \mathbf{p}_a^{(1)} \\ \mathbf{p}_a^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{s1} \\ \mathbf{f}_{s2} \end{bmatrix} \quad (20)$$

最後に、音響 BC から得られた代数方程式(18)と、構造 BC から得られた代数方程式(20)を組み合わせることにより、最終的に、WBM モデルが次式のような行列形式で書ける。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{s1} & \mathbf{O} & \mathbf{C}_{sa1}^{(1)} & \mathbf{C}_{sa1}^{(2)} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_{s2} & \mathbf{C}_{sa2}^{(1)} & \mathbf{C}_{sa2}^{(2)} \\ \mathbf{C}_{as1}^{(1)} & \mathbf{C}_{as2}^{(1)} & \mathbf{A}_a^{(1)} & \mathbf{C}_a^{(1,2)} \\ \mathbf{C}_{as1}^{(2)} & \mathbf{C}_{as2}^{(2)} & \mathbf{C}_a^{(2,1)} & \mathbf{A}_a^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_2 \\ \mathbf{p}_a^{(1)} \\ \mathbf{p}_a^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{s1} \\ \mathbf{f}_{s2} \\ \mathbf{f}_a^{(1)} \\ \mathbf{f}_a^{(2)} \end{bmatrix} \quad (21)$$

この方程式には、部分領域間の連続性を表すためと、音響と構造の連成を表すための非対角行列が含まれていることが分かる。また、WBM における音響と構造との間の連成が、マトリクス連成であると解釈することもできる。

### 3. 解析例

前節で述べた理論に基づき、2次元 WBM 解析コードを MATLAB<sup>®</sup>(13)で実装した。定式化を簡単化するために前節で用いた仮定を一般化することは単純であり、本コードは、任意の個数の平板や凸部分領域などに対応できるように汎用化している。

以下にいくつか数値解析例を示し、主に既存の FEM と WBM の解析結果を比較することにより WBM の特徴を明らかにする。

#### 3. 1. 非連成音響問題

図3に示すような簡単な2次元凸領域の音響キャビティを考える。キャビティは空気（密度  $\rho_a = 1.225 \text{ [kg/m}^3]$ 、音速  $c = 340 \text{ [m/sec]}$ ）で満たされており、構造要素を含まないので非連成音響問題として扱うことができる。左端面の面に  $1 \text{ [Pa]}$  の圧力 BC を課し、その他の面は剛体壁とする。

この問題を FEM で解くためには、問題領域をメッシュに分割する必要がある。FEM には、主に補間誤差と数値分散誤差が含まれるので、これらを許容範囲内に収めるようにメッシュを切ることとする。まず、低周波領域において支配的な補間誤差を許容範囲内に収めるためには、

$$\theta = \left( \frac{\tilde{k}h}{p} \right)^p = C_{\text{int}} \quad (22)$$

を満たす必要がある<sup>14)</sup>。ここで、 $p$  は多項式形状関数の次数、 $C_{\text{int}}$  は定数、 $L$  を問題寸法、 $k$  を応答の波数、 $h$  を要素サイズとして、無次元量  $\tilde{k} = Lk$ 、 $\tilde{h} = h/L$  と定義する。さらに、高い周波数領域において支配的となる数値分散誤差を許容範囲内に収めるためには、

$$\tilde{k}\theta^2 = C_{\text{dis}} \quad (23)$$

を満たす必要がある<sup>14)</sup>。ここで、 $C_{\text{dis}}$  は定数である。 $C_{\text{int}} = C_{\text{dis}} = 1$  として、解析周波数  $800 \text{ [Hz]}$  まで上記の誤差を許

容範囲に保つように1次矩形要素でメッシュを切る。式(22)を用いて補間誤差を許容範囲内に保つようにメッシュを切ったモデルが図3(a)（粗 FE モデル：326 節点、291 要素）であり、式(23)を用いて数値分散誤差を許容範囲内に収めるようにメッシュを切ったモデルが図3(b)（精 FE モデル：7,870 節点、7,706 要素）である。数値分散誤差を許容範囲内に収めるための式(23)からは、補間誤差の場合のような、応答波長の少なくとも何分の1のサイズでメッシュを切ればよいという単純な指標が得られない<sup>15)</sup>ことに注意したい。FEM の解析には、ANSYS<sup>®</sup>(16)を用いた。

