

宇宙航空研究開発機構特別資料

JAXA Special Publication

人工衛星の力学と制御

宇宙機ダイナミクス・姿勢制御技術ユニット

2006 年 3 月

宇宙航空研究開発機構

Japan Aerospace Exploration Agency

目次

基礎編

第1章 数学的準備

| | |
|-------------|----|
| 1.1 座標系と座標 | 5 |
| 1.2 ベクトル | 5 |
| 1.3 ダイアディック | 9 |
| 1.4 行列 | 10 |
| 1.5 方向余弦行列 | 12 |
| 第1章例題解答 | 14 |

第2章 運動学の基礎

| | |
|---------------------------|----|
| 2.1 運動と自由度 | 17 |
| 2.2 有限回転 | 18 |
| 2.3 無限小回転 | 19 |
| 2.4 姿勢のパラメータ表示 | 20 |
| 2.5 角速度と角加速度 | 24 |
| 2.6 並進速度と並進加速度 | 27 |
| 2.7 角速度と姿勢パラメータの時間導関数との関係 | 29 |
| 第2章例題解答 | 33 |

第3章 動力学の基礎

| | |
|--------------------|----|
| 3.1 質点のダイナミクス | 38 |
| 3.2 剛体のダイナミクス | 38 |
| 3.3 力学系の安定性 | 44 |
| 3.4 スピン衛星ダイナミクスの基礎 | 49 |
| 第3章例題解答 | 58 |

第4章 スピン衛星の力学と制御

| | |
|---------------|----|
| 4.1 受動的スピン安定性 | 62 |
| 4.2 能動制御 | 65 |
| 4.3 姿勢決定 | 69 |

第5章 3軸姿勢制御衛星の力学と制御

| | |
|----------------------|----|
| 5.1 ホイールを搭載した衛星の姿勢運動 | 71 |
| 5.2 3軸姿勢制御方式の分類と特徴 | 75 |
| 5.3 各姿勢制御方式の制御特性 | 77 |

| | |
|------------------------------|-----|
| 5.4 重力傾度安定方式 | 90 |
| 第6章 柔軟付着物を有する衛星の力学と制御 | |
| 6.1 柔軟付着物を有する衛星のモデリング | 95 |
| 6.2 柔軟付着物を有する衛星の運動方程式 | 96 |
| 6.3 柔軟付着物を有する衛星のモード解析 | 98 |
| 6.4 柔軟付着物を有する衛星の伝達関数 | 101 |
| 6.5 1自由度マス・ダンパ・バネが付着した衛星の振動 | 104 |
| 6.6 柔軟付着物を有する衛星の姿勢制御 | 111 |
| 第7章 姿勢決定フィルタ | |
| 7.1 発展経緯 | 117 |
| 7.2 3軸ストラップダウン姿勢決定系概要 | 118 |
| 7.3 オイラー角を用いた姿勢推定系 | 121 |
| 7.4 クォータニオンを用いた姿勢推定系 | 126 |
| 参考文献 | 133 |

応用編

| | |
|---|-----|
| ・ μ -LabSat 姿勢制御系の開発 | 135 |
| ・ μ -LabSat 姿勢制御系の軌道上運用結果 | 141 |
| ・ PRECISION POINTING MANAGEMENT FOR THE ADVANCED LAND OBSERVING SATELLITE (ALOS) | 147 |
| ・ 陸域観測技術衛星 (ALOS) の高精度姿勢軌道制御系 | 157 |
| ・ その他 ALOS関連文献 | 165 |
| ・ 大型柔軟構造物を有する技術試験衛星 VIII 型 (ETS-VIII) の姿勢制御 | 166 |
| ・ 擾乱管理手法の検討～SELENE を例に | 171 |

執筆者一覧

基礎編

| | |
|-------|--|
| 第 1 章 | 高橋 孝 (JAXA) |
| 第 2 章 | 高橋 孝 (JAXA) |
| 第 3 章 | 高橋 孝 (JAXA) |
| 第 4 章 | 谷脇滋宗 (JAXA) |
| 第 5 章 | 神澤拓也 (JAXA) |
| 第 6 章 | 神澤拓也 (JAXA, 6.1～6.5), 谷脇滋宗 (JAXA, 6.6) |
| 第 7 章 | 谷脇滋宗 (JAXA) |

