

## Euler/LEE ハイブリッド法による超音速ジェットの音響解析

北村圭一, 橋本敦, 村上桂一, 青山 剛史, 中村佳朗  
名大院, 名大院, JAXA, JAXA, 名大工

## Acoustic Analysis of Supersonic Jet by Using Euler/Linearized Euler Equations

by

K. Kitamura, A. Hashimoto, K. Murakami, T. Aoyama and Y. Nakamura

## ABSTRACT

A supersonic jet into complex geometry and its accompanying acoustic field have been investigated by using Euler Equation/Linearized Euler Equation (LEE) hybrid methodology here. As a first step, we have examined its performance by computing traveling sinusoidal waves. Then, we found that the hybrid methodology achieves higher accuracy than the Euler computation when combined with a 5<sup>th</sup>-order WENO scheme. Based on this knowledge, we have conducted both of fully 3<sup>rd</sup>-order Euler/LEE and 3<sup>rd</sup>-order-Euler/5<sup>th</sup>-order-LEE hybrid computations. According to the results, the computed acoustic field is mainly composed of three waves having distinct frequencies: a high frequency wave (0.5[Hz]) which seems to be caused by interferences from the wall, a medium frequency wave (2.2[Hz]) corresponding to 1<sup>st</sup>-mode eigenfrequency of the jet exit geometry, and a low frequency wave (10[Hz]). The computed pressure values are rather different between the two results, although these frequencies are not so much. This fact implies that the more we extend the region of 5<sup>th</sup>-order computation, the more the computed pressure values approach to physically correct ones in quantitative view.

## 1. はじめに

超音速ジェットは非線形かつ複雑な流体现象の代表的なものであり、そこから発生する音響を効率的かつ精度良く解析する手法を開発する事は、今後の音響解析において非常に重要である。

近年、数値計算による音響解析を行う上で、線形Euler方程式 (Linearized Euler Equations, LEE) によるアプローチが注目されつつある。<sup>1)2)</sup>ここでLEEとは、物理量の変動が小さい場合に、Euler方程式の変動成分のみ線形化して得たものであり、これを数値的に解く事で微小変動を精度良く捉える事ができる。特に最近では、物理量の変動が大きい領域ではEuler方程式を、変動が小さい領域ではLEEを解くという「Euler/LEEハイブリッド計算」によってスペース・シャトル発射時の音響解析を行い、オーバー・プレッシャー時の圧力履歴を精度良く捉えた報告例がある。<sup>3)</sup>

また、音響場を数値シミュレーションにより再現するためには、音の波長を十分に解像する必要がある。少ない格子点数でこれを行うためには、WENO法<sup>6)</sup>やコンパクトスキームといった高次精度の計算スキームを用いる方法がある。衝撃波を伴う複雑な流れ場における音響解析の例として、WENO法を用いて超音速ジェットからの音響解析を行った例がある<sup>7)</sup>。

こうした現状を踏まえ本研究においては、Euler/LEEハイブリッド計算による超音速ジェットの音響解析をWENO法により高次精度にて行う。解析対象としては、H-IIAロケット発射時におけるプルームからの超音速ジェットと、排煙溝やロケット発射塔 (PST) などの構造物との干渉を扱い、圧力波の発生メカニズムを明らかにする。

また、検証問題として1次元正弦波の伝播現象を取り扱い、計算手法の精度について議論を行う。

## 2. 計算方法

流体の支配方程式の一つは、以下に示す3次元圧縮性Euler方程式である。

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}_k}{\partial x_k} = 0 \quad (1a)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u_i \\ e_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_k = \begin{bmatrix} \rho u_k \\ \rho u_i u_k + p \delta_{ik} \\ (e_i + p) u_k \end{bmatrix} \quad (1b)$$

ここで $\rho$ は密度、 $u_i (i=1, 2, 3)$ は速度、 $e_i$ は全エネルギーで、 $p$ は圧力、 $T$ は温度、内部エネルギー $e$ は $e=p/[\rho(\gamma-1)]=T/[\gamma(\gamma-1)]$ である。流体は完全気体の空気を仮定しており、 $\gamma$ は比熱比 ( $\gamma=1.4$ ) である。

これに対する空間の離散化には、セル境界での物理量をVan Albadaの制限関数を用い、または制限関数を用いずにMUSCL法により最大3次精度、あるいはJiang&ShuのWENO法<sup>6)</sup>より最大5次精度で内挿し、Roeの近似リーマン解法によって非粘性数値流束を計算する。また、時間積分には3段階3次精度のRunge-Kutta法を用いる。

これに対し、もう一方の流体の支配方程式は三次元線形Euler方程式 (LEE) である。これを得るには、まず式(1)を次のように平均成分 ( $\bar{\quad}$ ) と変動成分 ( $\prime$ ) に分ける。

$$\mathbf{Q} = \bar{\mathbf{Q}} + \mathbf{Q}', \quad \mathbf{E} = \bar{\mathbf{E}} + \mathbf{E}'$$

