

# 高次精度重み付きコンパクト差分法(WCNS)の解像度評価

野々村拓、飯塚宣行、藤井孝蔵  
東大院、東大院(現 JAXA)、JAXA

## Evaluation of Resolution of High Order Weighted Compact Non-linear Schemes

by  
Taku Nonomura, Nobuyuki Iizuka and Kozo Fujii

### ABSTRACT

The coefficients and the resolution of high order, seventh and ninth order Weighted Compact Nonlinear Schemes (WCNS) are investigated. The coefficients are calculated with using *MATHEMATICA*. Then Fourier analysis, one-dimensional shock-entropy interaction problem and two-dimensional duct flow problem are computed with high order WCNS. The solution of the high order WCNS have a high resolution on Fourier analysis and shock-entropy interaction problem, compared to fifth order WCNS. On the other hand, two-dimensional duct flow can not be solved with ninth order WCNS because the numerical oscillation occurs. However the problem can be solved with seventh order WCNS without numerical oscillation. The resolution of the solution of seventh order WCNS is higher than fifth order WCNS and MUSCL. Thus seventh order WCNS is a good scheme to apply engineering problems.

### 1. 緒言

近年乱流解析や音響解析のために DNS や LES などの大規模計算が行われるようになってきた。Balsara ら<sup>1)</sup>によれば、8 次精度スキームは 2 次精度スキームの 4 倍程度解像度が高いため、たとえば 3 次元問題では各空間方向と時間方向の計 4 方向に各 4 倍少ない離散化で済み、1step あたりに計算コストが 3 倍かかったとしてもトータルとして 4<sup>4</sup>/3 倍(≒100 倍)のコスト削減になる。このような背景から大規模計算のために様々な高次精度(高解像度)スキームが開発されている。

また Shu<sup>2)</sup>が指摘しているように多次元で高次精度スキームを構築する際には、多次元的な分布を考慮して計算しなければならぬ有限体積法、有限要素法に対して、各方向の 1 次元的高次精度化のみを考慮すればよい差分法が最も低コストで計算できる(3 次元で体積法の 1/10 程度)。このため、低コスト化の観点から、差分法で高次精度化を行うことが望まれる。

近年の高次精度の差分スキームをあげると、Lele<sup>3)</sup>によって提案され、Gaitonde と Visbal<sup>4)</sup>によって一般座標に適應された Compact スキームや衝撃波を含む流れ場に対する差分法版の WENO<sup>1,2,5)</sup>(以下 WENO と示す)、WCNS<sup>6-8)</sup>などの不連続捕獲スキームがある。

著者らは、WENO、WCNS に対して、一般座標系で定式化した場合に一樣流保持できるか否かを調べた。結果、WENO では一樣流保持が難しかったのに対し、WCNS は Gaitonde と Visbal のアイデア<sup>4)</sup>を用いることにより一樣流保持が出来ることが示された。<sup>9)</sup>また WCNS と同様の考えを用いた point flux WENO<sup>10)</sup>も同様の特性を持っていると考えられる。WENO、WCNS の計算コストと解像度はほとんど変わらず、WCNS は、差分法ベースの WENO では出来ない FDS、FVS、AUSM 系などの様々な流束計算法を用いることが出来る、変数補間が可能、著者らが示した一樣流保持性といった利点があるため、一般座標系での適應を考えた場合 WCNS が有効であると考えられる。

そこで著者らは、これまで 5 次精度までしか示されていなかった WCNS を 7~9 次精度に拡張した。<sup>11)</sup>著者らは付け加えて、Deng らが 5 次精度 WCNS でしめたように<sup>7-8)</sup>、高次精度 WCNS に対してもセル境界からセル節点への差分をコンパクトで解いたものと陽的に解いたものを比べた際に、その解像度がほとんど変わらないことを明らかにして、計算コストの小さい陽的な差分を薦めている。

本研究では、改めて WCNS の計算方法、7 および 9 次精度 WCNS の係数を示し、次に精度を変えた場合の WCNS の解像度と安定性をフーリエ解析、1 次元問題及び 2 次元問題へ適応して議論する。