一方、WBM では、問題領域を凸領域に分割するだけでよので、この問題に関しては領域分割を必要としない。式(21)（ここでは構造に関係する部分を除いた式を考える）に含まれる部分行列を得るために数値積分するので、そのために境界上の任意の点（積分点）で BC と法線ベクトルが定義できるような幾何情報が用意できればよい。

以上より、この問題を WBM と FEM を用いて解き、図3に示した観測点における圧力スペクトルを周波数領域で比較した結果が図4である。周波数の低い領域では、WBM と精粗の両 FE モデルの結果はほぼ一致しているが、周波数が高くなると、粗 FE モデルを用いて得られた共鳴ピークの周波数が高周波側へずれている。粗 FE モデルは、数値分散誤差を考慮していないので、この共鳴周波数のずれが数値分散誤差の影響であることが分かる。FEM では、このような共鳴周波数のずれを生じなくするために数値分散誤差を許容範囲内に収める必要があり、それによってメッシュが非常に細くなり、解析自由度が爆発的に大きくなってしまふ。3次元解析では、問題はさらに深刻である。

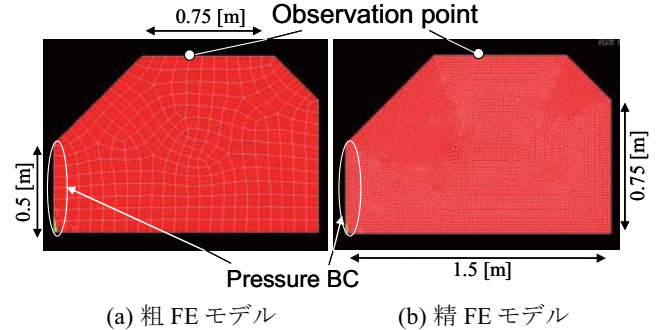


図3 2次元非連成音響問題の FE モデル

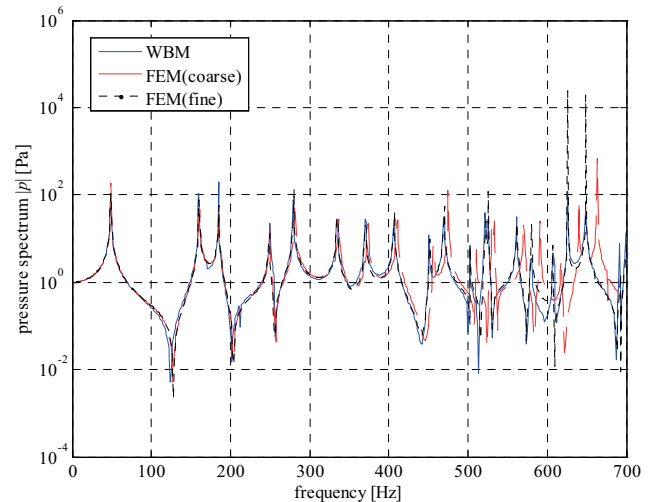


図4 FEM と WBM による圧力スペクトルの比較



### 3. 2. 搭載宇宙機の音響構造連成解析

宇宙機の音響振動解析における構造と音響の連成の影響を調べるために、図5に示すような単純な剛体宇宙機モデル(CASE A)と、柔軟宇宙機モデル(CASE B)を構築する。フェアリング内は空気で満たされているものとする。また、CASE Bのモデルは、5つの両端固定の平板(アルミ板:  $\rho_s = 2,790 \text{ [kg/m}^3]$ ,  $t_s = 2 \text{ [mm]}$ ,  $E_s = 70 \times 10^9 \text{ [N/m}^2]$ ,  $\nu_s = 0.3$ ,  $\eta_s = 0.05$ )から構成される。図6に示す SPL は、実際には、ロケット打上げ時のフェアリング内を拡散音場と仮定したときのデータであり、地上音響試験で用いられるものであるが、本数値解析例では、簡単のためこのデータをフェアリング内壁の圧力 BC として用いた。

