

圧縮性オイラー及びナビエ・ストークス方程式を解くための気泡関数要素を用いた有限要素法

中島修治*, 川原睦人**

* 中央大学大学院 理工学研究科 土木工学専攻

** 中央大学 理工学部 土木工学科

The Finite Element Formulation Based on Bubble Function element for Solving the Compressible Euler and Navier-Stokes Equations

by

Shuji Nakajima and Mutsuto Kawahara

Abstract

The purpose of this paper is to apply a stabilized finite element method using a new bubble element to the unsteady fluid flow expressed by the compressible Navier-Stokes equations to save efficient computational memory for computers. The formulation is based on the mixed interpolation for a transient term. The main idea of the present paper is the mixed interpolation of the transient term with bubble function as the weighting function and with linear function as the interpolation function. The stabilizing effect of the bubble function is effectively used. Temporal discretization is based on the theta method. The formulation leads to the stabilizing effect and efficiency to the unsteady fluid flow problems and is verified by the numerical studies, in which, a shock tube problem, Carter's flat plate problem and compression corner problem are carried out. The present method is shown to be useful for the computation of the compressible viscous flow.

1. 序論

近年、数値解析の分野は大規模な計算が主流となり、三次元解析及び制御問題が解かれるようになった。このための計算手法は安定かつ効率的な手法が求められる。本研究では、有限要素法に基づいて数値解析を実施する。有限要素法の利点は、有限差分法又は体積法と比較して、任意の複雑形状を有する解析領域を正確に分割して解析が可能であること、構造解析への適用が容易であるため流体構造連成解析等にも有効であること、さらに、有限要素法は境界条件の処理が容易であり、最適制御問題のような複雑な境界条件を有する解析領域を逆解析する場合にも適すること等が挙げられる^{1,2,7)}。また、有限要素解析において、安定な解析手法が開発されてきた^{3,4,10)}。気泡関数要素はその一つであり、重心点を考慮することにより、数値的安定性を確保する手法である。気泡関数の研究においては、安定化有限要素法の安定化効果に等価となるものが開発された⁵⁻⁷⁾。気泡関数要素は安定化効果を補間関数で確保するため、離散化後の有限要素方程式が安定項を付加するSUPG法^{3,4)}等と比べ、簡易な式となる。また、これにより、最適制御問題の場合において、基礎方程式の有限要素方程式を拘束条件とした随伴方程式の導出が容易となる⁸⁾。しかしながら、気泡関数要素は要素毎に重心点の節点を記憶する必要があり、3次元計算及び制御問題において、計算機記憶容量の負担となる。

本研究で用いる気泡関数要素は、重心点の節点量の記憶を不要とし、安定かつ効率的な手法であり、これを圧縮性Navier-Stokes方程式に適用する。本研究の計算手法は、有限要素法により圧縮性Navier-Stokes方程式を離散化する。空間方向の離散化には気泡関数要素を適用し、時間方向の離散化には θ 法を適用する。気泡関数には、安定化気泡関数を用いる。この際に、時間項に対し一次要素を用い、その他の項及び重み関数に気泡関数要素を用いた混合補間を適用する。本来、混合補間は圧力に対して用いることにより、非圧縮Navier-Stokes方程式を安定に解くことができる⁹⁾。しかし、今回、圧縮性Navier-Stokes方程式に用いることにより、安定化有限要素法と等価の安定化作用を確保し、かつ、要素毎の未知量の記憶を不要とした。この計算手法は、制御問題等の大規模

計算を効率的かつ安定に計算することが可能となる。

本研究の数値解析例には、圧縮性Euler方程式によるSodの衝撃波管問題¹¹⁾を実施する。これにより安定性を検証した後、圧縮性Navier-Stokes方程式によるCarterの平板上の超音速流れ及び圧縮コーナーにおける流れ解析¹²⁾を実施する。これにより、圧縮粘性流れにおける本手法の効率性及び安定性を示す。

2. 基礎方程式

圧縮粘性流れの基礎方程式として、保存変数による無次元化した2次元圧縮性Navier-Stokes方程式を用いる。

$$\begin{aligned} \dot{U} + F_{i,i}^a - F_{i,i}^d &= 0 \\ U^T &= (\rho, \quad \rho u_1, \quad \rho u_2, \quad \rho e) \\ &\equiv (\rho, \quad m_1, \quad m_2, \quad \rho e) \end{aligned} \quad (1)$$

$$F_i^a = \begin{bmatrix} \rho u_i \\ u_i \rho u_1 + \delta_{1i} p \\ u_i \rho u_2 + \delta_{2i} p \\ u_i (\rho e + p) \end{bmatrix}, \quad F_i^d = \frac{1}{Re} \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{1i} \\ \tau_{2i} \\ \tau_{ij} u_j + \frac{\gamma \mu}{Pr} \varepsilon_{,i} \end{bmatrix}$$

