No. 6

「交差独立性仮説」の検討

細川　巖（電気通信大学名誉教授）

Consideration for "Cross-Independence Hypothesis"

Iwao Hosokawa (Prof. Emeritus, Univ. Electro-Comm.)

ABSTRACT

Qualities of similarity solution based on "the cross-Independence hypothesis" in decaying homogeneous isotropic turbulence recently proposed by Tatsumi and Yoshimura are discussed.

Keywords : Turbulence, Cross-independence hypothesis

1．はじめに

等方性乱流の中の多点速度分布の方程式系は１９６７年にMonin とLundgren によって無限につながる連立方程式系として確立されているが，これを１点または２点速度分布までで切り上げる，いわゆる完結モデルで成功したものは今まではなかった。

これに対する果敢で周到な研究が，新しい「交差独立性」という独創的な仮説に基づいて，Tatsumi & Yoshimura (2004) によって行われていることは周知のとおりである。

ここでは，Fluid Dyn. Res. に発表された2004年の論文[1]に基づいて，私が見た困難な点を指摘したい。この論文で解決できなかった，いわゆる局所領域の解の研究は現在著者たちによって継続中のようで，部分的には議論されているが，数学的に完結した形を想像することは難しいので，ここでは立ち入らないことにする。

もし相似解があるとすれば。どんな特性をもつものか，またあり得る非相似解にも言及する。

2．交差独立性

一様等方性乱流では，１点分布函数を f(v,t)，２点分布函数を $f^{(2)}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{r},t)$ とする。ここで $\mathbf{v}$ は速度ベクトルを示し，$\mathbf{r}$ は２点間の距離ベクトル，t は時間変数である。交差独立性というのは，２点における速度 $(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)$ の積空間を $\mathbf{v}_+=(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)/2$ と $\mathbf{v}_-=(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2)/2$ の積空間に変換し，

$$f^{(2)}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{r},t)=2^{-3}g^{(2)}(\mathbf{v}_+,\mathbf{v}_-,\mathbf{r},t) \tag{1}$$

そして

$$g^{(2)}(\mathbf{v}_+,\mathbf{v}_-,\mathbf{r},t)=g_+(\mathbf{v}_+,\mathbf{r},t)\,g_-(\mathbf{v}_-,\mathbf{r},t) \tag{2}$$

と仮定することである。

Tatsumi & Yoshimura の減衰一様等方性乱流の完結モデルはこれを利用して，Monin-Lundgrenの連立方程式系を以下の４個の方程式系にまとめたものである。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\alpha(t)\left|\frac{\partial}{\partial v}\right|^2\right)f(v,t)=0 \tag{3}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2}\alpha(t)\left|\frac{\partial}{\partial v_+}\right|^2\right)g_+(v_+,r,t)=0 \tag{4}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2}\alpha(t)\left|\frac{\partial}{\partial v_-}\right|^2\right)g_-(v_-,r,t)=0 \tag{5}$$

$$\alpha(t)=\frac{2}{3}\nu\lim_{|r|\to 0}\left|\frac{\partial}{\partial r}\right|^2\int|v_-|^2 g_-(v_-,r,t)dv_- \tag{6}$$

式(6)は，右辺が存在すれば，平均散逸率 $\varepsilon(t)$ の1/3に等しい。ν は運動粘性係数である。この方程式系は著者の名前を借りて，T-Y Closure と呼んでもよい。

しかし，最近はこの系の枠を超えてかなり大きい変更を加えたもので，局所領域の研究を進めておられるようなので，それについての議論はここではできない。そのような変更が，単に物理的アナロジーではなく，元のMonin-Lundgren の連立方程式系から数学的に導かれるのかどうか定かでないからである。

3．相似変数の方法

T-Y Closure (3-6) は簡単に見えるが，実はそうではない。４個の函数の非線形微積分連立方程式である。著者たちは相似変数

$$w_\pm=v_\pm t^{1/2},\ s=rt^{-1/2},\ g_\pm(v_\pm,r,t)=t^{3/2}G_\pm(w_\pm,s) \tag{7}$$

を導入し，

$$\alpha(t)=\alpha_0 t^{-2} \tag{8}$$

$$\alpha_0 = \frac{2}{3}\nu \lim_{|s|\to 0}\left|\frac{\partial}{\partial S}\right| \int |W_-|^2 G_-(W_-,s)dW_- \tag{9}$$