ここで変動成分を線形化 (2次以上の項を微小であるとして無視) し、更に平均成分は既に式(1)を満たしているため消去すると、最終的に1次の変動成分のみが残る。よって、計算は1次の変動成分のみについて行う。実際には速度と圧力の二つの物理量に関してのみ変動量を求めればよく、セル境界においてそれぞれ

$$u' = \frac{c_l u'_l + c_r u'_r - (p_r - p_l)}{\bar{c}},$$

$$p' = \frac{c_r p'_l + c_l p'_r - c_l c_r (u_r - u_l)}{\bar{c}}, \quad (2)$$

$$\bar{c} = c_l + c_r,$$

で与えられる<sup>4)</sup>。ここで、 $c$ は音速 ( $c = \sqrt{\gamma p / \rho} = \sqrt{\gamma R T}$ ) である。また添え字 $l, r$ はそれぞれセル境界における左側および右側の物理量であり、セル境界に対し法線方向成分の値である。このとき、セル境界左右における物理量は制限関数を用いずにMUSCL法により最大3次精度で、あるいはWENO法により最大5次精度で内挿する。また、時間積分には3段階3次精度のRunge-Kutta法を用いる。

### 3. 検証問題

正弦波の伝播計算には、1次元領域を模擬した図1の格子を用いた。セル数は72×1であり、等間隔格子（1セル=17/12[m]）を用いている。

計算条件は図2(a), (b)に示した通りであり、本研究における計算プログラムは3次元コードであるが、y, z方向に値を単純外挿することで1次元計算を行っている。また、線形近似された初期圧力変動は、以下の式<sup>8)</sup>により正弦波形で1波長分与える（すなわち、1波長 $\lambda$ を $n$ 個のセルで表す。セル数72が $n$ で割り切れない場合は、セル数をわずかに増やして調整する）。

$$p'_i = \varepsilon \bar{p} \sin(2\pi i/n), \quad (3)$$

$$u'_i = p'_i / \bar{\rho} c, \quad \rho'_i = p'_i / \bar{c}^2$$

ここで、 $\varepsilon$ は0.01, 0.001などの小さい量を表す。例えば、 $n=12$ の場合の初期圧力場は図2(c)のようになる。

本計算では、この線形波が計算領域中を右側へと7波長分伝播するまでの様子を捉える。このとき、高次精度化には3次精度 MUSCL 法（制限関数無し）または5次精度 WENO法を用い、i) Euler 計算、ii) LEE 計算、iii) Euler/LEE ハイブリッド計算の3通りの計算を行う。更に、 $\varepsilon, n$ などのパラメータを変化させてその影響を議論する。なおハイブリッド計算の場合、 $i \leq 36$ で Euler 計算を、 $i \geq 37$ では LEE 計算を行う。

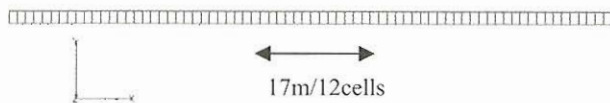
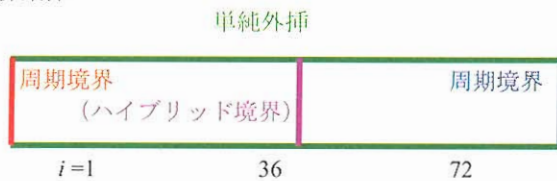
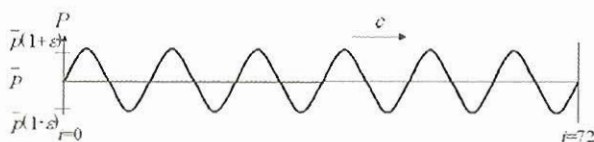


図1 正弦波の計算格子

#### (a) 境界条件



#### (b) 初期条件



#### (c) 初期圧力場



図2 平面波の計算条件

#### 3.1 計算結果

WENO法を用いた計算結果の一例（Euler/LEE ハイブリッド計算、 $n=12$ ,  $\varepsilon=0.01$ ）を図3に示す。ここで $T$ は1波長分の伝播時間であり、この場合は $T=\lambda/c=17[m]/340[m/s]=0.05[s]$ （解析解）である。

このように、初期圧力変動の形状はほぼ保たれたまま伝播しており、その減衰は小さいことがわかる。また、その伝播速度は音速 $c$ であり、これは解析解と一致する。

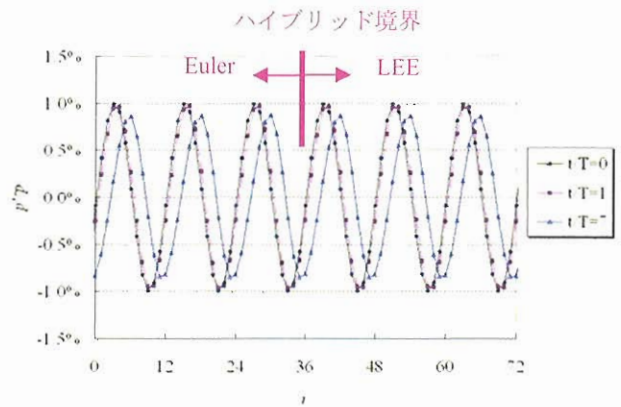
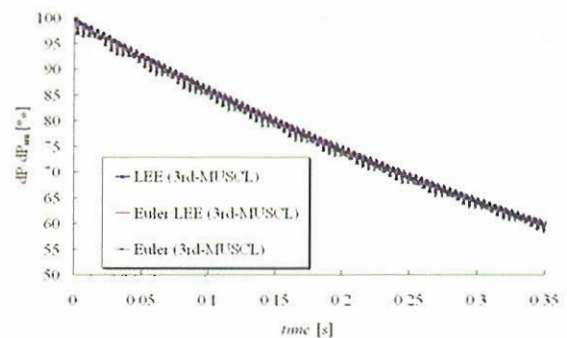