### 2. WCNS

WCNS では Lagrange 補間を用いてセル境界での流束を計算した後、セル境界からセル節点への差分を行う。本章では高次精度 WCNS において数値的に計算される Lagrange 補間スキームとセル境界からセル節点への差分スキームの係数を示す。本研究ではこの係数を *MATHEMATICA* を用いて求めた。

#### (1) セル境界への重み付き Lagrange 補間

WCNS の高次精度化の手法は、一般的な差分型の WENO と異なっている。WENO では差分を施した際に高次精度になる数値流束を用いて高次精度化するのに対して、WCNS は物理量をセル境界に Lagrange 補間したのち、その補間された物理量を用いて数値流束を構築することで高次精度化をはかる。このような Lagrange 補間で高次精度を得る際には補間に物理量を用いることが出来る。この数値流束の違いは著者らの発表論文<sup>9)</sup>を参考にされたい。

この数値流束を求めるための物理量の補間の際には、以下に示す WENO の重み付き平均の考え方をを用いている。数値流束  $\tilde{F}_{j+1/2}$  は MUSCL 法のように重み付き平均の物理量の左右にバイアスした補間  $\tilde{U}_{j+1/2}^L, \tilde{U}_{j+1/2}^R$  から作られる。

$\tilde{U}_{j+1/2}^L$  の構成方法を示す。2r-1 次精度の時、j+1/2 を補間する際に用いる k 番目(=1...r)のステンシル  $S_{j,k}$  は以下のようになる。

$$S_{j,k} = \{j-r+k, j-r+k+1, \dots, j+k-1\} \quad (1)$$

実際の手順は以下のようになる。2r-1 次精度の物理量補間の場合、以下に示す r 次精度の r 個のステンシル  $S_{j,k}$  それぞれから最大精度の U の n(=1...r-1)階微分の j での値  $\tilde{U}_{j,k}^{(n)}$  (k = 1, ..., r) を以下の差分の形で求める。

$$\tilde{U}_{j,k}^{(n)} = \left(\frac{1}{\Delta x}\right)^n \sum_{l=0}^{r-1} a_{k,l}^n U_{j-r+k+l} \quad (2)$$

7 次及び 9 次精度の上式での  $a_{k,l}^n$  を表 1~7 に示す。

このように1~r-1階微分がk番目のステンシルで表される時、k番目のステンシルを用いたセルノードへの物理量の補間  $U_{j,k}$  は

$$\tilde{U}_{j+\frac{1}{2},k}^L = U_j + \sum_{n=1}^{r-1} \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^n \left(\frac{1}{n!}\right) \tilde{U}_{j,k}^{(n)} \quad (3)$$

となる。

すべてのステンシルで物理量の分布が滑らかな場合、それぞれのステンシルから作られた補間の線形結合として2r-1次精度の補間が構成できる。この2r-1次精度を達成する最適な重みを  $C_k$  とすると2r-1次精度の  $\tilde{U}_{j+\frac{1}{2}}^L$  は以下のよう示される。

$$\tilde{U}_{j+\frac{1}{2}}^L = \sum_{k=1}^r C_k \tilde{U}_{j+\frac{1}{2},k}^L \quad (4)$$

ここで用いられる7, 9次精度の  $C_k$  は表8, 9に示される。しかしながら、実際にはいくつかのステンシルが滑らかな場合がある。この時に振動を抑えるために最適な重み  $C_k$  でなくスムーズインジケータ  $IS_{j,k}$  を使って滑らかなステンシルのみの結合となるような非線形な重み  $w_k$  を計算し、これを用いて重み付き平均を求める。実際には  $\tilde{U}_{j+\frac{1}{2}}^L$  は以下の式で表される。

$$\tilde{U}_{j+\frac{1}{2}}^L = \sum_{k=1}^r w_k \tilde{U}_{j+\frac{1}{2},k}^L \quad (5)$$

