

No. 19

2 円柱を横切る流れの不安定性と遷移

稲生 洋一, 水島 二郎 (同志社大・工)

Transition and Instability of Flow past a Pair of Circular Cylinders

Yoichi Ino, Jiro Mizushima

Dept. of Mech. Eng., Doshisha University, Kyotanabe, Kyoto 610-0394, Japan

ABSTRACT

The instability and transition of flow past two circular cylinders arranged perpendicularly to the stream are investigated numerically. It is a steady symmetric flow that is realized at small Reynolds numbers, but the flow becomes unstable above a critical Reynolds numbers. It has been believed that the resultant flow due to the instability is always oscillatory. However, we found a steady asymmetric flow as well as the oscillatory flow arising from the instability in a region of the gap width between the two cylinders. We evaluated the critical Reynolds number and clarified the region of the gap width in which the steady asymmetric flow is realized.

Keywords : two circular cylinders, wake, stability, bifurcation.

1. はじめに

2 円柱を過ぎる流れは、一見非常に単純な流れ場と思われるが実際には複雑な現象を含み、航空工学や土木工学などのさまざまな分野で調べられてきた。2 円柱の配置はタンデム型と並列型および斜め型の 3 つに分類できる。タンデム型 2 円柱を過ぎる流れの研究は双翼型飛行機の翼を支える柱の応用から始まっているため、研究者の主な関心は円柱の抗力係数や揚力係数にあった。並列型 2 円柱を過ぎる流れでは、流れのパターン変化が注目されてきた。

一様な流れの中に流れと平行または垂直に 2 円柱を配置し、円柱間の間隔と円柱の受ける抗力の関係について調べると抗力係数は間隔比 (円柱間距離/直径) によって大きく変化することなどが知られている¹⁾。タンデム型 2 円柱を過ぎる流れの実験と数値計算の結果で共通しているのは、円柱間距離を連続的に変えてもある臨界距離を越えると流れのパターンが不連続的に変わることである。臨界間隔の存在は Ishigai et al.²⁾ のレイノルズ数が 1500-15000 の実験によって確認されている。彼らは臨界間隔をストローハル数と表面圧力係数が急激な変化を示す $3.8d$ 付近であるとした。この不規則な物理量の変化の起源については Mizushima and Suehiro により数値的に調べられ、ヒステリシスを伴う解の分岐ダイアグラムから説明できることが明らかになった³⁾。

並列型 2 円柱の場合、その円柱間距離が円柱直径より大きいときには、それぞれの円柱の後流がさまざまなパターンを形成することが数値的にも実験的にも確認されている⁴⁾。一方、円柱間距離が円柱直径より小さいときには、高いレイノルズ数 ($Re = 10^3 \sim 10^4$) において 2 本の円柱間の流れは一方に偏ることが確認されている。最近では、低いレイノルズ数 ($Re = 40 \sim 160$) において、流

れのパターンはレイノルズ数や円柱間距離によって、6 つに分類できるという数値シミュレーションの結果も報告されている⁵⁾。

しかし、いずれの研究においても流れの分類は流れ場を特徴づける物理量や、流れパターンに着目して行われており、それぞれの流れが生じる原因については詳しく調べられていない。流れが不安定となり遷移すると、流れのパターンはより複雑になる。したがって、流れのパターン変化を調べるにはその遷移構造を明らかにすることが最も重要である。

本研究では一様流中に並べられた 2 つの円柱を過ぎる流れについて、数値シミュレーションと流れの安定性解析を行い、その遷移を詳しく調べる。

2. 定式化と境界条件

一様流中におかれた 2 本の円柱を過ぎる流れを考える (Fig.1)。Fig.1 では、流体は左から右へ流れる。円柱の直径を d 、2 円柱の間隔を ℓ とする。流れの向きに x 軸、流れと垂直方向に y 軸をとる。円柱の直径 d を代表長さ、上流における一様速度 U を代表速度とし、流れを特徴づけるパラメータとしてレイノルズ数 Re と中心間隔比 Γ をそれぞれ $Re \equiv Ud/\nu$ および $\Gamma \equiv \ell/d$ で定義する。ただし、 ν は流体の動粘性係数である。

2 次元非圧縮流れを仮定し、流れ関数 $\psi(x, y, t)$ および渦度 $\omega(x, y, t)$ による $\omega - \psi$ 法を用いて解析を行った。基礎方程式は連続の式

$$\omega = -M\psi, \quad (1)$$

渦度輸送方程式

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -N(\psi, \omega) + M\omega, \quad (2)$$