図3 平面波伝播の計算結果  
(WENO, Euler/LEE ハイブリッド計算,  $n=12$ ,  $\varepsilon=0.01$ )

#### 3.2 計算法および計算精度の影響

次に、計算法（Euler 計算、LEE 計算、Euler/LEE ハイブリッド計算）および計算精度（3次精度 MUSCL または 5次精度 WENO 法）による影響を議論する。初期圧力変動における振幅が、伝播する際にどれだけ保たれているかを比較するため、図4に $n=12$ （一波長中に12点）、 $\varepsilon=0.01$ （周囲の1%の初期圧力擾乱）の場合における振幅の時間履歴を示す。縦軸は、正弦波の持つ正負二つの圧力振幅のうち小さい方を初期圧力変動の振幅で無次元化したもの、横軸は経過時間である。

##### (a) 3次精度 MUSCL 法



##### (b) 5次精度 WENO 法

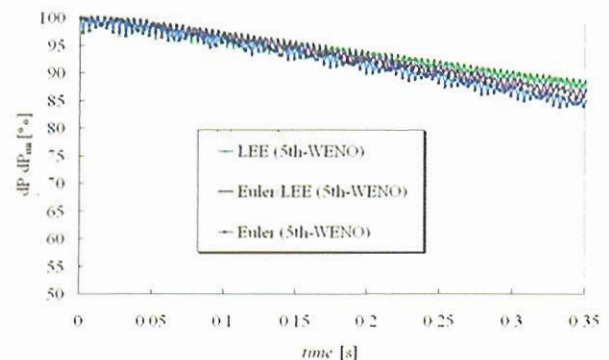


図4 計算法および計算精度による圧力変動の保存率の比較 ( $n=12$ ,  $\varepsilon=0.01$ )

この図によれば7波長分伝播後（ $t=0.35[s]$ ）において、WENO法を用いたことによりいずれの計算法においても計算精度が向上したことが分かる。また、3次精度 MUSCL の場合にはほとんど計算法による精度の違いが現れないものの、5次精度 WENO においては LEE が最も精度が良く、次いでハイブリッド、Euler と違いが現れている。

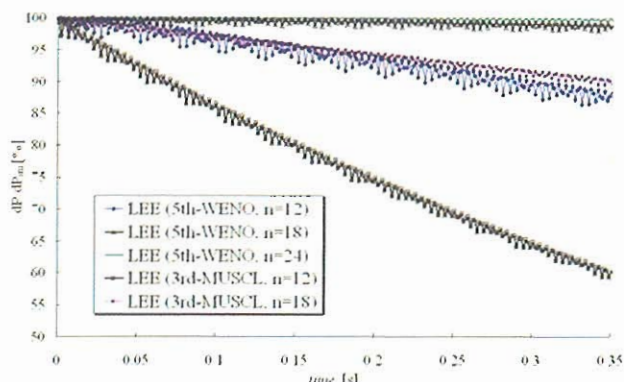
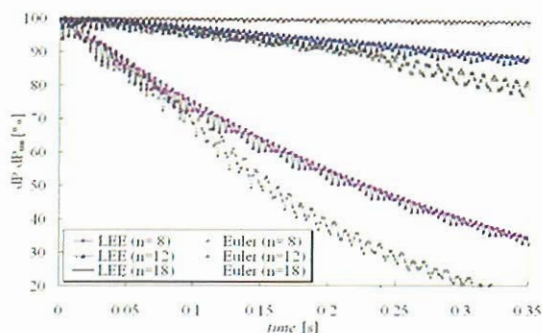


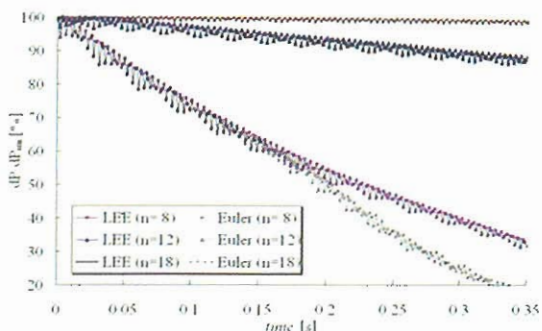
図5 格子解像度および計算精度による圧力変動の保存率の比較 ( $\varepsilon=0.01$ )