ここで、

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) + \lambda u_{k,k} \delta_{ij} \\ \lambda &= -\frac{2}{3}\mu, \quad p = (\gamma - 1)\rho e \\ e &= \varepsilon + \frac{u_i u_i}{2}, \quad \varepsilon = c_v \theta \end{aligned}$$

粘性係数と温度の関係式には、Sutherlandの公式を用いる。

$$\mu = \theta^{\frac{3}{2}} \frac{\theta_{\infty} + C}{\theta_{\infty} \theta + C}, \quad C = 110 \quad (2)$$

また、基礎方程式は次のように書き換えられる。

$$\dot{U} + A_i U_{,i} - (K_{ij} U_{,j})_{,i} = C \quad (3)$$

$$A_i = \frac{\partial F_i^a}{\partial U}, K_{ij} U_{,j} = F_i^d$$

3. 離散化手法

時間方向の離散化に、陰的解法として Θ 法を適用する。

$$\frac{1}{\Delta t}(U^{n+1} - U^n) + A_i(U^*)U_{,i}^{n+\Theta} - \{K_{ij}(U^*)U_{,j}^{n+\Theta}\}_{,i} = 0 \quad (4)$$

ここで、

$$U^* = \frac{1}{2}(3U^n + U^{n-1})$$

$$U^{n+\Theta} = \Theta U^{n+1} + (1 - \Theta)U^n$$

Δt は時間増分量であり、 n は n 回目の時間ステップを表す。Adams-bashforth公式による線形近似として U^* は得られる。

空間方向の離散化には、通常のGalerkin法を適用する。補間関数として安定化気泡関数を用い、時間項に対し混合補間を適用する。すなわち、適用される補間関数は、時間項に一次要素(図-1 (a))を、その他の項及び重み関数に気泡関数要素(図-1 (b))を用いる。

$$\tilde{U}_e^h = \Psi_1 \tilde{U}_{e1} + \Psi_2 \tilde{U}_{e2} + \Psi_3 \tilde{U}_{e3}$$

$$\Psi_1 = L_1, \Psi_2 = L_2, \Psi_3 = L_3 \quad (5)$$

$$U_e^h = \Phi_1 \bar{U}_{e1} + \Phi_2 \bar{U}_{e2} + \Phi_3 \bar{U}_{e3} + \Phi_4 \bar{U}_{e4}$$

$$\bar{U}_{e4} = \bar{U}_{e4} - \frac{1}{3}(\bar{U}_{e1} + \bar{U}_{e2} + \bar{U}_{e3})$$

$$\Phi_1 = L_1, \Phi_2 = L_2, \Phi_3 = L_3, \Phi_4 = \phi_e$$

$$\phi_e = 27L_1L_2L_3 \quad (6)$$

ここで、 Φ_1 - Φ_3 及び Ψ_1 - Ψ_3 は要素毎の形状関数であり、 L_1 - L_3 は線形関数の面積座標である。また、 U_{e1} - U_{e3} は線形要素の節点値であり、 U_{e4} は要素毎の重心点で定義される値である。 U_e の飾りの $-$ は節点値を示し、 U_{e4} の飾りの \sim は各節点値の平均と重心点の節点値との差であり、実際に計算の補間関数で使用される。 ϕ_e は、要素毎に定義される気泡関数である。

気泡関数の安定化パラメータを τ_e と定義することにより、安定化有限要素法¹⁰⁾と等価の安定化作用を得ることができ、さらに、混合補間により、各要素における気泡関数要素の節点値に対する保存が不要となる効率的な解析が可能となる。

$$\tau_e = \left[\int_{\Omega_e} (K_{kj} + \bar{K}_{kj}) \phi_{e,k} \phi_{e,j} d\Omega \right]^{-1} \frac{(\int_{\Omega_e} \phi_e d\Omega)^2}{A_e} \quad (7)$$

$$\tau_e = \tau_s, \tau_s = \left\{ \left(\frac{2}{\Delta t} \right)^2 + \left(\frac{2\|u\|}{h_e} \right)^2 + \left(\frac{4\nu}{h_e^2} \right)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} \quad (8)$$