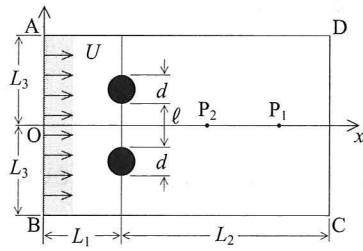


Fig. 1: Configuration and co-ordinates.

$$\mathcal{N}(\psi, \omega) \equiv \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x}, \quad \mathcal{M} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

である。ここで、 \mathcal{M} は2次元ラプラシアンである。上流境界条件として、円柱の十分上流 AB で流れは一樣流で、円柱の十分下流 CD でゾンマーフェルトの流出条件を用いる。円柱上では滑りなし条件を用いる。上下境界 AD と BC は十分遠方にとり、そこでは一樣流であるとする。

3. 定常解析

低いレイノルズ数においては、流れは2円柱間隔の中心を通る x 軸に対して対称で定常である。対称定常流に対応する解はレイノルズ数の大きさに関わらず境界条件のもとで基礎方程式 (1) と (2) を満たすが、この流れは臨界値を越えると不安定となる。この対称定常流、つまり、 $(\bar{\psi}, \bar{\omega})$ が線形安定性解析の主流である。定常解は、次の定常渦度輸送方程式およびポアソン方程式を満たす：

$$\mathcal{N}(\bar{\psi}, \bar{\omega}) + \frac{1}{Re} \mathcal{M} \bar{\omega} = 0, \quad (3)$$

$$\bar{\omega} = -\mathcal{M} \bar{\psi}. \quad (4)$$

方程式 (3) と (4) を適切な境界条件のもとに解くことで定常解は数値的に得られる。

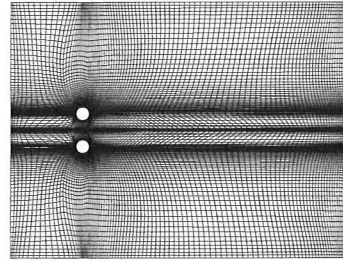
4. 線形安定性解析

レイノルズ数 Re が小さいとき、流れは2本の円柱の中心を通る流れに平行な中心線 (x -軸) に対して対称な定常流である。レイノルズ数が臨界値 Re_c を超えると、対称定常流は攪乱の成長により不安定となり、周期流に遷移する。対称定常流を $(\bar{\psi}, \bar{\omega})$ で表し、攪乱を (ψ', ω') と表すと、流れ関数および渦度 (ψ, ω) は次のように対称定常流と攪乱の和で表される：

$$\psi = \bar{\psi} + \psi', \quad \omega = \bar{\omega} + \omega'. \quad (5)$$

上式を基礎方程式 (1) と (2) に代入し定常流が満たす式を引くと、次の攪乱方程式が得られる。

$$\frac{\partial \omega'}{\partial t} = \frac{1}{Re} \mathcal{M} \omega' + \mathcal{N}(\psi', \bar{\omega}) + \mathcal{N}(\bar{\psi}, \omega') + \mathcal{N}(\psi', \omega'), \quad (6)$$

Fig. 2: Computational grid. $\Gamma = 1.5$

$$\omega' = -\mathcal{M} \psi'. \quad (7)$$

線形安定性解析においては式 (5) の右辺第 4 項 (非線形項) は十分小さいものとして無視する。攪乱 (ψ', ω') を $\psi' = \hat{\psi}(x, y) e^{\lambda t}$, $\omega' = \hat{\omega}(x, y) e^{\lambda t}$ のように時間依存成分と空間依存成分の積で表し、これらの式を方程式 (5) と (6) に代入し、非線形項を無視すると次式が得られる。

$$\lambda \hat{\omega} = \frac{1}{Re} \mathcal{M} \hat{\omega} + \mathcal{N}(\hat{\psi}, \bar{\omega}) + \mathcal{N}(\bar{\psi}, \hat{\omega}), \quad (8)$$

$$\hat{\omega} = -\mathcal{M} \hat{\psi}. \quad (9)$$

ここで λ は攪乱の複素線形増幅率である。

線形固有関数 $(\hat{\psi}, \hat{\omega})$ の境界条件として、円柱より十分上流 (AB) で $(\hat{\psi}, \hat{\omega})$ は 0 であるとし、十分下流 (CD) でゾンマーフェルト放射条件を用いる。また、計算領域側面境界 (AD と BC) で攪乱 $(\hat{\psi}, \hat{\omega})$ は 0 とし、円柱上では数値シミュレーションの場合と同様にすべりなし条件を用いる。 λ の実部 λ_r は攪乱の線形増幅率であり、 λ_r が負のとき対称定常流は安定であり、正のとき不安定である。よって、 $\lambda_r = 0$ となるときのレイノルズ数が臨界レイノルズ数 Re_c となる。