よってこれらの中では WENO 法と LEE の組み合わせが最も高精度であり、7 波長分伝播した正弦波の振幅を 90% 以上保ったまま再現できている。

(a)  $\varepsilon=0.01$



(b)  $\varepsilon=0.001$



(c)  $\varepsilon=1.e-4$

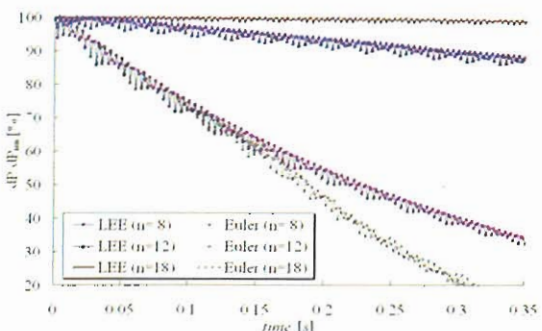


図6 初期擾乱, 格子解像度による圧力変動の保存率の比較

### 3.3 格子解像度の影響

今度は、パラメタ  $n$  (格子解像度) の影響を調べる。図 5 では 3 次精度 MUSCL および 5 次精度 WENO 法の LEE 計算に対し、それぞれ  $n=12, 18, 24$  の場合について調べる。

この図によると、7 波長伝播後の正弦波が 90% 程度の精度を保つためには、5 次精度 WENO では  $n=12$ 、3 次精度 MUSCL では  $n=18$  の解像度がそれぞれ要求されることが分かる。言い換えると、WENO の場合に要求される格子点数は、MUSCL と同程度の計算精度を得るためには約 3 分の 2 で良いことになる。これは計算コストの観点から大きなメリットになる。

### 3.4 初期圧力擾乱の影響

最後に、初期圧力擾乱  $\varepsilon$  の影響について調べる。ここでは、5 次精度 WENO 法を用いた計算に限って調べる。図 6 に (a)  $\varepsilon=0.01$ , (b)  $\varepsilon=0.001$ , (c)  $\varepsilon=1.e-4$  の場合についてそれぞれ  $n=8, 12, 18$  の LEE および Euler の結果についてまとめた。

これらの図によると、以下の事が分かる。

- 格子解像度  $n$  が小さいほど、そして初期擾乱  $\varepsilon$  が大きいほど LEE と Euler の精度の差が顕著に現れる。
- 精度に差がある場合、常に LEE の方が Euler よりも高精度である。

つまり、初期擾乱  $\varepsilon$  が 1% から 0.01% の間のオーダーにある場合、WENO と LEE の組み合わせにより計算精度の向上または格子点数の節約をすることができる。

## 4. 超音速ジェットの数値計算

計算格子および境界条件を図 7 に示す。計算格子は 2 つの構造格子ブロック (ブロック 1:  $130 \times 87 \times 208$ , ブロック 2:  $19 \times 19 \times 57$ ) からなり、総セル数は約 240 万である。ブロック 1 は PST を含む発射場の地上部を、ブロック 2 は地下部となる排煙口を模擬している。両ブロックは 1 つの境界 ( $k_1=1$  および  $k_2=1$ ) においては接続しているが、ブロック 2 の反対側の境界 ( $k_2=k_{2max}$ ) では接続を行わず、壁条件または流入条件としての超音速ジェット ( $w=-2,500$  [m/s]) が与えられている。

計算格子幅は、1 波長 (約 17[m]) 中に少なくとも 12 セルが含まれるように選んである。

また計算精度は、衝撃波の現れる Euler 領域 ( : ブロック 1 の PST を含まない側およびブロック 2) では 3 次精度 (MUSCL 法, Van Albada の制限関数使用) であり、圧力変動が小さいと見られる LEE 領域 ( : ブロック 1 の PST を含む側) では 3 次精度 (MUSCL 法, 制限関数無し) または 5 次精度 (WENO 法) である。

更に、この計算は MPI による並列計算コードを用い、CENSS にて 28 ノード (3 次精度) または 18 ノード (5 次精度) にて行った。

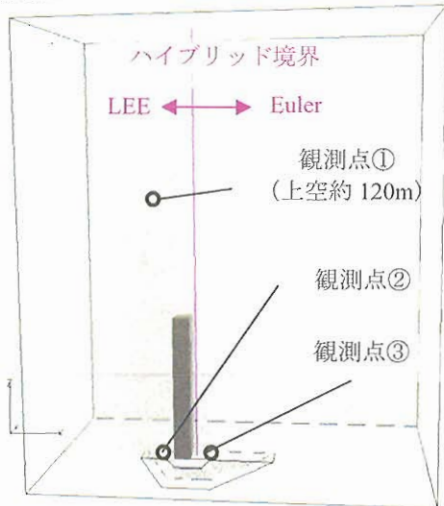
そして図 7(a)中の 3 点において圧力履歴を取得した。観測点①は発射から 8[s]経過後のロケットの位置に当たり、上空 120[m]の高さである。観測点②, ③は排煙口内部 (ブロック 2) のそれぞれジェット入口および出口 (ブロック 1 との境界) に対応する。また、これらの点は全て同一面 (図 7 にて格子が描かれている対称面) 上にある。

### 4.1 計算結果と考察 (3 次精度)

計算から得られた観測点①における圧力履歴を図 8 に示す。横軸はジェットを噴出してからの経過時間 [s], 縦軸は大気圧 (101.3 [kPa]) からの差 [Pa] である。この図より、本研究において遠方場に現れる圧力変動の大きさは、大気圧の約 1% のオーダー以下にある事が分かる。

圧力履歴に注目すると、時刻約 0.48[s]において比較的大きな圧力波が観測され、その後 1.0 [s]程度の間、約 0.45[s] 周期 (約 2.2[Hz]) の大きな圧力変動が存在し、これが徐々