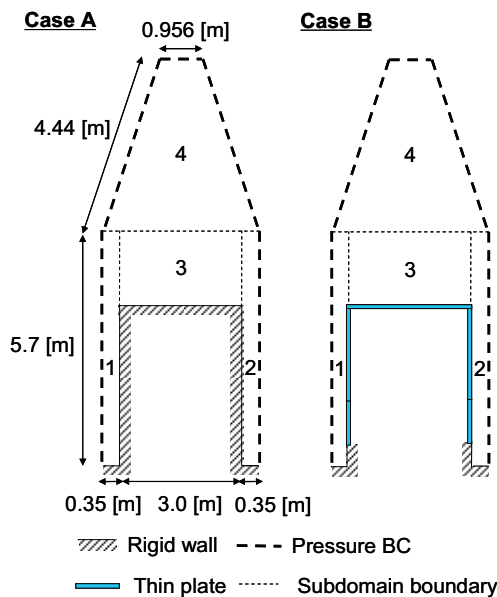


図5 フェアリング内宇宙機の音響振動解析モデル  
(モデル内部の数字は部分領域番号)

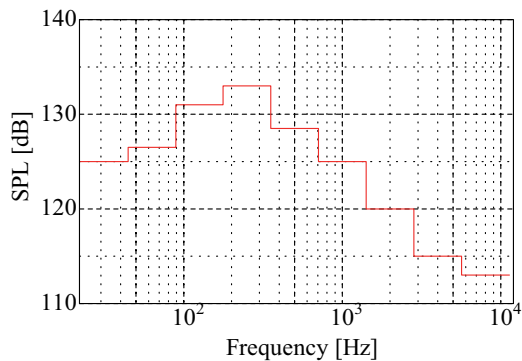


図6 入力音圧レベル

作成した WBM 解析コードを図5のモデルに適用したときの定常音響振動解析(周波数解析)の結果を図7と図8に示す。図7は、励振周波数が20 [Hz]と1 [kHz]のときのCASE AとCASE Bのフェアリング内音場を比較したものである。明らかに音場が構造振動に影響しており、WBMにより音響振動連成問題が解けていることを示している。また、図8は、通常、地上音響試験の最終的な出力である宇宙機の構造応答の加速度パワースペクトル密度関数(加速度 PSD)  $\eta$  を、2 [kHz]まで1 [Hz] 刻みで計算した結果を示している。WBMの決定論的な性質により、SEA