応用編

| | |
|------------------|--|
| μ -LabSat 関連 | 吉原圭介 (JAXA), 山元 透 (JAXA) |
| ALOS 関連 | 岩田隆敬 (JAXA), 大沢右二 (JAXA), 河原哲雄 (NTS), 川口佳久 (NTS), 吉沢 剛 (NTS), 星野裕毅 (NTS) |
| ETS-VIII 関連 | 米澤克雄 (JAXA), 市川信一郎 (JAXA), 兒子健一郎 (JAXA), 宮崎洋彰 (三菱電機) |
| SELENE 関連 | 神谷俊夫 (NTS) |

編集

JAXA 宇宙機ダイナミクス・姿勢制御技術ユニット テキスト作成分科会

基礎編

Figure 1

第 1 章 数学的準備

1.1 座標系と座標

古典力学では、物体の運動を 3 次元ユークリッド空間(Euclidean space)(初等幾何学が成り立つ、曲がっていない空間)で表現する．幾何学的関係を記述するためには、この空間内に座標系(coordinate system)を設定する必要がある、通常は図 1.1.1 に示すような直交(デカルト)座標系(Cartesian coordinate system)を使用する．直交座標系は、原点 O と 3 つの互いに直交する(適当にスケールされた)軸からなる．ただし、以下では軸を図 1.1.1 の向きに配置した右手系(dextralあるいは right-handed coordinate system)を使用する．ある点 P の位置は、図 1.1.1 の p_i ($i=1,2,3$) のような直交(デカルト)座標(Cartesian coordinates)を用いて特定できる．図 1.1.2 に座標系の例をいくつか示す．

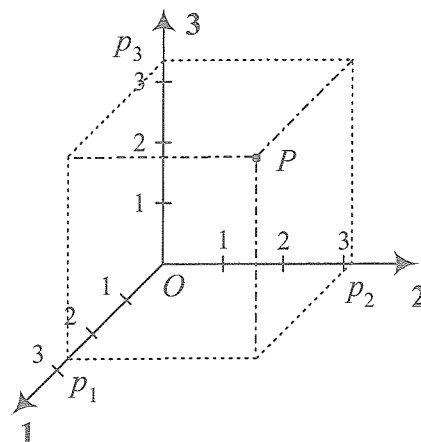


図 1.1.1 直交座標系(右手系)と座標

直交座標以外にも円柱座標(cylindrical coordinates)、球座標(spherical coordinates)などがあり、これらを一般化して曲線座標(curvilinear coordinates)と呼ばれる．また、直交座標系以外にも、斜交座標系も考えられる．

1.2 ベクトル

宇宙機の運動に関わる加速度や力などは、3 次元ユークリッド空間内に「大きさ」と「方向」を持つ物理量であり、一般にベクトル(vector)と呼ばれる．以下、図 1.2.1 に示される点 P の位置ベクトル \vec{p} のように、ベクトルを矢印付き太字斜体(小文字)で表記する．

数学におけるベクトルと物理・工学におけるベクトルとは区別して考えたほうがよい[1.1]. ここで扱うベクトルは物理・工学におけるベクトルであり、その端点の位置も考慮する必要がある(束縛ベクトルと自由ベクトルとの区別).

座標系を構成する 3 つの軸の姿勢とスケールは、図 1.2.1 に示すような大きさ 1 の単位ベクトル \vec{e}_i ($i=1,2,3$) を基準とすることができる．これら単位ベクトルを形式的に、