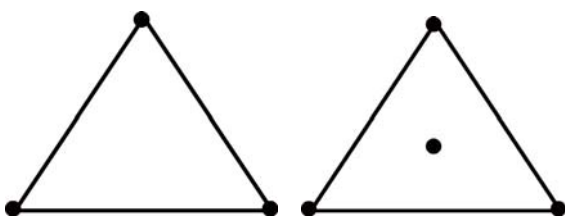


図-1 補間要素

また、本手法の安定化効果は安定化有限要素法と同様に、高マッハ数では十分ではないため、衝撃波捕捉項を用いて安定化作用を補う⁴⁾。

4. 数値解析例

(1) Sodの衝撃波管問題

非定常圧縮性流れ問題として、圧縮性Euler方程式を用いたSodの衝撃波管問題¹¹⁾を解く。初期条件は以下のとおりである。

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (1.0, 0.0, 1.0) & x < 0.5 \\ (0.125, 0.0, 0.1) & x > 0.5 \end{cases} \quad (9)$$

各パラメータの設定は、 $\Theta=0.9$ 、 $\gamma=1.4$ 、メッシュ幅 $\Delta x=0.005$ 、時間分割幅 $\Delta t=0.001$ を用いる。

解析後の密度分布を図-2に示す。さらに図-2では、本手法の混合補間を用いた場合とそうでない場合の密度及び圧力分布の比較を示す。どちらも解析解と一致しており、安定な手法であるといえる。

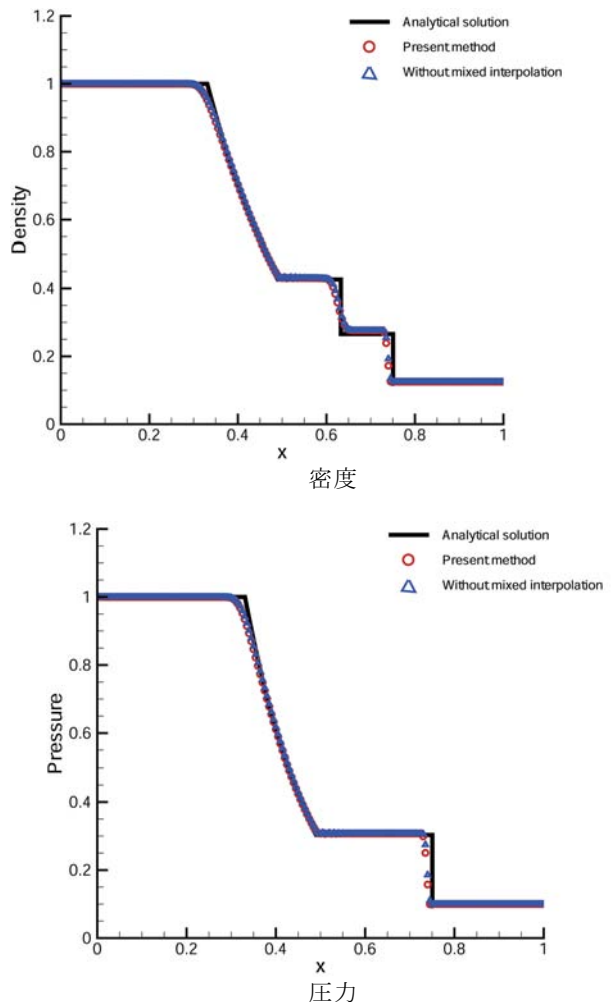


図-2 Sodの衝撃波管問題における密度及び圧力分布

(2) 平板上の超音速流れ

圧縮性粘性流れの一樣流中に置かれた平板上の超音速流れ問題を解く。これは、Carterの平板問題¹²⁾として知られており、衝撃波及び境界層が存在する流れである。解析条件はマッハ数 $M=3$ 、 $Re=1000$ 、 $Pr=0.72$ 、 $\gamma=1.4$ 、基準温度 $\theta_\infty=216.7$ [° K] (390 [° R]) とする。平板の壁面温度は、

$$\theta_{wall} = \theta_{inflow} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_{inflow}^2 \right) \quad (10)$$

により表し、解析領域及び境界条件は、図-3に示す。解析領域はx方向が $-0.15 \leq x \leq 1.5$ 、y方向が $0.0 \leq y \leq 0.9$ であり、平板は $x=0.0$ に先端がある。有限要素分割は節点数6771と要素数13200の均等メッシュを使用した(図-4)。計算条件の各パラメータの設定は、 $\theta=0.9$ 、時間分割幅 $\Delta t=0.015$ を用いる。圧力、密度、温度、マッハ数の等高線図を図-5に示す。平板上に衝撃波及び境界層の発生を確認できた。また、数値振動は発生せず、安定に解析できた。計算に必要な未知節点数を表-1に示す。x=1.0における圧力、密度、温度、垂直速度成分の各値をCarter及びCodinaらの結果¹³⁾と比較した図を図-6に示す。Carterの結果では、圧力振動が発生し正確な圧力分布図を示せなかったが、本手法では、Codinaらの結果同様に安定な解を示すことができた。