では得られない共振ピークが広い周波数帯に渡って計算できていることが分かる。

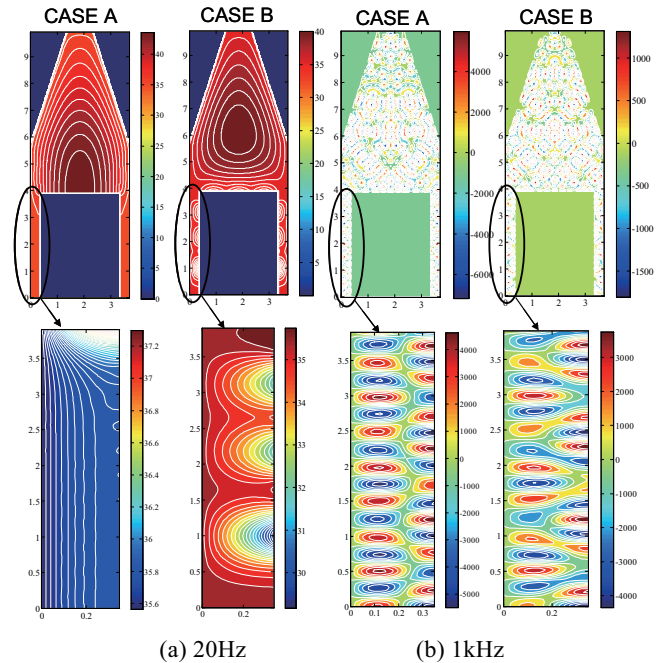


図7 特定の周波数における音圧分布

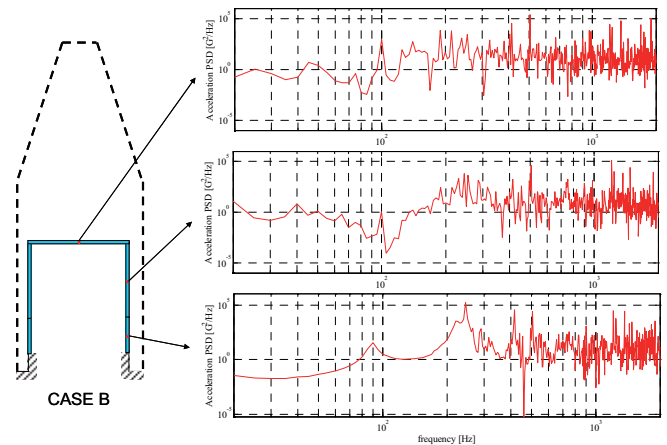


図8 音響による宇宙機構造応答(加速度 PSD)

次に、同じ問題を FEM を用いて解くことを考える。前節の非連成音響問題と同様に、補間誤差と数値分散誤差を許容範囲内に収めるように、最大解析周波数を500 [Hz]に設定して、それぞれ、粗 FE モデル(12,832 要素、13,301 節点)と精 FE モデル(167,361 要素、170,141 節点)を構築した。図9に粗 FE モデルを示す。FEMとWBMの解析結果を比較するために、図9に示すような宇宙機構造上の観測点における構造の加速度 PSD を計算した結果を図10に示す。計算は1 [Hz]刻みで行っている。

FE モデルでは、解析ツール(ANSYS)の制約上、構造をソリッド要素でモデル化しているのに対して、WBMでは平板の面外曲げのみを考慮している。そのため、精 FE モデルと WBM の結果が完全に一致しているわけではないが、前節の非連成音響問題と同様に、粗 FE モデルを用いて得られた共鳴ピークの周波数が、高い周波数ほど高周波側へずれる傾向が現れている。

また、WB モデルの解析自由度（波動関数の数）は周波数依存で、周波数が高くなるほど多くの自由度が必要となる。この問題の場合、解析周波数領域の最大周波数である 500 [Hz] において最大で 1,040 個の音響波動関数、20 個の構造波動関数、3,642 個の積分点を必要とした。これらの数は周波数が低くなるほど少なくなる。一方、FE モデルの解析自由度（節点における未知数の数）は周波数に依存せず一定であるが、特に数値分散誤差を考慮した場合の解析自由度は、WB モデルの最大自由度よりも桁違いに大きい。実際、Intel Xeon 3.20 [GHz] の CPU を 1 個とメモリ 2 [GB] を搭載した計算機を利用して、WB モデルを用いた場合、500 [Hz] において計算時間が最大で約 2 分程度かかり、それより小さな周波数では数秒から数 10 秒で計算できる。それに対して、精 FE モデルを用いた場合、解析する全ての周波数においてそれぞれ約 5 分程度かかってしまう。したがって、トータルの解析時間は、解析する周波数のケース数（解析する周波数の範囲とその間の周波数分解能）に依存して非常に大きな差となる。3 次元解析にすれば、その差はさらに大きくなると予想できる。

