

# PIV 風洞実験結果による CFD の圧力推定

麻生 智大, 松島 紀佐, 中橋 和博  
東北大学大学院工学研究科

## CFD estimation pressure using PIV data

by

Tomohiro ASO, Kisa MATSUSHIMA and Kazuhiro NAKAHASHI

### ABSTRACT

In this study, the pressure estimation system was developed to enhance the value of PIV (Particle Image Velocimetry) measurement technique. The system conducts CFD(Computational Fluid Dynamics) computation to estimate pressure using PIV velocity data. The Poisson equation for pressure is the basic equation for the computation. After developing the CFD, the pressure estimation system was verified by using Navier-Stokes simulation results. Instead of PIV data, the velocity data of the simulation results were used as input data, and pressure values were calculated by the system. Then, the calculated pressure values were compared with those resulted by the Navier-Stokes simulation. After the validation check, pressure estimation using experimental data was done. The experimental data came from the experiment of wake measurement of a cranked arrow wing in JAXA's low-speed wind tunnel. Moreover, the influence of the measurement error to the system was evaluated. The evaluation can predict the correlation between measurement errors in velocity data and errors in estimated pressure values. The artificially generate errors were distributed over the original input velocity data. Then, analysis was done comparing pressure values obtained without the error and those with the error. It was found that input error magnitude reduced on the calculated pressure value.

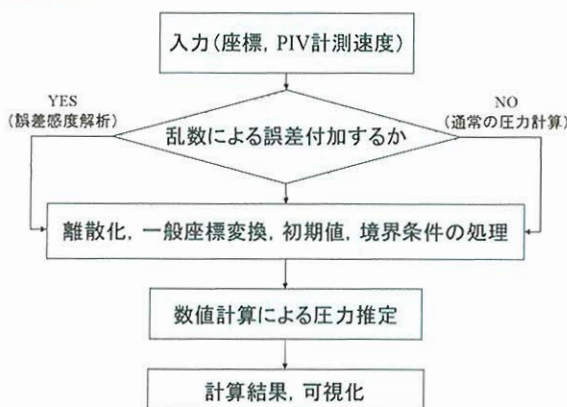
#### 1. はじめに

近年注目されている実験計測手法に PIV(Particle Image Velocimetry)と呼ばれるレーザー利用の流速計測技術がある[1]. PIV は非接触計測, 瞬時速度場が計測できるなどの有望な特徴を持っているが, 計測できる物理量が流速のみである. 空力設計には圧力値が必要であるが, その計測ができない. PIV の速度データを用いて数値計算により圧力値を求めようとする事は双方のメリットを活かすという点で重要である[2][3]. そこで, 本研究では PIV の有用性を高めるため, 速度から圧力を推定するための CFD (Computational Fluid Dynamics) を用いた圧力推定システムの開発を行う. また, 本圧力推定システムに計測誤差の入った実験値が入力された場合の影響についても検討を行う.

#### 2. CFD を用いた圧力推定システム

開発した圧力推定システムの内容を以下に図で示す.

#### 開発した圧力推定システム



判断部分の乱数による誤差付加は, 後述する PIV で計測した速度の計測誤差がどの程度の感度で圧力の推定値の誤差につながるかということ解析するためであり, 通常の圧力推定の目的では誤差付加しない.

#### 3. 解法

速度から圧力を求めるためには, 圧力推定式の右辺が全て速度の項で表されていなければならない. そこで, 圧力の Poisson 方程式を用いる.

PIV 実験を意識し二次元平面で考える.  $y, z$  の二次元平面で用いることのできる圧力の Poisson 方程式は, 三次元非圧縮 Navier-Stokes 方程式の発散をとり, 一様流 ( $x$  軸) 方向の速度勾配を 0 と仮定し, 時間について定常とすることで(1)式の無次元化された形で得られる.

$$\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = - \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + v \frac{\partial D}{\partial y} + w \frac{\partial D}{\partial z} \right] + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 D}{\partial z^2} \right) \quad (1)$$

$$\left( D = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

$v, w$  はそれぞれ  $y, z$  軸方向の速度,  $p$  は圧力,  $\text{Re}$  はレイノルズ数である.

(1)式の右辺は全て速度の項である. この方程式を差分法で解く. 全ての項は二次精度中心差分で離散化した. また, 様々な座標系に対応できるように一般座標変換

$$\begin{aligned} f_y &= \eta_y f_\eta + \zeta_y f_\zeta \\ f_z &= \eta_z f_\eta + \zeta_z f_\zeta \end{aligned} \quad (2)$$

も施した[4].