ここで重み  $w_k$  は

$$w_k = \frac{\alpha_k}{\sum_{i=1}^r \alpha_i} \quad (6)$$

であり、 $\alpha_k$  は以下の式で表される。

$$\alpha_k = \frac{C_k}{(IS_k + \epsilon)^p} \quad (7)$$

ここで  $IS_k$  は

$$IS_{j,k} = \sum_{n=1}^{r-1} (\tilde{U}_{j,k}^{(n)})^2 \quad (8)$$

で  $\epsilon$  は  $10^{-6}$ 、 $p$  は2とした。このように設計することで、すべて滑らかなステンシルであった場合  $w_k$  は  $C_k$  に近づき2r-1次精度の補間となることが出来る。 $\tilde{U}_{j+\frac{1}{2}}^R$  は  $\tilde{U}_{j+\frac{1}{2}}^L$  に対称に計算すればよい。

なお、実際には、変数  $\tilde{U}_{j,k}$  の補間は特性量に変換してから行っている。

表1 7次精度(r=4)WCNSの  $a^1_{k,l}$

	$a^1_{k,1}$	$a^1_{k,2}$	$a^1_{k,3}$	$a^1_{k,4}$
k=1	-1/3	3/2	-3	11/6
k=2	1/6	-1	1/2	1/3
k=3	-1/3	-1/2	1	-1/6
k=4	-11/6	3	-3/2	1/3

表2 7次精度(r=4)WCNSの  $a^2_{k,l}$

	$a^2_{k,1}$	$a^2_{k,2}$	$a^2_{k,3}$	$a^2_{k,4}$
k=1	-1	4	-5	2
k=2	0	1	-2	1
k=3	1	-2	1	0
k=4	2	-5	4	-1

表3 7次精度(r=4)WCNSの  $a^3_{k,l}$

	$a^3_{k,1}$	$a^3_{k,2}$	$a^3_{k,3}$	$a^3_{k,4}$
k=1	-1	3	-3	1
k=2	-1	3	-3	1
k=3	-1	3	-3	1
k=4	-1	3	-3	1

表4 9次精度(r=4)WCNSの  $a^1_{k,l}$

	$a^1_{k,1}$	$a^1_{k,2}$	$a^1_{k,3}$	$a^1_{k,4}$	$a^1_{k,5}$
k=1	1/4	-4/3	3	-4	25/12
k=2	-1/12	1/2	-3/2	5/6	1/4
k=3	1/12	-2/3	0	2/3	-1/12
k=4	-1/4	-5/6	3/2	-1/2	1/12
k=5	-25/12	4	-3	4/3	-1/4

表5 9次精度(r=4)WCNSの  $a^2_{k,l}$

	$a^2_{k,1}$	$a^2_{k,2}$	$a^2_{k,3}$	$a^2_{k,4}$	$a^2_{k,5}$
k=1	11/12	-14/3	19/2	-26/3	35/12
k=2	-1/12	1/3	1/2	-5/3	11/12
k=3	-1/12	4/3	-5/2	4/3	-1/12
k=4	11/12	-5/3	1/2	1/3	-1/12
k=5	35/12	-26/3	19/2	-14/3	11/12

表6 9次精度(r=5)WCNSの  $a^3_{k,l}$

	$a^3_{k,1}$	$a^3_{k,2}$	$a^3_{k,3}$	$a^3_{k,4}$	$a^3_{k,5}$
k=1	3/2	-7	12	-9	5/2
k=2	1/2	-3	6	-5	3/2
k=3	-1/2	1	0	-1	1/2
k=4	-3/2	5	-6	3	-1/2
k=5	-5/2	9	-12	7	-3/2

表7 9次精度(r=5)WCNSの  $a^4_{k,l}$

	$a^4_{k,1}$	$a^4_{k,2}$	$a^4_{k,3}$	$a^4_{k,4}$	$a^4_{k,5}$
k=1	1	-4	6	-4	1
k=2	1	-4	6	-4	1
k=3	1	-4	6	-4	1
k=4	1	-4	6	-4	1
k=5	1	-4	6	-4	1

表8 7次精度(r=4)WCNSの  $C_k$

	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$
	1/64	21/64	35/64	7/64

表9 9次精度(r=5)WCNSの  $C_k$

	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$
	1/256	9/64	63/128	21/64	9/256