(a) Overview



(b) Close-up view

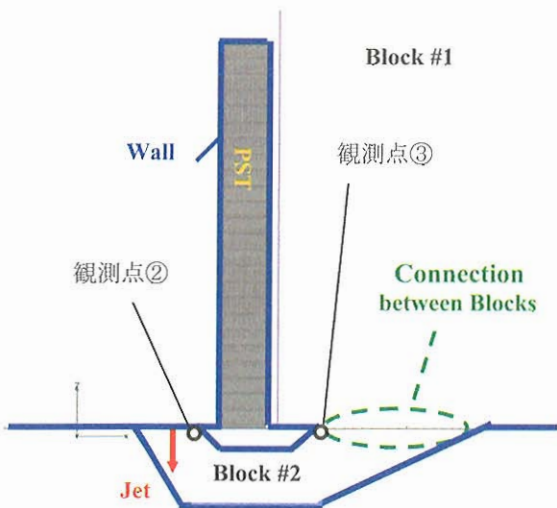


図7 超音速ジェットの計算格子と境界条件

に減衰しているのがわかる。その後は、約 2.0[s] 周期 (約 0.5[Hz]) の低周波圧力変動と、それより高周波 (約 10[Hz] など) のいくつかの圧力変動が混在した状態が続いているものと見られる。

これら二つの圧力変動の原因を特定するため、ジェット出口付近 (観測点②) とブロック接合部付近 (観測点③) の2箇所における圧力変動を図9および図10に示す。これらによれば、約 10[Hz] の圧力変動は観測点②においては現れていないものの、観測点③においては非常に顕著であることがわかる。このことから、この高周波変動の音源は観測点③付近に存在すると推測できる。

次に、図8中に示したいくつかの時刻における圧力場を図11に示す。参考として、観測点①の位置も図中に示してある。これらの結果から、Euler領域から発生した圧力波がLEE領域までスムーズに伝播し、その挙動が捉え切れている事が分かる。また図11(a)-(c)を見ると、初期の大きな圧力ピークは、ジェットが突然噴出した事により、周囲の気体が押し出され、その結果、形成されたものであると考えられる。そしてジェット噴出後 1.5[s] 程度、この初期変動の影響と見られる大きな圧力変動が残っている。この事は、この初期圧力変動の周波数である約 2.2[Hz] が、排煙口 (ブロック2) における1次モード固有振動数  $f_1 = 2.25$ [Hz] に近いことから説明できる。<sup>9)</sup>

一方、ジェット噴出から 1.5[s] を経過した後は、いくつかの小さな波が存在する一方で、場全体の平均圧力値も変化する (図11(d)-(f))。このとき、観測点①における圧力変動は約 0.5[Hz] の低周波のもの、約 10[Hz] の高周波のものを重ね合わせた形となっていることが図8からも分かる。また、ブロック1の中央付近にあるPST (塔) の壁により波の位相が大きく変化している様子が分かる。これより、観測点③付近に音源が存在すると思われる高周波変動の原因は、この塔による波の干渉の影響ではないかと考えられる。これについては、塔が無い場合の解析結果と比較して確認する必要がある。

従って、この音響場、特に上空 (観測点①) において現れる圧力変動は以下の3つにまとめることができる。

- i) 10[Hz]変動：塔の影響によるものと考えられるが、塔が無い場合の解析との比較による確認が必要。
- ii) 2.2[Hz]変動：排煙口の固有振動に対応。初期において顕著だが、徐々に減衰する。
- iii) 0.5[Hz]変動：現段階では原因不明。

#### 4.2 計算結果と考察 (5次精度)

LEE領域を5次精度WENO法で計算した結果を、同様に図12から図15において示す。圧力履歴については、比較のため3次精度の結果も載せてある。

これらの結果によると、3次精度計算を行った4.7[s]までにおいて、圧力変動の周波数はほとんど変化しなかった。また、4.7[s]以降においても、約 0.5[Hz] および約 10[Hz] の二つの波が顕著である点は変わらない。このため、定性的な傾向としては、3次精度において十分捉え切れているものと考えられる。

しかし圧力値については、計算精度を向上させたことによる影響は初期においてはほとんど見られないものの、ジェット噴出後 1.5[s] 程度から徐々に現れていることが分かる。この事は、観測点①がLEE領域 (5次精度) にあるものの Euler領域 (3次精度) との境界の近くにある事、観測点②、③に関しては Euler領域 (3次精度) の中にある事を考えれば、大きな違いであると解釈できる。従って、Euler/LEEハイブリッド境界の位置を調整する事や、Euler領域においてもWENO法による5次精度の計算を行う事により、計算領域全体における音響場の解像度を更に向上させることができるものと考えられる (ただしこの場合、超音速ジェットに含まれる衝撃波を精度良く捉えるために、この付近の格子点数を増やす必要も生じる)。

## 5. 結論

検証問題として正弦波の伝播現象を取り上げ、計算法、計算精度、初期擾乱の大きさ、格子解像度を変えて計算された圧力変動を比較した。その結果、5次精度WENO法とLEEの組み合わせにより、1%から0.01%の大きさの初期擾乱を1波長につき12点の格子点数で精度良く捉えきれることが分かった。