圧力の Poisson 方程式は離散化すると連立一次方程式に帰着する. したがって, 連立一次方程式を解くための具体的な数値計算法が必要となる. 本研究では SOR 反復法を用いる[5].

デカルト座標系での圧力の Poisson 方程式をあらためて書くと

$$\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = R\_Po \quad (3)$$

$R\_Po$  は(1)式の右辺の評価値. (3)式を離散化して反復法を用いるために変形すると(4)式になる.

$$p_{k,l}^{n+1} = p_{k,l}^n + \frac{1}{4} \omega \left( p_{k+1,l}^{n+1} + p_{k-1,l}^{n+1} + p_{k,l+1}^{n+1} + p_{k,l-1}^{n+1} - 4p_{k,l}^n - R\_Po_{k,l}^n \right) \quad (4)$$

ただし,  $\omega$  は過緩和係数で, 1.55 に設定した.

$$p_{k,l}^{n+1} = p_{k,l}^n + \omega \Delta p_{k,l}^n \quad (5)$$

ここで,

$$\Delta p_{k,l}^n = \frac{1}{4} (p_{k+1,l}^n + p_{k-1,l}^n + p_{k,l+1}^n + p_{k,l-1}^n - 4p_{k,l}^n - R_{-} Po_{k,l}^n) \quad (6)$$

(6)式の反復を  $\Delta p$  の絶対値が一定値以下になるまで繰り返すことで圧力を求めることができる。今回はこの反復を6000回繰り返すか、 $\Delta p$  が  $10^{-10}$  より小さくなった場合収束したとみなすことにする。

#### 4. 圧力推定計算の検証

まず初めに、本研究で開発した圧力推定手法を Navier-Stokes シミュレーションコードを用いて検証する。N-S シミュレーション結果の速度  $u, v, w$  を後流計測データの代わりに与えて本圧力推定システムで圧力を算出し、その算出された圧力を N-S シミュレーションより算出された圧力と比較する。

検証対象の流れ場は翼断面 NACA0012 の矩形翼回りの流れ場で、翼回り、スパン方向、翼上下方向に対して  $501 \times 50 \times 81$  の構造格子を用いた (図1)。コード長は1.0、スパン長は2.0、条件はレイノルズ数  $Re=3 \times 10^6$ 、一様流マッハ数  $M_\infty=0.35$ 、迎え角  $\alpha=3.2741(\text{deg})$  とした。無次元化する場合の基準長さはコード長、基準速度は一様流速度、基準密度は一様流での密度としている。計算は翼後縁から4.5コード長の位置の後流面で行っている。初期値として  $y-z$  面全体に一様流での圧力  $P_\infty$  を与えた。境界の処理は、スパン方向最大の境界では N-S シミュレーションより算出された圧力で固定する Dirichlet 条件を与え、それ以外は境界の圧力値が一層内側と同じ値を持つ、つまり勾配=0 という同次 Neumann 条件を与えた。