(2)セル境界からセル節点への差分スキーム

(1)で示した補間を行った後、 $\tilde{U}_{j+\frac{1}{2}}^L$   $\tilde{U}_{j+\frac{1}{2}}^R$  よりFDSなどの流束計算法を用いて数値流束  $\tilde{F}_{j+\frac{1}{2}}$  を決定する。この後、セル境界での数値流束を用いて、セル節点での微分を求める。この式は一般的に以下のように書かれる。

$$\begin{aligned} & \beta \tilde{F}_{j-2}^{(1)} + \alpha \tilde{F}_{j-1}^{(1)} + \tilde{F}_j^{(1)} + \alpha \tilde{F}_{j-1}^{(0)} + \beta \tilde{F}_{j-2}^{(0)} \\ &= \frac{a}{\Delta x} (\tilde{F}_{j+1/2} - \tilde{F}_{j-1/2}) + \frac{b}{\Delta x} (\tilde{F}_{j+3/2} - \tilde{F}_{j-3/2}) \quad (9) \\ &+ \frac{c}{\Delta x} (\tilde{F}_{j+5/2} - \tilde{F}_{j-5/2}) + \frac{d}{\Delta x} (\tilde{F}_{j+7/2} - \tilde{F}_{j-7/2}) \\ &+ \frac{e}{\Delta x} (\tilde{F}_{j+9/2} - \tilde{F}_{j-9/2}) \end{aligned}$$

この WCNS の精度は前節の補間の精度と上述のセル境界からセル節点への差分の精度の低いほうで決定される。本研究では、Deng らや我々が示したように 3 重対角や 5 重対角と陽的な差分の解像度の差はほとんどないと考えて、計算効率の高い陽的な差分 ( $\alpha=\beta=0$ ) を用いている。

しかしながら、実際の適応時には、ステンシルの少ない 3 重対角や 5 重対角も境界条件の取り扱いが楽になるため問題に応じてこれらを変える必要があると考えられる。

8 次精度と 10 次精度の陽的なセル境界からセル節点への差分の係数を表 10、11 に示す。本論文では 7 次精度と 9 次精度の WCNS はそれぞれ 8 次精度、10 次精度のセル境界からセル節点への差分を用いている。

以下では、5、7 及び 9 次精度の WCNS をそれぞれ WCNS5、WCNS7 及び WCNS9 と表す。

表 10 陽的 8 次精度差分の係数 ( $\alpha=\beta=0$ )

a	b	c
1225/1024	-245/3072	49/5120
d	e	
-5/7168	0	

表 11 陽的 10 次精度差分の係数 ( $\alpha=\beta=0$ )

a	b	c
19845/16384	-735/8192	567/40960
d	e	
-405/229376	35/294912	

### 3. Fourier 解析

本章では高次精度 WCNS の解像度を解析的な評価を示す。解析したスキームは WCNS5、WCNS7、WCNS9 と Padé 型の線形 6 次精度コンパクト差分 (以下 Padé6 と表記) である。すべて滑らかな領域と仮定し、理想的な重みを用いたと仮定して解析を行った。解析の方法は以下のようである。

$$U_j = \exp(i w x_j) \quad (10)$$

を  $\Delta x=1$  の格子上でスキームを用いて数値的に微分した時に、数値的な一階微分  $U_j'$  は、

$$U_j' = i w^* \exp(i w x_j) \quad (11)$$

と表される。この  $w^*$  を  $w$  に対して解析的に解いた。理想的には  $w^*=w$  となるのが望ましい。結果を図 1 に示す。横軸が計算前の波の波数で縦軸が微分スキームの評価した波数である。ここで、Spectral で表される直線に近いほうが、解像度が高いことを示している。厳密解や中心差分スキームでは  $w^*$  の虚数部分は表れないが、風上差分となることによって  $w^*$  の虚数部分も現れる。