この結果に基づき、3次精度MUSCL法および5次精度WENO法をEuler/LEEハイブリッド法と組み合わせて用い、超音速ジェットから発生する音響の解析を行った。これにより、以下の事が明らかとなった。

- Euler/LEEハイブリッド境界において圧力変動はスムーズに受け渡されている。
- ジェット噴出後、複雑形状の物体との干渉により主に3つの異なる周波数を持つ圧力変動が現れる。
  - 10[Hz]変動：塔の影響によるものと考えられるが、塔が無い場合の解析との比較による確認が必要。
  - 2.2[Hz]変動：排煙口の固有振動に対応。初期において顕著だが、徐々に減衰する。
  - 0.5[Hz]変動 (：現段階では原因不明。)

- ・ 計算精度の違いによる圧力変動への影響は小さいため、定性的な解析は3次精度で行う事ができる。しかし、定量的な解析には5次精度計算を行う必要がある。このとき、圧力変動周波数についてはFFT解析などによる検討が必要となる。

今後は、まずは「塔無し」の計算を行い、10[Hz]変動の原因について明らかにする。

また、格子点を増やし、5次精度WENO計算を行う領域を広げる事で更なる精度の向上を目指す。更に、粘性計算<sup>10)</sup>を行うことにより、せん断層から発生する音にも注目し、より高精度の解析を行う予定である。

謝辞

本研究は21世紀COE「計算科学フロンティア」のご支援を頂いている。ここに感謝の意を表する。

参考文献

- 1) Bailly, C., Bogey, C. and Juve, D., "Computation of flow noise using source terms in Linearized Euler's Equations,"

AIAA Paper 2000-2047 (2000).

- 2) 釜子敏裕, "Linearized Euler Equation による翼型まわりの流れと音の連成解析," ながれ, Vol. 23, (2004) 285-294.
- 3) 今村太郎, 雨宮和久, 榎本俊治, 山本一臣, "線形オイラー方程式解析コードの構築と複雑形状への適

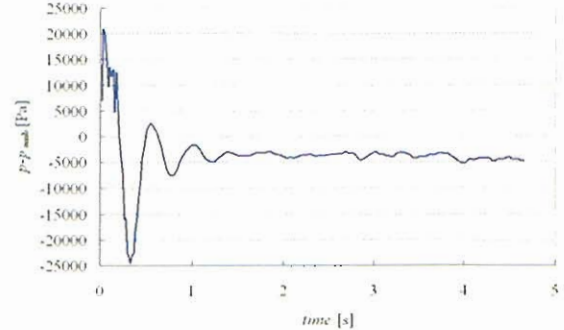


図9 観測点②における圧力履歴 (3次精度)

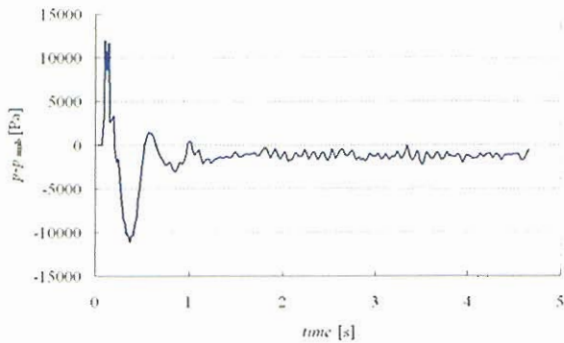


図10 観測点③における圧力履歴 (3次精度)

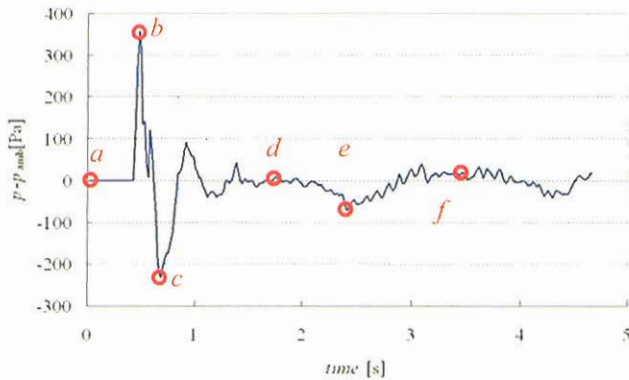


図8 観測点①における圧力履歴 (3次精度)