5. 数値計算法

流れの時間発展を調べるため、基礎方程式 (1) と (2) を初期値境界値問題として数値的に解く。数値シミュレーションでは、渦度 ω と流れ関数 ψ を用いて定式化し、差分近似を行う。計算領域として、円柱上流側に $L_1 = 5d$ 、下流側に $L_2 = 20d$ とし、幅は $L_3 = \ell/2 + 9d$ とする。また、計算格子として Steger and Sorenson⁶⁾ の楕円型方程式による格子生成法を用い、最小格子幅は円柱近傍で $0.01d$ 、最大格子幅は流出および上下境界において $0.1d$ となった。計算格子の例として、 $\Gamma = 1.5$ における計算格子を Fig. 2 に示す。この図のように、格子は円柱近傍において密であり、円柱から離れるにしたがって疎になる。これは、円柱近傍において速度場が急激に変化することを考慮に入れるためである。

数値シミュレーションにおいては、空間微分には 2 次

精度の中心差分を、時間微分については4次精度のルンゲ・クッタ法を用いて方程式を差分近似した。ポアソン方程式の解法にはSOR法を用いた。対称定常解の数値計算においては、空間微分に2次精度の中心差分を用いて方程式を近似し、SOR法を用いて計算を行った。ここで、 x 軸に対して対称な流れ場を求めるため ψ と $\bar{\omega}$ に y について反対称条件を課して計算を行った。線形安定性解析では、空間微分に2次精度の中心差分を用いて方程式を近似し、SOR法を用いて計算を行った。ここで、攪乱の線形固有関数 $(\hat{\psi}, \hat{\omega})$ には中心軸に対して対称条件を課した。

6. 計算結果

ここでは、レイノルズ数 $\Gamma \leq 100$ と間隔比 $0.3 \leq \Gamma \leq 1.0$ の範囲で数値シミュレーションを行った結果、流れ場はFig.3 (a) - 3(f)に示されるような6つの流れパターンに分類できることがわかった。

一様な流れに垂直におかれた2本の円柱を過ぎる流れは、レイノルズ数が低いとき x 軸に対して対称で定常な流れ(対称定常流)であるが、レイノルズ数が臨界値を超えると振動流または非対称定常流を経て偏向振動流へと遷移する。

間隔比が $\Gamma = 0.5$ の場合、レイノルズ数 $Re = 40$ では流れは対称な定常流であるのに対し(Fig. 3 (a))、 $Re = 50$

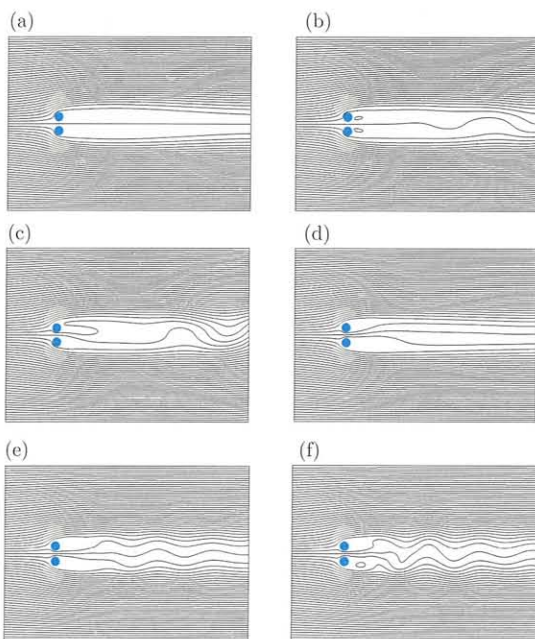


Fig. 3: Flow pattern. (a) Steady symmetric flow. $\Gamma = 0.5$, $Re = 40$, (b) Periodic flow. $\Gamma = 0.5$, $Re = 50$. (c) Periodic deflected flow. $\Gamma = 0.5$, $Re = 60$. (d) Steady asymmetric flow. $\Gamma = 0.6$, $Re = 57$. (e) In-phase-synchronized oscillatory flow. $\Gamma = 0.62$, $Re = 55$. (f) Periodic deflected flow. $\Gamma = 0.62$, $Re = 60$.