図 1 より、WCNS の精度を上げることで、実部、虚部ともに、解像度が上がっていることがわかる。

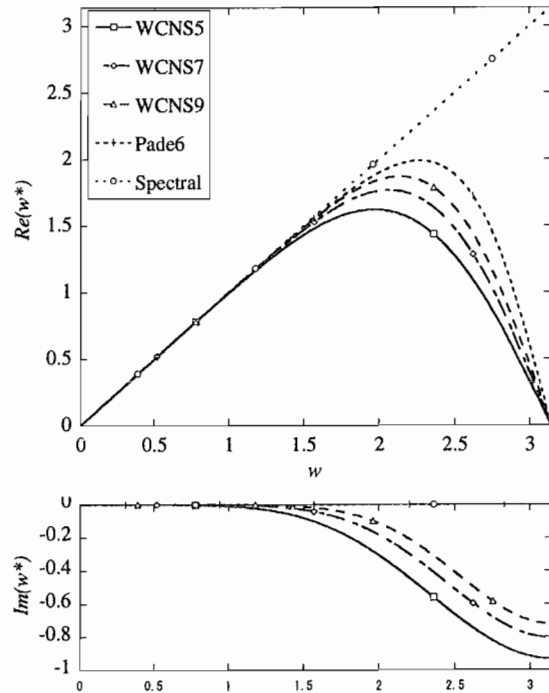


図 1 波数  $w$  とスキームによって評価された波数  $w^*$  の実部と虚部

### 4. 1 次元問題

本章では、実際に高次精度 WCNS を用いて Euler 方程式の 1 次元衝撃波-エントロピー波干渉問題を解いている。初期条件は以下の式で表される。

$$U(x, t=0) = \begin{cases} U_L & (x \leq 4) \\ U_R & (x > 4) \end{cases} \quad (10)$$

$$(\rho_L, u_L, p_L) = (3.857143, 2.629369, 10.3333)$$

$$(\rho_R, u_R, p_R) = (1 + 0.2 \sin(0.5\pi x), 0, 1)$$

時間積分には Total Variation Diminishing Runge-Kutta スキーム<sup>(12,13)</sup>を用いた。流束評価には Lax-Friedrich Flux-Splitting を用いた。空間方向に 200 点で離散化し、CFL 条件を 0.4 として、時間  $t=2.0$  の計算結果を求めた。WCNS5、WCNS7、WCNS9 の計算結果と解析解として WCNS9 を用いて 1600 点で解いたもの (“exact” と表記) を図 2 に示す。すべてのスキームで衝撃波を振動することなく捕らえられている。さらに高次精度にすることによって衝撃波背後の波をよく捕らえられていることがわかる。

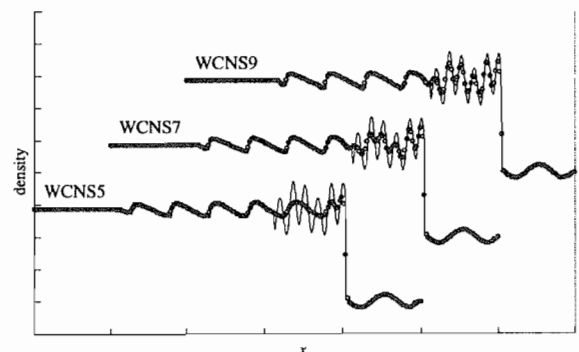


図 2 5、7、及び 9 次精度の WCNS スキームの比較 (衝撃波-エントロピー波干渉問題 ( $T=2.0$ ))



## 5. 2次元問題

Woodward と Collela による Mach 数 3 のダクト流れ<sup>14)</sup>を計算した. 本検証問題は衝撃波を振動しないで捉えるか否か、かつ 3 重点の下流で発生する、せん断層をシャープに捕らえられるか否かをみる問題である.

計算格子点は  $81 \times 241$  の直交格子を用いた. 音速とダクトの縦の長さで無次元化を施し、Mach 数 3 の流入条件を与えている.

また時間積分には TVD-RK を用いて、時間刻み  $\Delta t = 0.005$  として時間  $t = 4.0$  まで計算した.

壁面境界条件には仮想セルを設け、壁面内側の物理量を速度のみ反転させて与えている. このため境界での精度低下は起きていない. しかしながら、スキームの特性などにより衝撃波の反射の様子が少しではあるが変化している. 本研究では境界の影響を調べるものではなく、内部スキームの評価をするものであるため、この点は議論しないこととする.

本問題を MUSCL、WCNS5、WCNS7、WCNS9 で計算した. 流束評価には SHUS<sup>15)</sup> と van Leer<sup>16)</sup> による FVS を用いた.