と置き，α_0 の存在を仮定した。そして鮮やかに (3) を解き，１点分布函数

$$f(v,t) = \left(\frac{t}{4\pi\alpha_0}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{|v|^2 t}{4\alpha_0}\right] \tag{10}$$

を得た。ここまでは見事である。

さて次に $G_\pm(w,s)$ をどう解くか。これは方程式 (4,5) によって,

$$3/2\, G_\pm - s/2\, \partial G_\pm/\partial s + w_\pm/2 \bullet \partial G_\pm/\partial w_\pm$$
$$+\alpha_0/2 |\partial/\partial w_\pm|^2 G_\pm = 0 \tag{11}$$

に支配され。明らかに $g_\pm$ のｒ依存を示す。しかし, 2004 年の論文[1] ではこの式は扱われていない。その代わりに, ストレートに方程式(3)との類似性に着目してｒに依存しない解

$$g_-(v_-,t) = \left(\frac{t}{2\pi\alpha_0}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{|v_-|^2 t}{2\alpha_0}\right] \tag{12}$$

が r > 0 の条件で出された。$g_+(v_+,t)$ も同じである。そして r = 0 の場合は (4,5) に達する前の方程式に遡って考察され，前者はデルタ函数に，後者は (10) の解に一致することが結論された。

４．問題点

上に述べられた４個の函数の解は，連立方程式(3-6)を充たすだろうか。問題は式(6)である。上に述べた $g_-(v_-,t)$ のいずれの形を入れても式(6)では $\alpha(t) = 0$ ($\therefore \alpha_0 = 0$) となり，式(9)の有限値の存在は否定される。ここに矛盾があるのなら，導かれたすべての解も危うい。

折角のT-Y Closure が生きるためには，式(6)が有限値で成り立つような $g_-(v_-,r,t)$ または $G_-(W,S)$ が見つけられなければならない。式(5)の解としてこれを達成できるかは自明ではない。近似的に無視されていた別の項を入れたもので式(5)を改変し，そこでｒに依存する解を探すのは一案かも知れない。勿論それは式(6)の右辺が計算できて，自己無撞着な $\alpha(t)$ を与える必要がある。

５．相似解の一般的特性

もし自己無撞着な T-Y Closure の相似解が得られるとすれば，それはどのような特性をもつか。

まず式 (6) の所で述べたように，式 (8,9) から，平均散逸率

$$\varepsilon(t) = 3\alpha_0 t^{-2} \tag{13}$$

の減衰則が得られ，これによりエネルギーの減衰冪指数は −1 となる。

次に，この理論には二つの有限の大小長さスケールがあり，相似解に対しては。

$$L(t) = \langle v_1^2 \rangle^{3/2}/\varepsilon = \frac{2^{2/3}}{3}(\alpha_0 t)^{1/2} \tag{14}$$

$$\eta(t) = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4} = (\nu^3/3\alpha_0)^{1/4} t^{1/2} \tag{15}$$

が得られる。慣性領域は（もし存在すれば）これらのスケールの間に存在する筈である。両スケールが $t^{1/2}$ に比例して伸びて行くので，慣性領域は永久になくなることはない。

スケール比によってレイノルズ数 Re(t) を定義しよう。

$$\frac{L(t)}{\eta(t)} = \left(\frac{4}{3}\right)^{3/4}\left(\frac{\alpha_0}{\nu}\right)^{3/4} \equiv \mathrm{Re}^{3/4}, \tag{16}$$

Reは時間不変となり，もし長さのスケールをどちらかのスケールで無次元にしてあれば，エネルギーは減衰するにも拘らず，同じ乱流構造がいつまでも維持されることになる。たとえば，速度の自己相関函数は時間不変となる。

これらは相似解の顕著な特性で，必ずしも現実的ではないが，一つのモデルとしての意味はあるだろう。筆者は慣性領域では Kolmogorov 仮説に合わせた分布函数を使い，その外側で T-Y Closure と厳密に接続するという方法を考えたが，これは別のところで改めて発表する。[2]

非相似解を考慮の中に入れると，

$$\alpha(t) = \alpha_0 t^{-4a} \tag{17}$$

a > 1/4 の条件で，無数の解の可能性が出てくる。式(10)の一般化も書けるが，紙面の都合で省略する。この中から，上記の特性に縛られない（Re(t)の減衰する）より現実的なものが見つかる可能性があるが，今後の問題である。

引用文献

1) T. Tatsumi & T. Yoshimura (2004) Fluid Dyn. Res. **35**, 123.

2) I. Hosokawa, to be published in Fluid Dyn. Res. (Memorial issue of Professor Imai.)