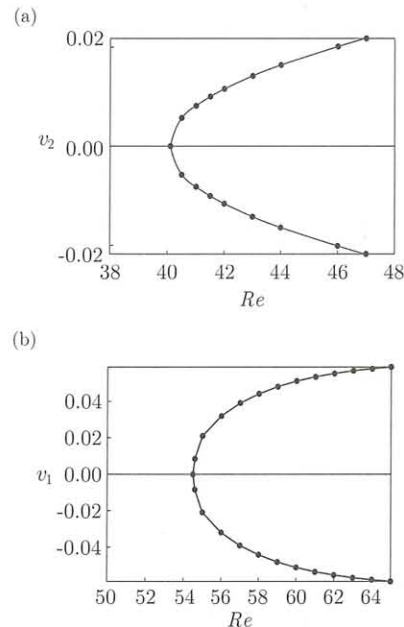


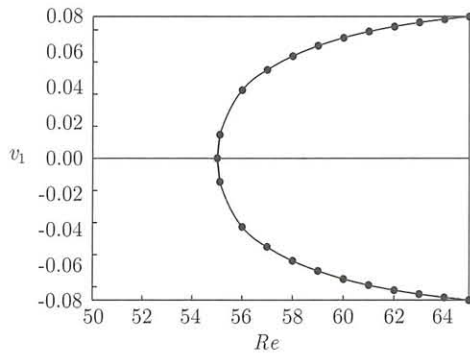
Fig. 4: Bifurcation diagram. $\Gamma = 0.5$. (a) Hopf bifurcation. (b) Pitchfork bifurcation.

では流れが x 軸に対して円柱よりかなり後方で振動する振動流となる(Fig. 3 (b))。このような対称定常流から振動流への遷移について調べるために、円柱の下流にある点 P_2 (Fig. 1)における y 方向速度 v_2 とレイノルズ数 Re との関係を調べて分岐図を描いた。

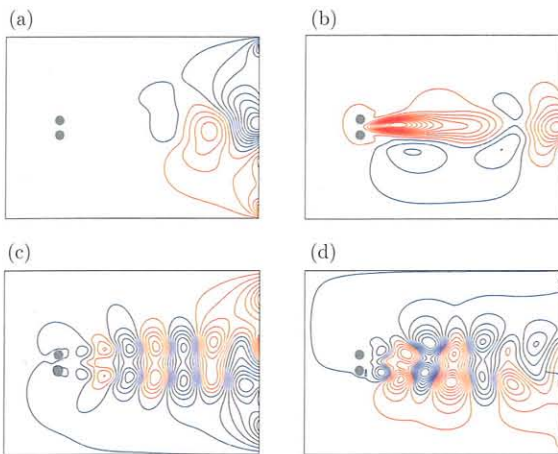
こうして得られた分岐図より、その分岐構造はホップ分岐であり、臨界レイノルズ数は $Re_c = 40.1$ であることがわかった。この分岐図をFig. 4(a)に示す。レイノルズ数を $Re = 60$ まで増やすと、流れは2本の円柱を過ぎた直後で偏向し、かつ円柱の下流で振動する偏向振動流が確認された(Fig. 3 (c))。ここで、流れが偏向する原因を調べるために、円柱下流の点 P_1 (Fig. 1)における y 方向速度 v_1 とレイノルズ数 Re との関係を調べた。これをFig. 4(b)に示す。その結果、この偏向振動流は臨界レイノルズ数を $Re_c = 54.6$ とするピッチフォーク分岐により生じているという奇妙な現象であることが判明した。つまり、 $\Gamma = 0.5$ の場合には、点 P_2 において、 $Re_c = 40.1$ とするホップ分岐が起き、さらにレイノルズ数を上げていくと、点 P_2 で $Re_c = 54.6$ とするピッチフォーク分岐が生じていることになる。

間隔比 $\Gamma = 0.6$ の場合、 $Re = 57$ では流れは非対称定常流となっている(Fig. 3 (d))。 $\Gamma = 0.5$ の場合と同様の手順で分岐図を描くと、流れは臨界レイノルズ数 $Re_c = 55.1$ を超えると対称定常流から非対称定常流へと遷移し、そのときの分岐構造はピッチフォーク分岐であることがわかった(Fig. 5)。

間隔比 $\Gamma = 0.62$ の場合、 $Re = 55$ では流れは2本円柱直後で振動している(Fig. 3 (e))。これまでと同様の方法で流速を測定したところ、 $Re_c = 54.5$ とするホップ分岐が