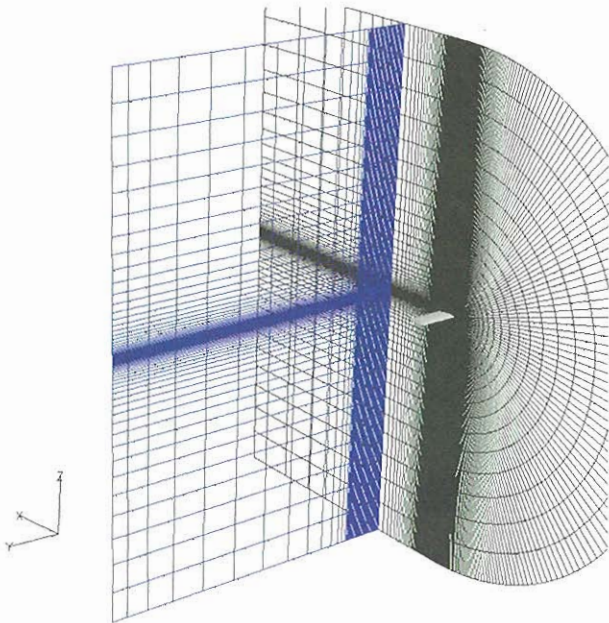


図1 構造格子図

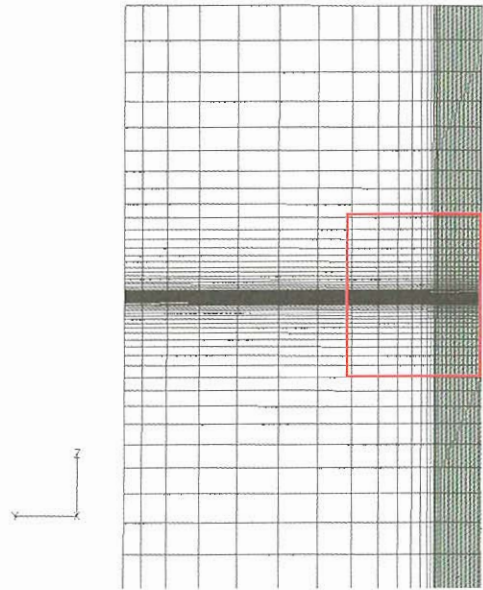


図2 後流面での格子図

図2の赤線で覆われた範囲の結果を図3と4に示す。図3はN-Sシミュレーションの結果、図4は圧力の Poisson 方程式より算出された結果である。

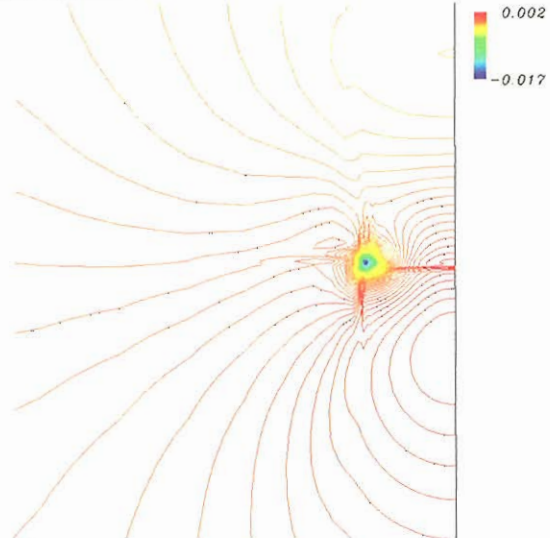


図3 圧力係数分布図 (N-S シミュレーション)

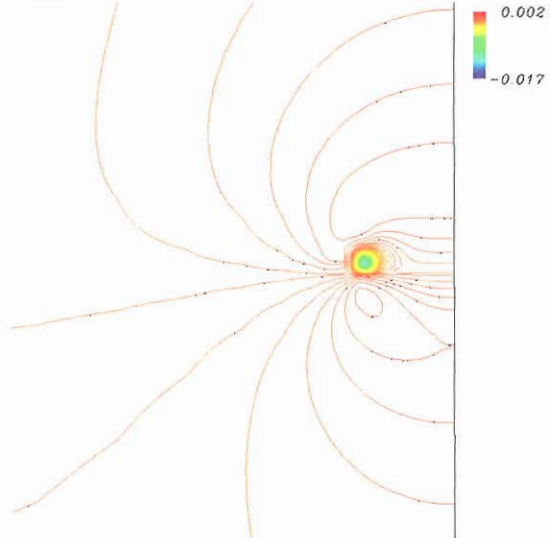


図4 圧力係数分布図 (圧力の Poisson 方程式)

圧力の Poisson 方程式を用いた圧力推定は、翼端渦の現象をはっきりと捉えており、またその位置も一致している。N-S シミュレーションの結果に対し最大の誤差は翼端渦付近で約 10%あるが、それ以外の部分では誤差は小さい。条件の一樣流マッハ数が 0.35 と一般に非圧縮性流体と仮定できる 0.3 をやや超えていること、数値計算手法より密度は一定だとしていることなどが定量的なずれの要因だと考えられる。翼端渦付近など流れが複雑な場所では、三次元性があると考えられるので、どうしてもその点が影響してくる。定量的な精度を上げるとすれば、そのような場所では三次元計測をするなどの手段を取る必要が出てくる。これらを考慮して計算推定圧力値を受け入れれば、本圧力推定システムは有効であるといえる。

5. 圧力推定システム適用の結果と考察

N-S シミュレーションとの比較で本圧力推定システムの有用性を検証できた。続いて実験による後流計測データを用いた圧力推定を行う。計測データの速度は 7 孔ピトー管で計測されたもので PIV データではないが、速度と圧力が求まっている実験値の例として圧力推定システムに適用するのにふさわしいと考えた。