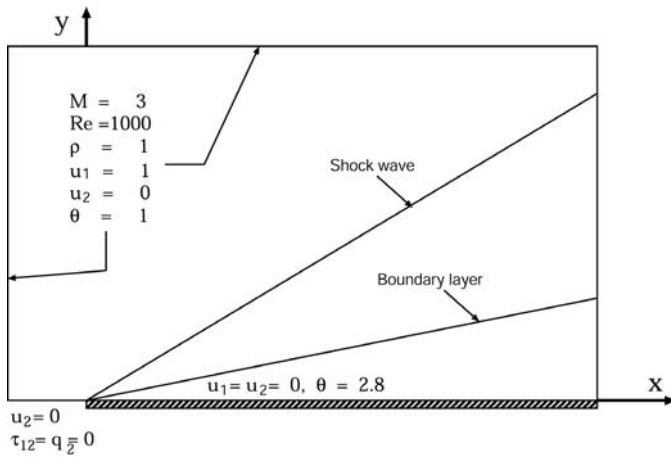


図-3 平板上流れにおける解析領域及び境界条件

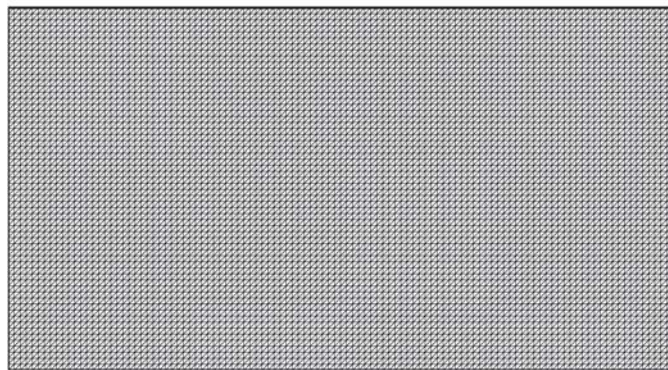
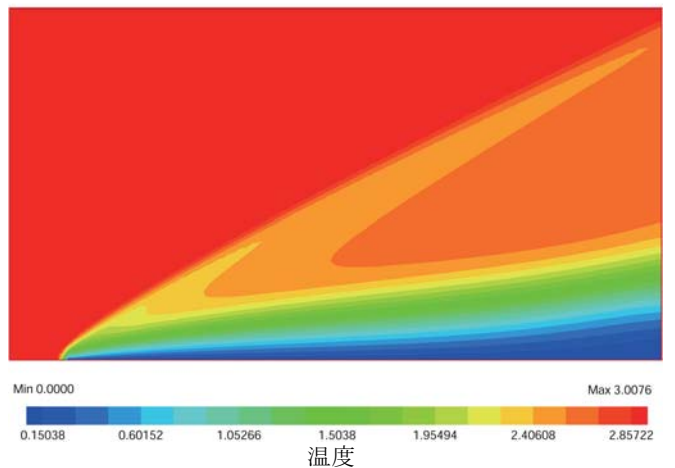
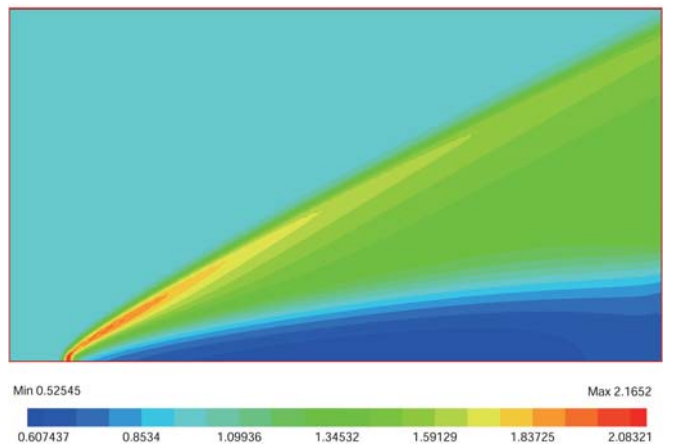
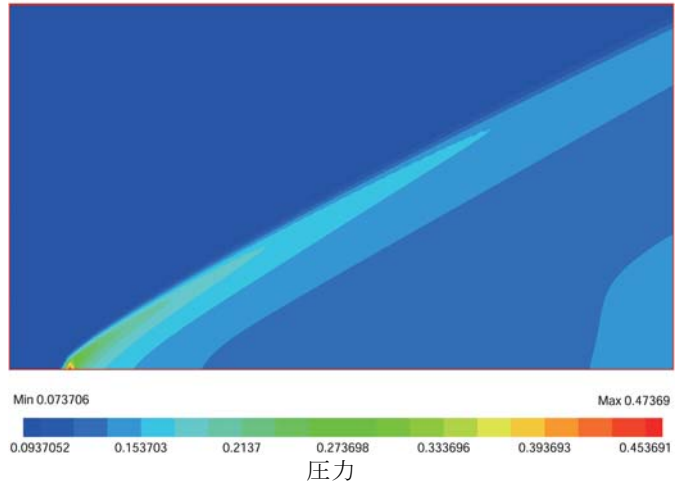