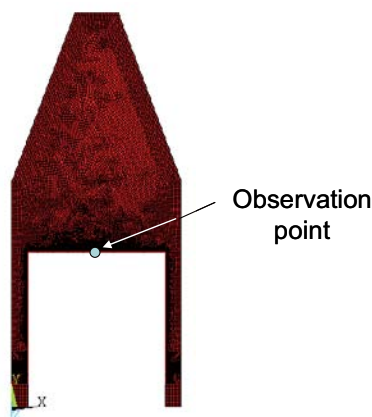


図9 フェアリング内宇宙機の音響振動解析のための粗 FE モデル

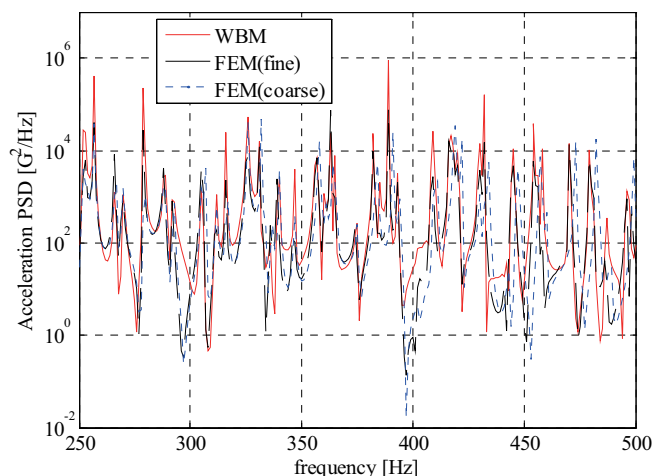


図10 FEM と WBM による構造の加速度 PSD の比較

#### 4. おわりに

本論文では、音響振動問題において、数値分散誤差や計算負荷の大きさにより実用的に問題がある FEM の代替手法として期待できる WBM について説明した。また、開発した 2 次元 WBM 解析コードを用いて、簡単な非連成音響問題と搭載宇宙機の 2 次元音響振動問題を解き、FEM の結果と比較することにより、WBM の性質や実用性について検討した。この数値計算例から、WBM の音響振動連成解析における決定論的性質が確かめられた。さらに、空間離散化（メッシュ）を必要としないため、モデル化が非常に容易で計算負荷の小さい実用的な手法であることが分かった。

今後は、WBM コードを 3 次元解析へ拡張すると共に、外部問題への対応を検討することによってより現実的な音響振動連成問題を解析する予定である。

#### 参考文献

- 1) 高橋, 村上, 青山, 相曾, 音響によるロケットペイロードの構造振動に関する研究, 航空宇宙数値シミュレーション技術シンポジウム 2006 講演集, 2006.
- 2) Lyon, R.H. and De Jong, R.G., *Theory and Application of Statistical Energy Analysis*, Butterworth-Heinemann, New York, 1995.
- 3) Xiang, S., Zhang, J., and Wang, Z., Development of the DFH-3 satellite vibro-acoustic environment by SEA method, 50th International Astronautical Congress, Amsterdam, Netherlands, IAF-99-1.2.09, 1999.
- 4) Wang, M.E., Modeling of acoustic environment of Node 1 of International Space Station by statistical energy analysis, 29th International Conference on Environmental Systems, Denver, Colorado 12-15 July 1999, 1999-01-2197.
- 5) Payload vibroacoustic test criteria, NASA Technical Standard, NASA-STD-7001, 1996.
- 6) Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L., Zhu, J.Z., and Nithiarasu, P., *The Finite Element Method – The three volume set (6th ed.)*, Butterworth-Heinemann, 2005.
- 7) Wijk, J., *Mechanical vibrations in spacecraft design*, Springer, 2004.
- 8) Dupuis, P.E., Vibroacoustic test prediction dedicated to flat structures, AIAA-98-2306, 1998.
- 9) Grosveld, F.W., Buehrle, R.D., and Robinson, J.H., Structural and acoustic numerical modeling of a curved composite honeycomb panel, AIAA-2001-2277, 2001.
- 10) Desmet, W., *A wave based prediction technique for coupled vibro-acoustic analysis*, Ph.D. dissertation, K.U. Leuven, 1998.
- 11) 神谷, 北, トレフツ法入門, コロナ社, 2000.
- 12) Pluymers, B., *Wave based modelling methods for steady-state vibro-acoustics*, Ph.D. dissertation, K.U. Leuven, 2006.
- 13) <http://www.mathworks.com/products/matlab/>
- 14) Ihlenburg, F. and Babuska, I., Finite Element Solution of the Helmholtz Equation with High Wave Number Part I: The h-version of the FEM, *Computers and Mathematics with Applications*, Vol.30, pp.9-37, 1995.
- 15) Bouillard, Ph. and Ihlenburg, F., Error Estimation and Adaptivity for the Finite Element Method in Acoustics: 2D and 3D Applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.176, pp.147-163, 1999.
- 16) <http://www.ansys.com/>