後流計測データは 2m×2m 低速風洞における SST 実験機模型データである。図 5 に SST 実験機模型の図と計測面 (Measurement Plane) を示す。速度計測とともにピトー管でも圧力を計測している。一樣流流速  $U_\infty$  は約 30m/s、迎え角 7.02deg の条件で計測されている。計測点は水平方向に 110 点、垂直方向に 59 点である。その他のデータを以下に示す。

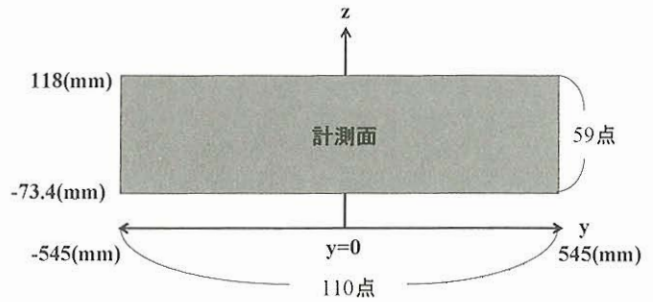
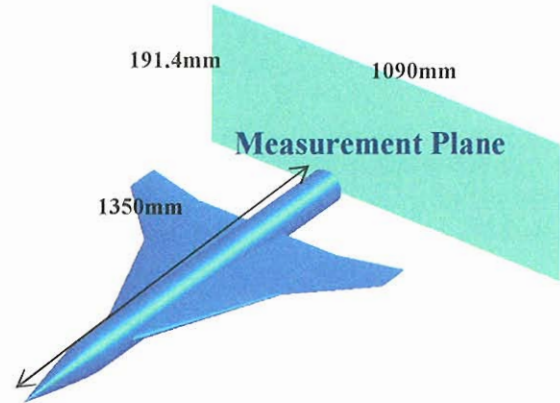


図 5 SST 実験機模型の図と計測面

後流計測範囲:

- x (一樣流方向) : 胴体後端の後方 200mm
- y (スパン方向) :-545mm~545mm
- z (上下方向) :-73.4mm~118mm

後流計測ステップ:  $\Delta y=10\text{mm}$ ,  $\Delta z=3.3\text{mm}$

$P_{t\infty}$  (Pa) : 一樣流ピトー圧

$P_{s\infty}$  (Pa): 一樣流静圧

$P_t$  (Pa): 後流計測位置でのピトー圧

$P_s$  (Pa): 後流計測位置での静圧

$u$  (m/s): 風洞固定座標 x 方向速度成分

$v$  (m/s): 風洞固定座標 y 方向速度成分

$w$  (m/s): 風洞固定座標 z 方向速度成分

$U_\infty$ ,  $P_{t\infty}$ ,  $P_{s\infty}$  は風洞固定のピトー管で、 $P_t$ ,  $P_s$  は 5 孔ピトー管で計測されている。

圧力推定計算の初期値として y-z 面全体に一樣流静圧  $P_{s\infty}=101600$ (Pa) を与えた。境界条件は  $y=-545\text{mm}$ ,  $z=-73.4\text{mm}$  の点を一樣流静圧で固定し、他は全て同次 Neumann 条件にした。

計算結果を以下に示す。図 6 は後流計測位置での静圧  $P_s$  の圧力係数分布図である。図 7 は圧力の Poisson 方程式より算出された圧力係数分布図である。