図-4 有限要素分割

表-1 各手法における未知数

	未知数
本手法	6771
混合補間なし	19971



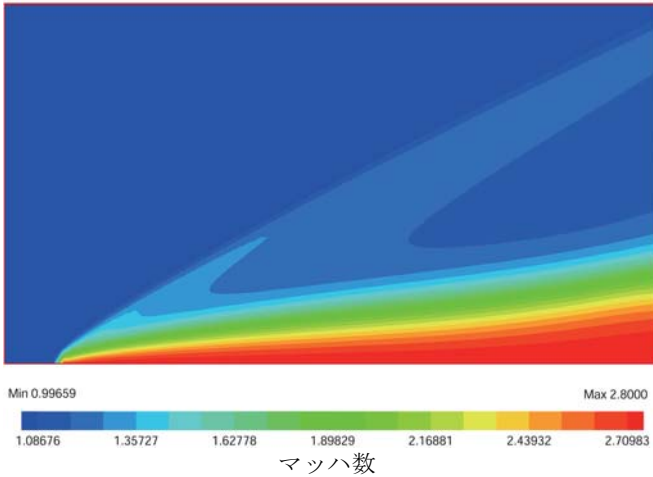


図-5 圧力, 密度, 温度, マッハ数の等高線図

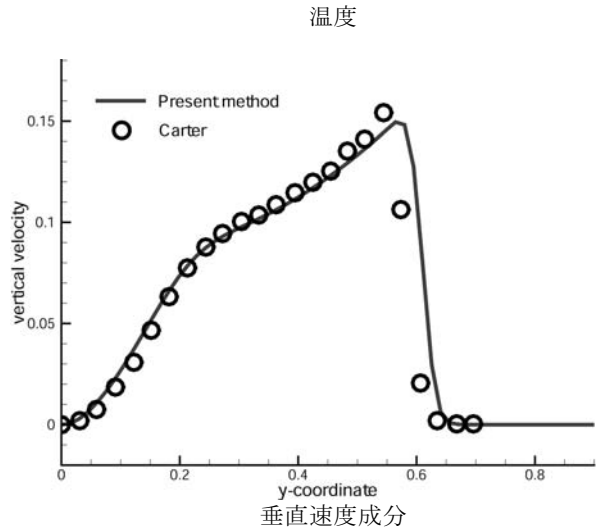
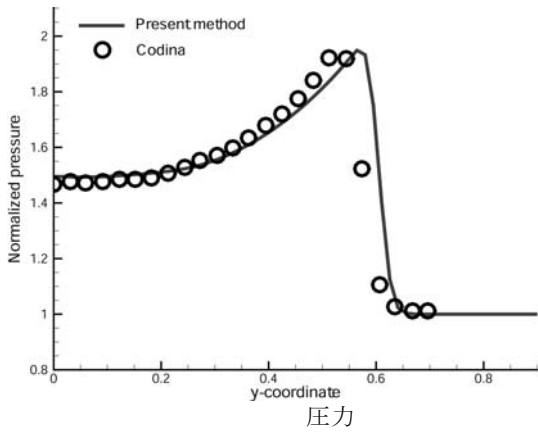
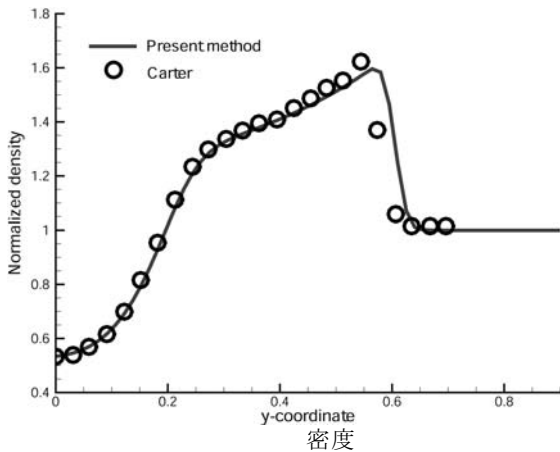