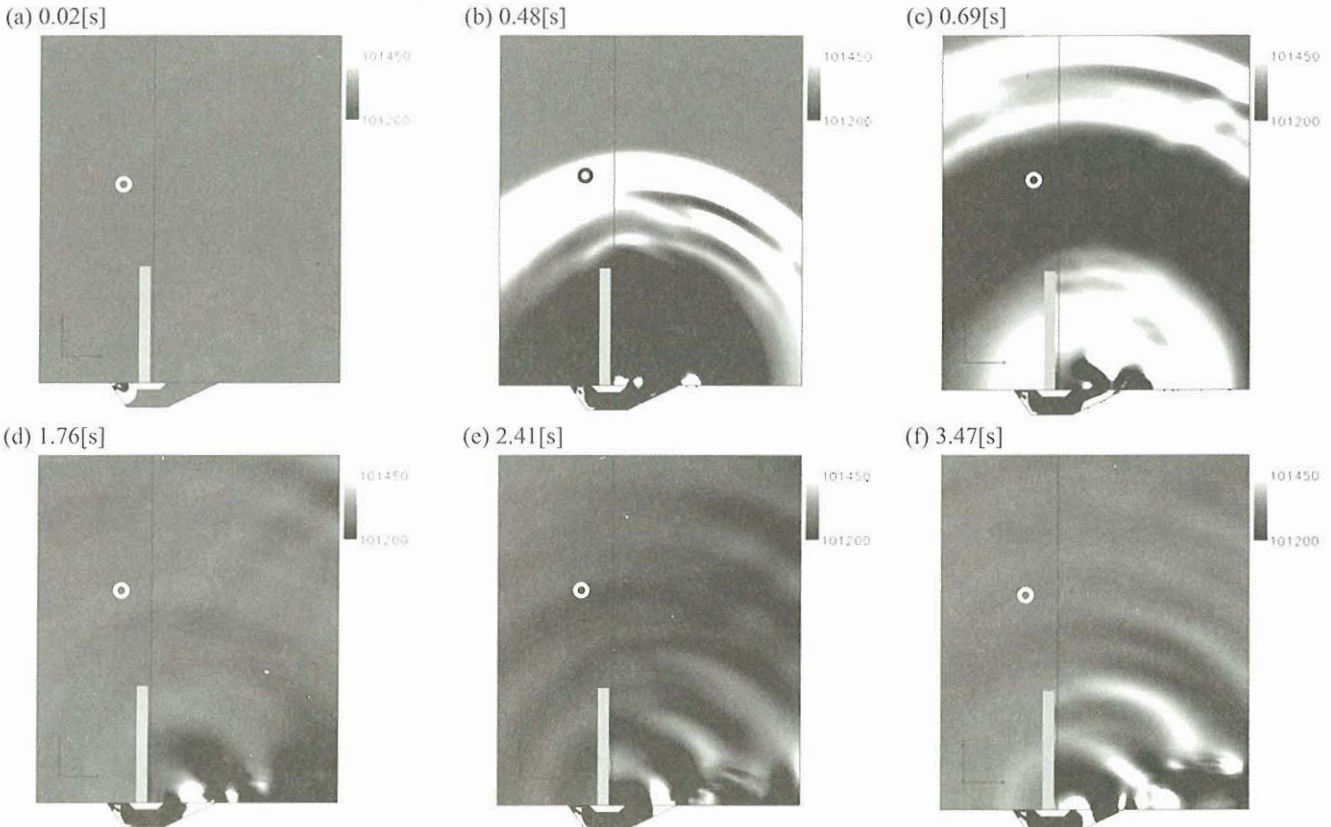


図11 瞬時圧力場 (3次精度)

- 用,” 日本航空宇宙学会論文集, 第 53 卷, 第 621 号, (2005) 452-460.
- 4) Men'shov, I. and Nakamura, Y., "Implementation of the Variational Riemann Problem Solution for Calculating Propagation of Sound Waves in Nonuniform Flow Fields," *J. of Comp. Phys.*, Vol. 182, (2002) pp. 118-148.
  - 5) Saito, T., Nakamura, T., Kaneko, M., Men'shov, I. and Nakamura, Y., "Numerical Investigation of SRB Ignition Overpressure," AIAA Paper 2004-2342 (2004).
  - 6) Jiang, G.S. and Shu, C.W., "Efficient Implementation of Weighted ENO Schemes," *J. of Comp. Phys.*, Vol. 126, (1996) pp. 202-228.
  - 7) Hashimoto, A., Men'shov, I. and Nakamura, Y., "Sound Emission from the Helical Mode of Supersonic Jet," AIAA Paper 2004-2656.
  - 8) Pierce, A.D., "ACOUSTICS -An Introduction to Its Physical Principles and Applications,-" pp. 20-22, Acoustical Society of America (1989).
  - 9) 村上桂一, 橋本敦, 北村圭一, 青山剛史, 中村佳朗, "ロケット排煙溝に関する音響解析," 航空宇宙数値

流体シンポジウム 2006 講演集 (2006).

- 10) Kaneko, M., Men'shov, I. and Nakamura, Y., "Numerical Simulation of Aerodynamic Sound by Navier-Stokes/Linearized Euler Equations Hybrid Method," AIAA Paper 2006-801 (2006).

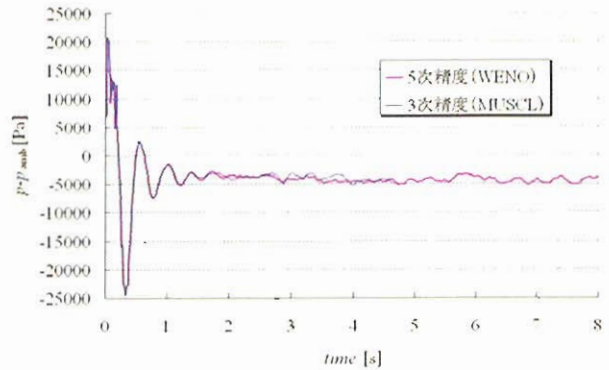


図 13 観測点②における圧力履歴 (5次精度)