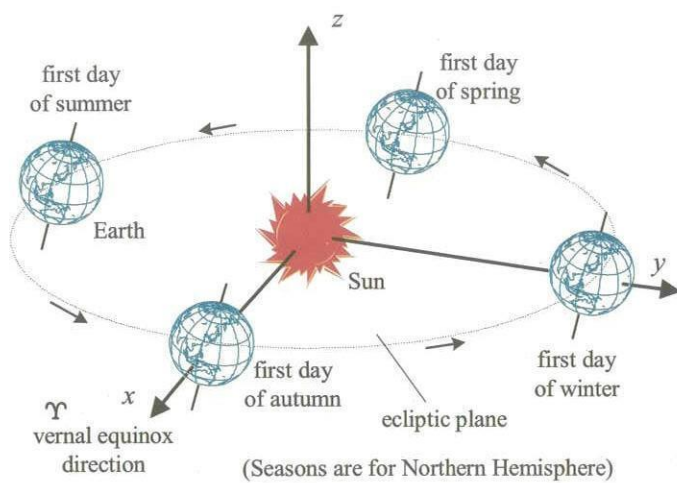
$$\{\vec{e}\} = \begin{Bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{Bmatrix} = \{\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \vec{e}_3\}^T \quad (1.2.1)$$

のようにベクトル配列(vector array あるいは vectrix)としてまとめれば、(特に原点の位置が暗黙的に分かっていたり、姿勢のみを問題にするときは)座標系を単に $\{\vec{e}\}$ 系と呼ぶことができる．上添え字の T はベクトル配列の転置(transpose)を表す(定義は式(1.2.1)の通り)．

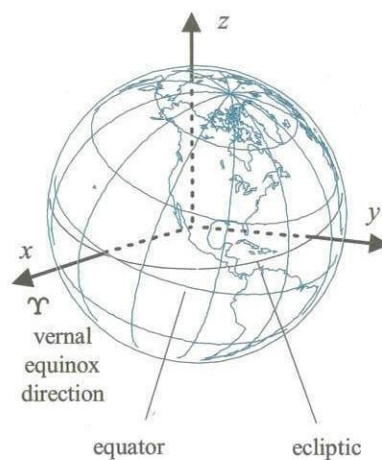
さらに、任意のベクトル \vec{p} を、

$$\vec{p} = p_1 \vec{e}_1 + p_2 \vec{e}_2 + p_3 \vec{e}_3 = \{\vec{e}\}^T \mathbf{p} = \mathbf{p}^T \{\vec{e}\} \quad (1.2.2)$$

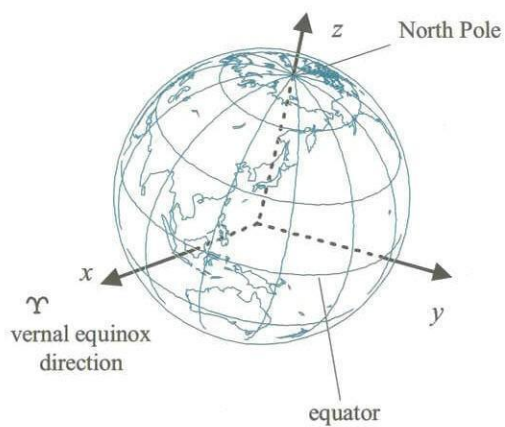
のように任意の基底ベクトル(basis vector)とその座標成分(components of coordinate)に分解



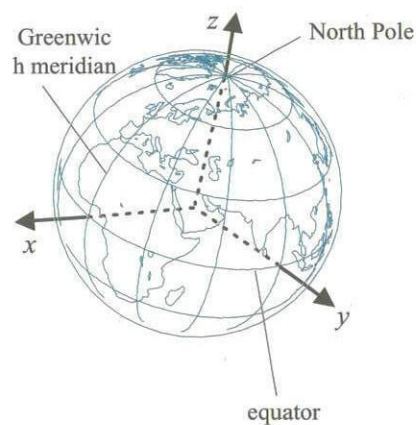
(a) 太陽中心黃道面基準慣性座標系[1.2]