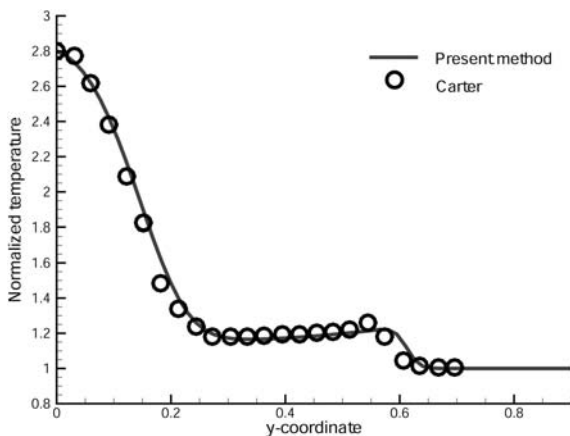
図-6 $x=1$ における圧力, 密度, 温度, 垂直速度成分



圧力



密度



y-coordinate

(3) 圧縮コーナー流れ

平板のある位置において角度を 10° 傾けた境界における粘性圧縮流れ問題を解く. 解析領域及び境界条件は図-7に示す. 解析条件は $M=3$, $Re=16800$, $Pr=0.72$, $\gamma=1.4$, 基準温度 $\theta_\infty=216.7 [^\circ K]$ ($390 [^\circ R]$)とする. 壁面温度は平板上の流れ問題と同様に設定し, 解析領域及び境界条件は図-7とする. x 方向が $-0.2 \leq x \leq 2.0$, y 方向が $0.0 \leq y \leq 0.575$ であり, 壁面の先端は $x=0.0$ にある. 有限要素分割は, メッシュ幅 $\Delta y = 1.0 \times 10^{-4}$, 節点数5162と要素数10032のメッシュを使用した(図-8). 計算条件の各パラメータの設定は, $\theta=0.9$, 時間分割幅 $\Delta t=0.01$ を用いる. 圧力, 密度, 温度, マッハ数の等高線図を図-9に示す. 圧力係数及び摩擦係数をCarter及びShakibらの結果¹⁴⁾と比較した図を図-10及び図-11に示す. また, 圧縮コーナーにおいて発生した循環流に関して, 剥離点及び再付着点の位置を表-2に示す¹⁵⁾. 安定化有限要素法の安定化作用と等価に設定したため, 圧力係数及び摩擦係数の比較図において, Shakibらの結果とよく一致した. 剥離点及び再付着点における若干のずれは, 要素形状の違い及び物体近傍の最小メッシュ幅の違いによるものと考えられる.