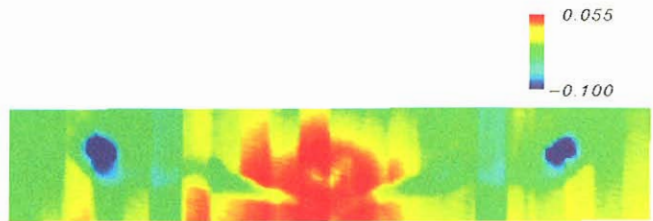


図 6 実験値の圧力係数分布図

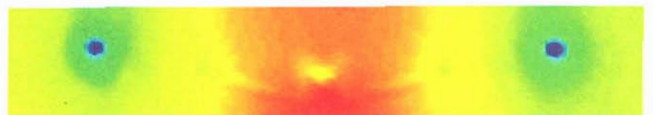
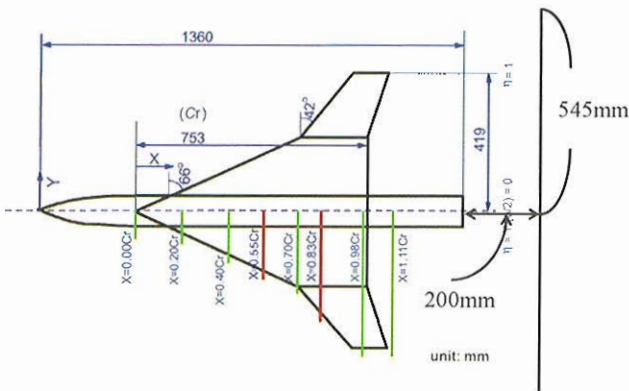


図 7 圧力の Poisson 方程式より算出された圧力係数分布図

実験値である図 6 には計測誤差が混入していることが確かめられる。そのため圧力の Poisson 方程式より算出された結果と定量的に比較することは困難である。そのため定性的な評価を行う。

計算値である図 7 と比較すると、定性的に後流での流れをよく捉えている。定性的に現象を捉えられていることと一桁程度の精度では定量的にも正しいことから、PIV 計測をして得られた瞬時速度場のデータをこの圧力推定システムに入力することにより、短時間で速度と圧力の現象の評価ができるといえる。今回、数値計算の定量的な詳細精度については議論できないが、数値計算による推定圧力の精度を上げるには境界条件の与え方の工夫が重要と思われる。



さらに、本圧力推定手法に対し、実験値の誤差混入による圧力推定への影響について調べる。

どのような実験手法でも、実験値には誤差が入る可能性がある。PIV も例外ではなく、そのため PIV で計測した速度の計測誤差がどの程度の感度で圧力の推定値の誤差につながるかということ CFD 側から調べることは有用なことだと考えられる。

圧力の Poisson 方程式より算出された圧力を真値とみなし、速度に乱数による擬似的な誤差を付加した入力データを用いて算出された圧力と真値の比較を行う。一様に誤差を付加した場合についても行った。

一様乱数列の発生方法には混合型合同法

$$x_{n+1} \equiv ax_n + c \pmod{m} \quad (7)$$

$$x_0 = b$$

を用いた[6]。a, b, c, m を前もって決めておいて、まず  $ax_0 + c = ab + c$  を m で割った余りを  $x_1$  とし、さらに  $ax_1 + c$  を m で割った余りを  $x_2$  とする。順次この方法で m 桁の一様乱数列が生成できる。

生成した乱数列は一般的な乱数列生成法であるが、生成した乱数列が乱数列の性質（等確率性、無規則性）を必ず満たしているとはいえない。そのため、生成した乱数列の当確率性、無規則性について検証しておくことが必要である。

一様乱数列の等確率性の検定には度数検定法と呼ばれるもののうち  $\chi^2$  検定法を用いた。

一様乱数列の無規則性の検定には組合わせ検定を用いた。

生成した一様乱数列から確率分布をもつ乱数列に変換する。今回は指数乱数列と正規乱数列に変換した。一様乱数列から変換した理由は、PIV 計測の精度の観点から小さな誤差も大きな誤差も一様に混入するとは考えにくく、そのためある確率分布を持った誤差が入ると考えたほうがより現実的だからである。指数乱数列は、指数分布の分布関数

$$F(y) = \int_0^y f(x)dx = \int_0^y \alpha e^{-\alpha x} dx = 1 - e^{-\alpha y} \quad (8)$$

に一様乱数列  $u_n$  をとり、

$$u_n = F(y_n) = 1 - e^{-\alpha y_n} \quad (9)$$

なる等式を解いて

$$y_n = -\frac{1}{\alpha} \log_e(1 - u_n) \quad (10)$$

の乱数  $y_n$  を求めるという逆関数法を用いて変換した。正規乱数列  $z$  は、一様乱数列をまずはじめから 2 つ  $u_1, u_2$  をとり、

$$\begin{cases} z_1 = (-2 \log_e u_1)^{\frac{1}{2}} \cos 2\pi u_2 \\ z_2 = (-2 \log_e u_1)^{\frac{1}{2}} \sin 2\pi u_2 \end{cases} \quad (11)$$