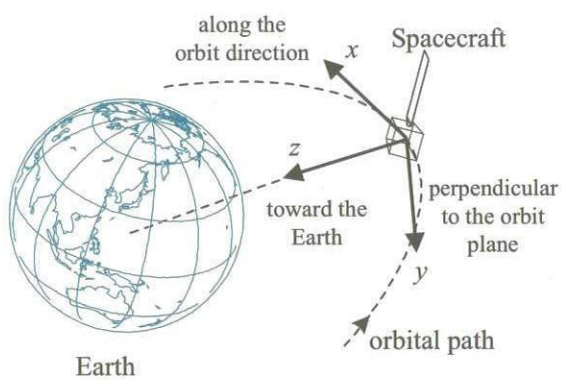
(b) 地球中心黃道面基準慣性座標系



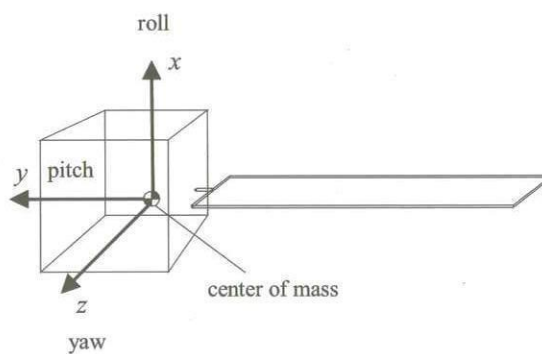
(c) 地球中心赤道面基準慣性座標系



(d) 地球中心赤道面基準地球固定座標系



(e) 軌道座標系[1.3]



(f) 衛星座標系[1.3]

図 1.1.2 座標系

した形で簡潔に表現できる[1.4]. ただし,

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = [p_1 \ p_2 \ p_3]^T \quad (1.2.3)$$

であり, 上添え字の T はベクトル配列の転置と同じ記号だが, この場合は行列の転置(各成文の行と列を入れ替えたもの)を表す. 式(1.2.2)のように表現すれば, 座標系に依存しない量であるベクトル \vec{p} と, それを観測する座標系に依存して決まる成分列 \mathbf{p} とを分けて考えられると同時に, ベクトルをどの座標系で観測しているか明確にできる. \mathbf{p} のように単に数字を並べたものも数学的には(数)ベクトルと呼ばれるが, ここでは, \vec{p} と区別するために列行列(column matrix)とか 3×1 行列と呼ぶ. 以下, 行列を標準太文字書体で表記する.

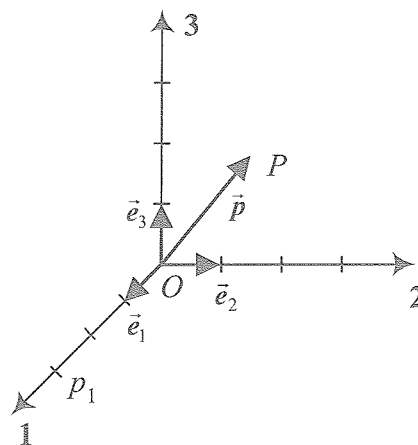


図 1.2.1 ベクトルと基底ベクトル

【例題 1-1】

基底ベクトルと座標成分の概念を理解する. 簡単のため, 図 1.2.2 のような 2 次元ユークリッド空間のベクトルを考える. あるベクトル \vec{p} を, 直交座標系 $\{\vec{e}\} = \{\vec{e}_1 \ \vec{e}_2\}^T$ で表すと,

$$\vec{p} = p_1 \vec{e}_1 + p_2 \vec{e}_2 = \{\vec{e}\}^T \mathbf{p} \quad (1.2.4-a)$$

ただし,

$$\mathbf{p} = [p_1 \ p_2]^T \quad (1.2.4-b)$$

と表せるとする. 次に, \vec{p} を p_1, p_2, θ を使って $\{\vec{e}'\} = \{\vec{e}'_1 \ \vec{e}'_2\}^T$ 系で表すと,

$$\begin{aligned} \vec{p} &= (\boxed{} p_1 + \boxed{} p_2) \vec{e}'_1 + (\boxed{} p_1 + \boxed{} p_2) \vec{e}'_2 \\ &= p'_1 \vec{e}'_1 + p'_2 \vec{e}'_2 \\ &= \{\vec{e}'\}^T \mathbf{p}' \end{aligned} \quad (1.2.5-a)$$

ただし,

$$\mathbf{p}' = [p'_1 \ p'_2]^T \quad (1.2.5-b)$$

である.

このように, ベクトルは基底ベクトルとそれに対応する座標成分によって定義される. 複数の座標系を同時に使用する場合, ベクトルを式(1.2.2)のように表記すると便利である.