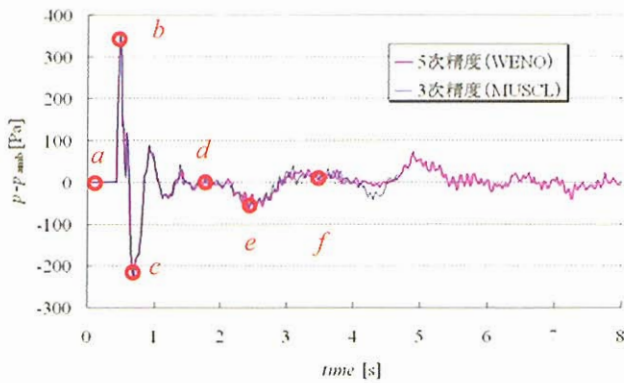


図 12 観測点①における圧力履歴 (5次精度)

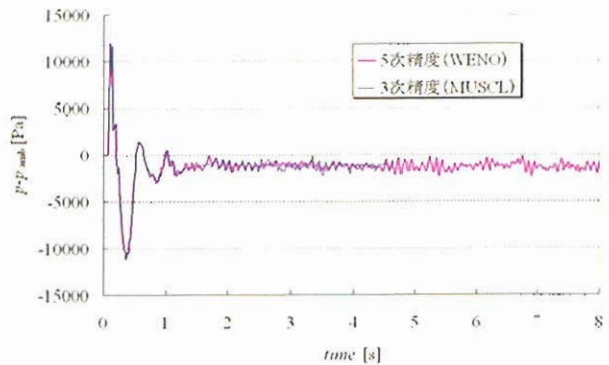


図 14 観測点③における圧力履歴 (5次精度)

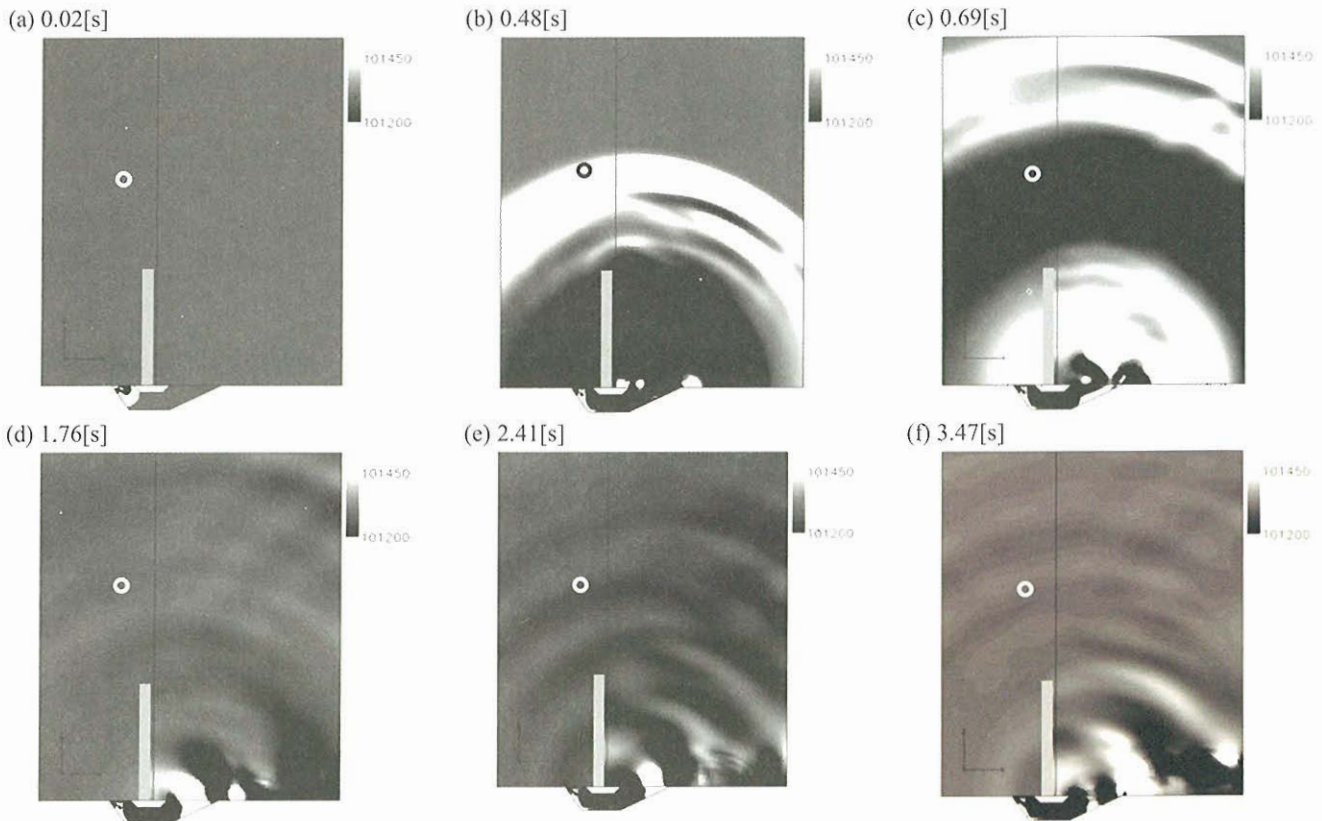


図 15 瞬時圧力場 (5次精度)