しかしながら WCNS9 では、境界付近で非物理的な擾乱が生まれ、計算が破綻してしまった. 非常に高い精度の重みつきスキームに関しては振動することが知られており、monotonicity preserving WENO<sup>1)</sup> のように、振動を防ぐためにリミターを入れることが考えられている. このようなアイデアを用いることで、本問題での計算の破綻は防ぐことが出来るかもしれないが、スキームが煩雑になり取り扱いにくくなることを考えて、本研究では WCNS9 の改良を行っていない. 実問題に近い形で計算する際には、WCNS9 は何らかの処置をしない限り、安定性に疑問が残ると考えられる.

次に MUSCL、WCNS5、WCNS7 の計算結果に移る.

SHUS での計算結果を図 3、4 に FVS での結果を図 5、6 に示す. 7 次精度の SHUS の結果は、若干の振動が見られるものの、十分な衝撃波捕獲性能が見られている. また計算結果から精度が上がるにつれて、せん断層がよりシャープに捕らえられている. 特に 7 次精度の計算結果では、計算領域右側に K-H 不安定性による渦が生まれていることがわかる. すなわち、精度を上げることで解像度が上がっていることがわかった.

また 7 次精度 WCNS において、流束評価が FVS の結果と SHUS の結果を比較すると、FVS のほうが数値的な振動が少なくなり、それに伴って、せん断層の解像度も下がっていることがわかる. すなわち、当然ではあるが、低次精度の MUSCL と同様に高次精度 WCNS でも流束評価法を変えることで、計算結果は変化し、流束評価法の特徴を引きずった解となることが確かめられた.



(a)MUSCL



(b)WCNS5

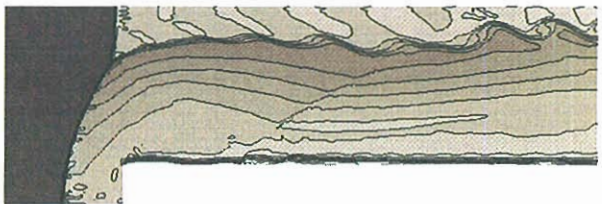


(c)WCNS 7

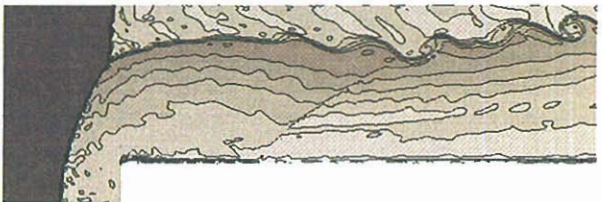
図 3 Mach3 ダクト流れ検証問題  
(流束:SHUS、密度 0.5~4.5)



(a)MUSCL



(b)WCNS5



(c)WCNS 7

図 4 Mach3 ダクト流れ検証問題  
(流束:SHUS、エントロピー 0.1~0.8)





(a)MUSCL

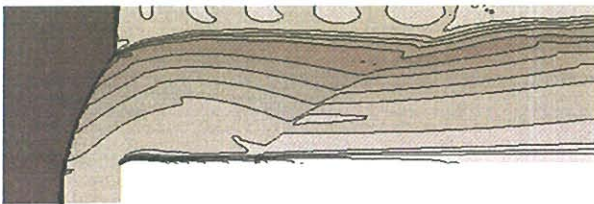


(b)WCNS5

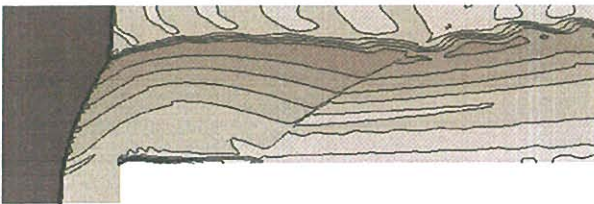


(c)WCNS 7

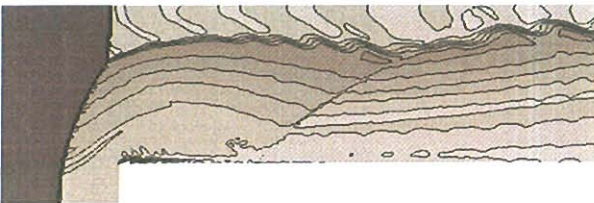
図 5 Mach3 ダクト流れ検証問題  
(流束:FVS、密度 0.5~4.5)