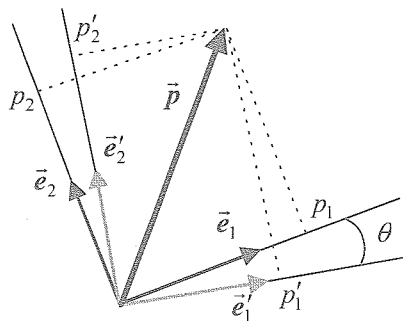


図 1.2.2 2 次元平面内のベクトルと座標系

ベクトルの内積演算

任意の2つのベクトル \vec{a} , \vec{b} を考える. ベクトル \vec{a} の大きさを $|\vec{a}|$ と表せば, \vec{a} と \vec{b} の内積 (inner, dot あるいは scalar product) は,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \quad (1.2.4)$$

で定義され(図 1.2.3(a)), 結果はスカラーになる.

ベクトルの外積演算

\vec{a} と \vec{b} の外積(outer, cross あるいは vector product)は, 以下の性質を満たすベクトルとして定義され, $\vec{a} \times \vec{b}$ と表記する(図 1.2.3(b)).

- (a) 大きさが $|\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$ (\vec{a} と \vec{b} により張られる平行四辺形の面積).
- (b) 方向が \vec{a} と \vec{b} により張られる面に垂直で, \vec{a} から \vec{b} に向かって右ねじを回すときのねじの進む向き.

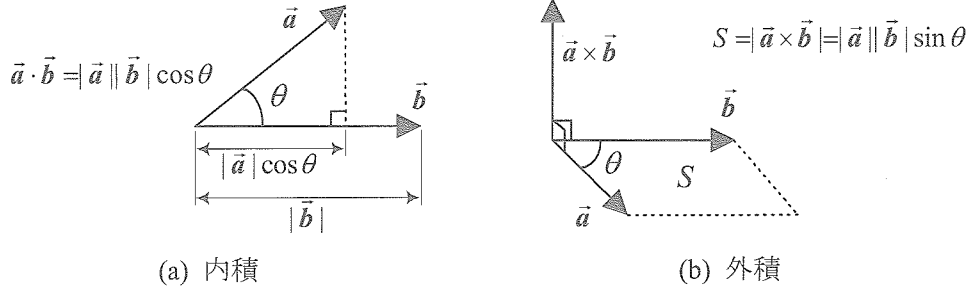


図 1.2.3 ベクトルの内積・外積演算

直交座標系の基底ベクトル $\{\vec{e}\}$ の各要素 \vec{e}_1 , \vec{e}_2 , \vec{e}_3 は, それぞれ大きさ1で互いに直行することから, ベクトルの内積演算を用いて次のような関係を満たす.

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 = 1 \quad (1.2.6-a)$$

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 = 0 \quad (1.2.6-b)$$

を満たす. また, これらが右手系をなすことから, ベクトルの外積演算を用いて次のような関係を満たす.

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_3 = \vec{0} \quad (1.2.7-a)$$

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_3, \quad \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_1, \quad \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = -\vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_2 \quad (1.2.7-b)$$

ただし, $\vec{0}$ は零ベクトルである. よって,

$$\{\vec{e}\} \cdot \{\vec{e}\}^T = \begin{Bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{U}_3 \quad (1.2.8-a)$$

$$\{\vec{e}\} \times \{\vec{e}\}^T = \begin{Bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \times \vec{e}_1 & \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 & \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 \\ \vec{e}_2 \times \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \times \vec{e}_2 & \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 \\ \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 & \vec{e}_3 \times \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \times \vec{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{0} & \vec{e}_3 & -\vec{e}_2 \\ -\vec{e}_3 & \vec{0} & \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 & -\vec{e}_1 & \vec{0} \end{bmatrix} \quad (1.2.8-b)$$

が成り立つ. ただし, \mathbf{U}_m は $m \times m$ の単位行列(unit あるいは identity matrix)である. 括弧の

[]と{}は、スカラーをまとめているかベクトルをまとめているかで区別している。

一方、任意の3つのベクトル \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} に関して、次のような有用な関係式がある。