なる変換を行い、次に  $u_3, u_4$  をとってきて

$$\begin{cases} z_3 = (-2 \log_e u_3)^{\frac{1}{2}} \cos 2\pi u_4 \\ z_4 = (-2 \log_e u_3)^{\frac{1}{2}} \sin 2\pi u_4 \end{cases} \quad (12)$$

と変換し、以下同様な手順で  $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, \dots$  と生成していく Box and Muller の方法を用いて変換した。

指数乱数列では約 7.7~1.25×10<sup>-4</sup>%、正規乱数列では約 3.8~3.3%の誤差を速度に付加した。指数乱数列は指数的に誤差の大きさが減少するので、分布としては小さな誤差が多く入る。正規乱数列は誤差分布としてよくある分布だと言われている。

図 8 に真値として考える誤差を付加していない圧力係数分布図を示す。図 9 は計測面全体に一様に 4%、図 10 は指数乱数列、図 11 は正規乱数列による誤差を付加した速度を

もとの圧力の Poisson 方程式を解き、それより算出された圧力係数分布図である。真値と考える図 8 と比較して、あまり変化がない。一様な誤差付加では、最大約 3%、指数乱数列による誤差付加では最大約 6%、正規乱数列による誤差付加では最大約 4%となった。これらより、計測誤差が 4%程度なら混入しても本圧力推定システムにはほとんど影響しないといえる。

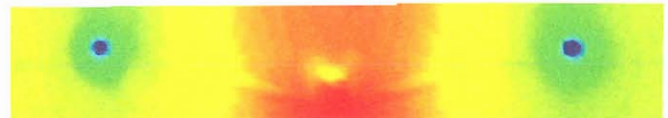
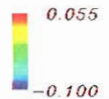


図 8 圧力係数分布図 (真値)

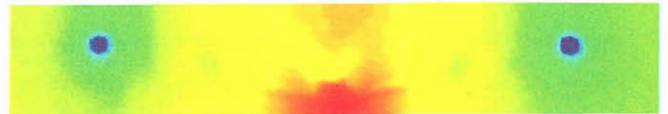


図 9 圧力係数分布図 (一様な誤差付加)

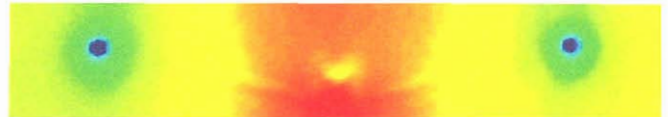


図 10 圧力係数分布図 (指数乱数列による誤差付加)

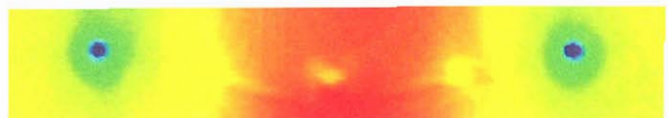


図 11 圧力係数分布図 (正規乱数列による誤差付加)

## 6. 結論

実験値の速度を用いて数値計算で圧力を求める圧力推定システムを開発し、その推定結果を検討して妥当な圧力分布が得られることを確認した。これにより PIV 計測結果を空力設計に有効に活かすことが可能になった。

また実験値に計測誤差が混入した場合の圧力推定計算への影響を調査し、速度変動に対し圧力変動は減衰することがわかった。速度変動を超える圧力変動にはならないということから、本圧力推定方法は計測誤差にそれほど敏感でなく、数値計算により誤差を抑えられているといえる。

実験と数値計算が互いのメリットを活かし合いより新たな見地を得ることは今後両者にとって有効なことであり、融合させていくことが重要であると考えられる。

## 参考文献

- 1) 渡辺重哉, “1C8 大型風洞用粒子画像流速測定 (PIV) システムの開発,” 第 41 回飛行機シンポジウム
- 2) Kensaku IMAICHI and Kazuo OHMI, “Numerical processing of flow-visualization pictures-measurement of two-dimensional vortex flow,” J.Fluid Mech. 1983, vol.129, pp.283-311
- 3) N.FUJISAWA, A.SATO, “Evaluation of three-dimensional flow and pressure fields in a cold model of combustion by plane PIV measurements,” 4<sup>th</sup> International Symposium on Particle Image Velocimetry
- 4) 数値流体学編集委員会 編, “非圧縮性流体解析,” 東京大学出版会 1995.
- 5) 伊藤耿一, “大学院情報理工学 3, 計算力学,” 講談社サイエンシフィック, pp.17-18, 2000
- 6) 脇本和昌, “乱数の知識,” 森北出版株式会社, 1970