(a)MUSCL



(b)WCNS5



(c)WCNS 7

図 6 Mach3 ダクト流れ検証問題  
(流束:FVS、エントロピー0.1~0.8)

## 6. まとめ

7次精度、9次精度のWCNSの係数を示しフーリエ解析、1次元問題、2次元問題への適用を行った。

フーリエ解析では精度を上げることで、解像度が上がることが示された。1次元問題においても、精度を上げてWCNSは安定性を保ったまま、解像度を上げることが示された。

しかしながら2次元Mach数3、ダクト問題においては、9次精度WCNSは計算が破綻してしまった。リミターのようなものを入れることで防ぐことが出来ると考えられるが、そのままでは安定性に疑問が残ると考えられる。一方7次精度WCNSは安定に計算ができ、MUSCLや5次精度WCNSよりもせん断層をシャープに捕らえており、解像度が上がることが示された。実問題への適用には7次精度WCNSが適当と考えられる。

## 参考文献

- 1) Balsara, D. and Shu, C.-W. "Monotonicity preserving weighted essentially non-oscillatory schemes with increasing high order of accuracy," *J. Comput. Phys.*, **160**, pp. 405-452, 1996
- 2) Shu, C.-W. "High-order Finite Difference and Finite Volume WENO Schemes and Discontinuous Galerkin Methods for CFD," *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, **17**(2), pp. 107-118, 2003
- 3) Lele, S. K. "Compact finite difference schemes with spectral-like resolution." *J. Comput. Phys.*, **103**, pp.16-44, 1992
- 4) Gaitonde, D. V. and Visbal, M. R. "Further development of a Navier-Stokes solution procedure based on higher-order formulas," *AIAA Paper* 99-0557, 1999
- 5) Jiang, G.-S. and Shu, C.-W., "Efficient implementation of weighted ENO schemes", *J. Comput. Phys.*, **126**, pp. 200-212, 1996
- 6) Deng, X. G. and Zhang, H., "Developing high-order weighted compact nonlinear schemes," *J. Comput. Phys.*, **165**, pp.22-44, 2000
- 7) Deng X. G. and Mao, M., "Studying of Weighted Compact High-order Nonlinear Scheme WCNS-E-5 for Complex Flows," *Computational Fluid Dynamics Journal*, **13**, pp.173-180, 2004
- 8) Deng X. G., Liu, X., and Zhang, H., "Investigation of Weighted Compact High-order Nonlinear Scheme and Application to Complex Flow," *AIAA Paper* 2005-5246, (2005)
- 9) 野々村拓, 飯塚宣行, 藤井孝蔵, "一般座標における高次精度不連続捕獲スキームの一樣流保持性," 第19回数値流体力学シンポジウム講演要旨集, pp.71, 2005
- 10) Kudryavtsev, A. N. and Khotyanovsky, D. V. "Application of WENO Schemes for Numerical Simulation of high-Speed Flows," presented at International Conference of Computational Fluid Dynamics 4, 2006.
- 11) 野々村拓, 飯塚宣行, 藤井孝蔵, "高次精度重み付きコンパクト差分法(WCNS)の解像度評価," 第11回計算工学講演会講演集, 2005
- 12) Shu C.-W. and Osher, S., "Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes," *J. Comput. Phys.* **77** pp.439-471, 1988
- 13) Shu C.-W. and Osher, S., "Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes II," *J. Comput. Phys.* **83**, pp.32-78, 1989
- 14) Woodward P. and Collela P., "The numerical simulation of two dimensional fluid with strong shock," *J. Comput. Phys.* **54**, pp.115-173, 1984
- 15) Van Leer, B., "Flux-vector Splitting for the Euler Equations," ICASE Report 82-293, 1982.

- 16) Shima E. and Jounouchi T., "Role of CFD in Aeronautical Engineering (No14) -AUSM type Upwind Schemes-," *Proceedings of the 14<sup>th</sup> NAL Symposium on Aircraft Computational Aerodynamics*, pp. 7-12., 1997.