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \quad (\text{スカラー3重積(scalar triple product)}) \quad (1.2.9)$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} \quad (\text{ベクトル3重積(vector triple product)}) \quad (1.2.10)$$

特にスカラー3重積の値は、3つのベクトルにより構成される平行6面体の体積を表す。

1.3 ダイアディック

式(1.2.2)は、基底ベクトルの線形結合と見るができる。極めて数学的ではあるが、この拡張として次のような基底ベクトルの2次形式が定義できる。

$$\begin{aligned} \vec{D} &= D_{11} \vec{e}_1 \vec{e}_1 + D_{12} \vec{e}_1 \vec{e}_2 + D_{13} \vec{e}_1 \vec{e}_3 \\ &+ D_{21} \vec{e}_2 \vec{e}_1 + D_{22} \vec{e}_2 \vec{e}_2 + D_{23} \vec{e}_2 \vec{e}_3 \\ &+ D_{31} \vec{e}_3 \vec{e}_1 + D_{32} \vec{e}_3 \vec{e}_2 + D_{33} \vec{e}_3 \vec{e}_3 \\ &= \{\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \vec{e}_3\} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{bmatrix} = \{\vec{e}\}^T \mathbf{D} \{\vec{e}\} \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

基底ベクトルを2つ並べた $\vec{e}_i \vec{e}_j$ (テンソル積(tensor product)とも呼ばれ, $\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$ とも書く)は、**ダイアド(dyad)**と呼ばれ、その線形結合である \vec{D} は**ダイアディック(dyadic**あるいは Cartesian tensor)と呼ばれる[1.5][1.6]。以下、ダイアディックを矢印付き太字斜体(大文字)で表記する。ダイアディック \vec{D} は、ベクトルと同様に座標系に依存しない量である。宇宙機のダイナミクスにおいても、慣性ダイアディック(3章)など、ベクトルとは種類の異なる量として登場する。一方、 \mathbf{D} は、ダイアディック \vec{D} の $\{\vec{e}\}$ 系における成分行列(3×3)であり、観測する座標系に依存して決まる単なる数字の集まりである。

任意のダイアディック $\vec{D} = \{\vec{e}\}^T \mathbf{D} \{\vec{e}\}$ とベクトル $\vec{a} = \{\vec{e}\}^T \mathbf{a}$ の内積演算は、

$$\vec{D} \cdot \vec{a} = \{\vec{e}\}^T \mathbf{D} \{\vec{e}\} \cdot \{\vec{e}\}^T \mathbf{a} = \{\vec{e}\}^T \mathbf{D} \mathbf{a} \quad (1.3.2-a)$$

あるいは、

$$\vec{a} \cdot \vec{D} = \mathbf{a}^T \{\vec{e}\} \cdot \{\vec{e}\}^T \mathbf{D} \{\vec{e}\} = \mathbf{a}^T \mathbf{D} \{\vec{e}\} = \{\vec{e}\}^T \mathbf{D}^T \mathbf{a} \quad (1.3.2-b)$$

のように書ける。これよりベクトル \vec{a} は、ダイアディック \vec{D} によって、成分列が $\mathbf{D} \mathbf{a}$ または $\mathbf{D}^T \mathbf{a}$ の別のベクトルに移されていることが分かる。つまり、ベクトルをベクトルに移す線形写像という意味で、ダイアディックは(2次の)テンソル(tensor)量である。このテンソルという概念によって、スカラー、ベクトル、ダイアディックを、それぞれ0次、1次、2次のテンソルとして結び付けることができる(表 1.3.1)(成分列の座標変換に関連してベクトルやダイアディックを定義することもできる)。数学的には n 次のテンソルまで考えられが、いずれにしても座標系に依存しない量である。

任意の2つのベクトル \vec{a} , \vec{b} を2つ並べた $\vec{a}\vec{b}$ は、ダイアディックである。ダイアディック $\vec{a}\vec{b}$ と任意のベクトル \vec{c} との内積は、隣り合うベクトルの内積をそのまま適用して、

$$(\vec{a}\vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a} \quad (\text{ベクトル } \vec{a} \text{ のスカラー倍}) \quad (1.3.3\text{-a})$$

$$\vec{c} \cdot (\vec{a}\vec{b}) = (\vec{c} \cdot \vec{a}) \vec{b} \quad (\text{ベクトル } \vec{b} \text{ のスカラー倍}) \quad (1.3.3\text{-b})$$