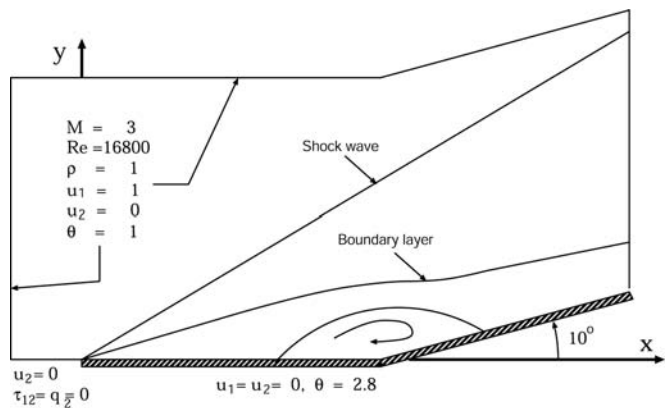


図-7 圧縮コーナーにおける境界条件及び計算条件

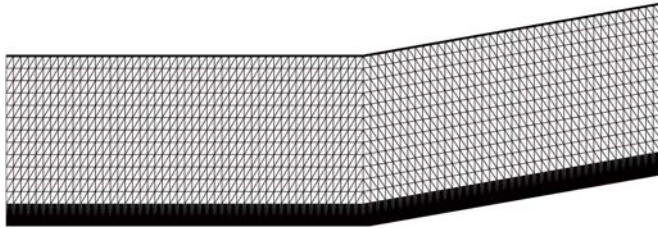
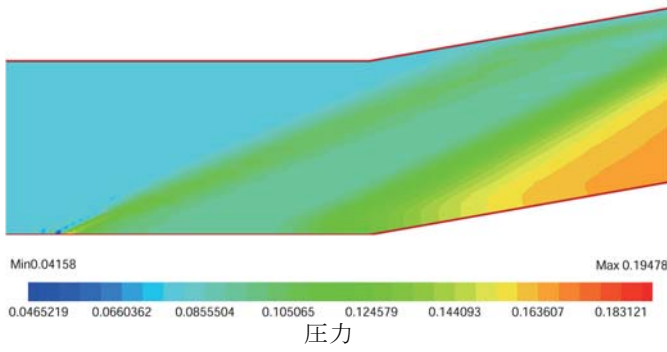
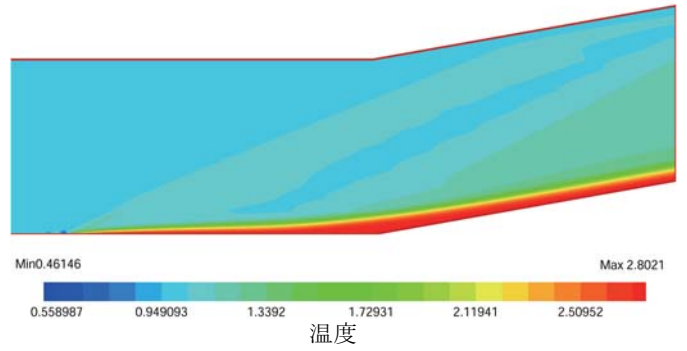
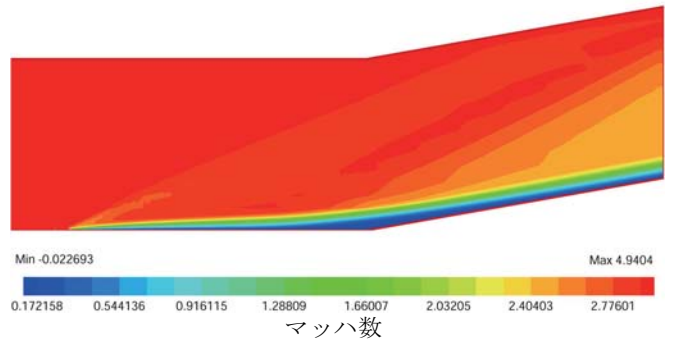