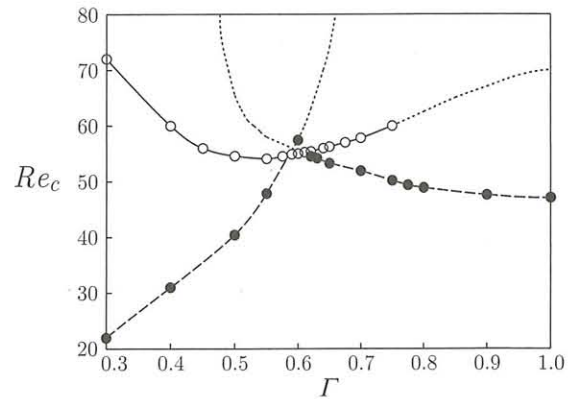
Fig. 5: Pitchfork bifurcation. $\Gamma = 0.6$.

得られた。さらに、定常解計算により $Re_c = 55.4$ とするピッチフォーク分岐が得られた。 $Re = 60$ の流れパターン (Fig. 3 (f)) ではピッチフォーク分岐の影響はわかりにくいため、攪乱 $\hat{\psi}$ を Fig. 6 に示す。 $Re = 55$ では上下対称な攪乱場であるが (Fig. 6 (c))、 $Re = 60$ ではピッチフォーク分岐の影響により、上下非対称な攪乱場が確認された (Fig. 6 (d))。

Fig. 6: Disturbance field. (a) $\Gamma = 0.5$, $Re = 50$, (b) $\Gamma = 0.6$, $Re = 60$. (c) $\Gamma = 0.62$, $Re = 55$. (d) $\Gamma = 0.62$, $Re = 60$.

また、 $\Gamma = 0.6$ 、 $Re = 60$ の攪乱場 (Fig. 6 (b)) をみると、 $\Gamma = 0.62$ 、 $Re = 60$ の攪乱場 (Fig. 6 (d)) とは明らかに異なることがわかる。攪乱場をみると、 $\Gamma = 0.6$ では円柱のかなり後方で振動しており、この振動は後流の不安定性が原因である。 $\Gamma = 0.62$ では流れ場全体で振動しており、この振動は円柱が存在することで振動している。つまり、偏向振動流の範囲において、 $0.6 < \Gamma < 0.62$ の非常に狭い範囲でモードが変わっていることがわかる。

本研究の結果を (Γ, Re_c) 平面にまとめると Fig. 7 のようになる。Fig. 7 より、この流れは臨界間隔比 $\Gamma_c = 0.58$ で、遷移の特性が変わり、 $\Gamma < 0.58$ では流れは対称定常流から振動流を経て偏向振動流に至り、 $0.58 < \Gamma < 0.62$

Fig. 7: Transition diagram. \circ : Pitchfork bifurcation, \bullet : bifurcation.

では対称定常流から非対称定常流を経て偏向振動流に至るパターンに遷移することがわかる。2本の円柱を過ぎる流れでピッチフォーク分岐が起こることは予期しない驚きであった。 $0.62 < \Gamma < 1.0$ では流れ場全体で振動流が生じ、この範囲での偏向振動流は $\Gamma < 0.62$ とは異なる流れであることがわかった。また、図中の点線は今後期待される線である。

参考文献

- 1) Y. Ohya, A. Okajima and M. Hayashi. "Wake Interference and vortex shedding", *Encyclopedia of Fluid Mechanics* (Ed. N. P. Chermisioff, Gulf Pub., Houston), 8 (1988) 323-389.
- 2) S. Ishigai, E. Nishikawa, K. Nishimura and K. Cho, "Experimental study on structure of gas flow in tube banks with tube axes normal to flow," *Bull. JSME*, 15, 949 (1972).
- 3) J. Mizushima and N. Suehiro, "Instability and transition of flow past two tandem circular cylinders", *Phys. Fluids*, 17 (2005) 104107-104107-11.
- 4) C. H. K. Williamson, "Evolution of a single wake behind a pair of bluff bodies", *J. Fluid Mech.*, 159 (1985) 1-18.
- 5) S. Kang, "Characteristics of flow over two circular cylinders in a side-by-side arrangement at low Reynolds number", *Phys. Fluids*, 15 (2003) 2468-2498.
- 6) L. J. Steger and L. R. Sorenson, "Automatic mesh-point clustering near a boundary in grid generation with elliptic partial differential equation", *J. Comp. Phys.*, 33 (1979) 405-410.
- 7) T. Akinaga, J. Mizushima "Linear Stability of Flow past Two Circular Cylinders in a Side-by side Arrangement", *J. Phys. Soc. Jpn.*, 74 (2005) 1366-1369.