図-8 有限要素分割

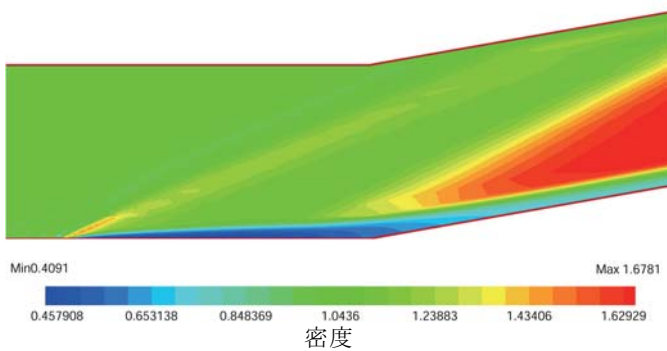


圧力



マッハ数

図-9 圧力, 密度, 温度, マッハ数の等高線図



密度

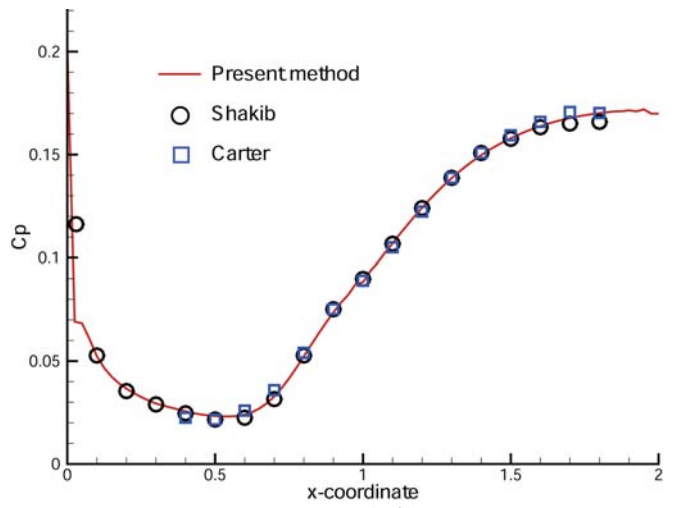


図-10 圧力係数

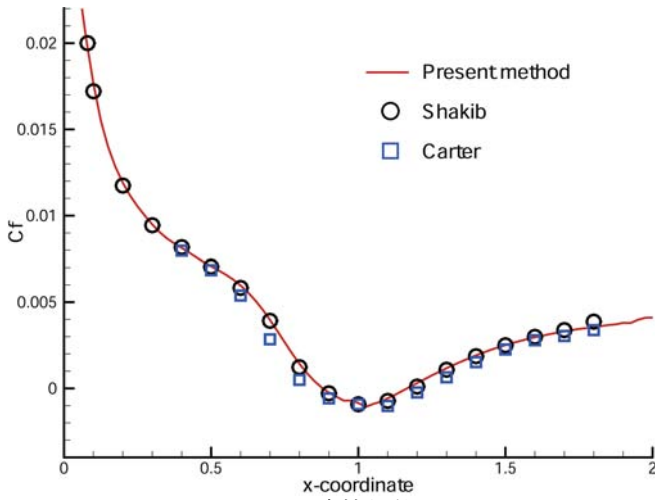


図-11 摩擦係数

表-2 循環流の範囲

	剥離点	再付着点
本手法	0.875	1.175
Shakib	0.88	1.17
Hung and MacCormack	0.89	1.18
Carter	0.84	1.22

5. 結論

圧縮性Euler方程式によるSodの衝撃波管問題では、解析解に近い解が得られ、安定化作用は適切に導入されたことが示された。また、時間項に対する混合補間を用いた解と、用いなかった解における違いはほとんどなく、どちらも解析解に近い解となった。また、混合補間を適用した場合には、未知数が減少するため効率的であることが示された。さらに、本手法を圧縮性Navier-Stokes方程式に適用し、圧縮性粘性流れに置かれた平板上の超音速流れ解析及び圧縮コーナー流れ解析を安定に行うことができた。

各数値解析例において、数値的安定性を示したことから、本研究で用いた手法の有効性が示された。また、3次元解析及び制御問題のような大規模計算の解析を行う上でも計算メモリを確保できるため、本手法は効率的である。

参考文献

- 1) 野島和也, "3次元最適形状問題のためのメッシュ生成手法に関する研究", 博士論文, 2007.
- 2) 松本純一, 川原睦人, "MINI要素を用いた流体—構造練成問題における安定形状同定", 応用力学論文集, Vol.3, 2000, pp.263-274.

- 3) Brooks A.N. and Hughes T.J.R. "Streamline Upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations", Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 32,1982, pp.199-259.
- 4) Tezduyar T.E. and Senga M. "Stabilization and shock-capturing parameters in SUPG formulation of compressible flows", Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 195,2006, pp.1621-1632.
- 5) Simo J.C., Armero F. and Taylor C.A. "Stable and time-dissipative finite element methods for the incompressible Navier-Stokes equations in advection dominated flows", Int. J. Numer. Meth. Engrg., 38,1995, pp.1475-1506.
- 6) Yamada T. "A bubble element for the compressible Euler equations", International Journal of Computational Fluid Dynamics, Vol.9, 1998, pp.273-283.
- 7) Matsumoto J. and Kawahara M. "Shape identification for fluid-structure interaction problem using improved bubble element", International Journal of Computational Fluid Dynamics, 15, 2001, pp.33-45.
- 8) Yagi, H. and M. Kawahara, "Shape optimization of a body located in low Reynolds number flow", International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2005, 48, pp.819-833.
- 9) Pierre R.: "Simple C⁰ approximations for the computation of incompressible flows", Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 68,1988, pp.205-227.
- 10) Tezduyar T.E. "Stabilized finite element formulations for incompressible flow computations", Advances in Applied Mechanics, 28,1992, pp.1-44.
- 11) Sod G.A. "A Survey of Several Finite Difference Methods for Systems of Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws", Journal of Computational Physics, 27, 1978, pp.1-31.
- 12) Carter J.E.: Numerical solutions of the Navier-Stokes equations for the supersonic laminar flow over a two-dimensional compression corner.", NASA Technical Report, NASA TR-R-385, 1972.
- 13) Codina R, Vazques M, Zienkiewicz O.C. "A general algorithm for compressible and incompressible flows. Part III", International Journal of Computational Fluid Dynamics, Vol.27, pp.13-32, 1998.
- 14) Shakib F., Hughes T.J.R. and Johan Z. "A new finite element formulation for computational fluid dynamics: X. The compressible Euler and Navier-Stokes equations", Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 89,1991, pp.141-219.
- 15) Hung C.M. and MacCormack R.W. "Numerical solutions of supersonic and hypersonic laminar compression corner flows", AIAA J. 14 (4),1976, pp.475-481.