と定義される。つまり、ダイアディック $\vec{a}\vec{b}$ は、任意のベクトルを \vec{a} 方向、あるいは \vec{b} 方向のベクトルに移す。一方、成分行列が単位行列であるようなダイアディック、

$$\vec{U} = \{\vec{e}\}^T \mathbf{U}_3 \{\vec{e}\} = \{\vec{e}\}^T \{\vec{e}\} \quad (1.3.4)$$

は**単位ダイアディック**(unit dyadic)と呼ばれる。この場合は、

$$\vec{U} \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{U} = \vec{a} \quad (1.3.5)$$

のように任意のベクトルを同じベクトルに移すダイアディックと解釈できる。

式(1.2.10)のベクトル3重積は、式(1.3.3-a, 5)を用いることにより、

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \{\vec{b}\vec{a} - (\vec{b} \cdot \vec{a})\vec{U}\} \cdot \vec{c} \quad (1.3.6)$$

とも書けることが分かる。

表 1.3.1 テンソル量の比較

| | スカラー | ベクトル | ダイアディック |
|-------|----------|-----------------|------------------------------------|
| テンソル | 0 次 | 1 次 | 2 次 |
| 物理量の例 | 時間 質量 | 位置ベクトル 力ベクトル | 回転ダイアディック(2.2 節) 慣性ダイアディック(3 章) |

1.4 行列

式(1.2.8-a,b)を用いれば、2つのベクトル $\vec{a} = \{\vec{e}\}^T \mathbf{a} = \{\vec{e}\}^T [a_1 \ a_2 \ a_3]^T$, $\vec{b} = \{\vec{e}\}^T \mathbf{b} = \{\vec{e}\}^T [b_1 \ b_2 \ b_3]^T$ の内・外積演算が、それぞれ、

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \mathbf{a}^T \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (1.4.1\text{-a})$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \{\vec{e}\}^T \tilde{\mathbf{a}} \mathbf{b} = \{\vec{e}\}^T \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix} \quad (1.4.1\text{-b})$$

と行列表現できる。ここで、

$$\tilde{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} = -\tilde{\mathbf{a}}^T \quad (1.4.2)$$

であり、 \sim を**反対称行列化演算子**(skew symmetric matrix operator)と呼ぶことにする。一般に、実正方行列 \mathbf{A} が $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ を満たすとき、 \mathbf{A} を**対称行列**(symmetric matrix)と呼び、 $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$ を満たすとき、**反対称**(あるいは**歪対称**)**行列**(anti-symmetric あるいは skew symmetric matrix)と呼ぶ。

式(1.4.1-a)より、ベクトル \vec{a} の大きさは、

$$|\vec{a}| = \sqrt{\mathbf{a}^T \mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \quad (1.4.3)$$

と表せる。式(1.4.3)の右辺は、列行列 \mathbf{a} のユークリッド・ノルムあるいは2-ノルム(Euclidean norm あるいは two-norm)とも呼ばれ、 $\|\mathbf{a}\|$ や $\|\mathbf{a}\|_2$ とも書かれる。

任意の 2 つのベクトル $\vec{a} = \{\vec{e}\}^T \mathbf{a} = \{\vec{e}\}^T [a_1 \ a_2 \ a_3]^T$, $\vec{b} = \{\vec{e}\}^T \mathbf{b} = \{\vec{e}\}^T [b_1 \ b_2 \ b_3]^T$ から構成されるダイアディック $\vec{a}\vec{b}$ を, 行列成分で表現すると,

$$\vec{a}\vec{b} = \{\vec{e}\}^T \mathbf{a} \{\vec{e}\}^T \mathbf{b} = \{\vec{e}\}^T \mathbf{a} \mathbf{b}^T \{\vec{e}\} = \{\vec{e}\}^T \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix} \{\vec{e}\} \quad (1.4.4)$$

と表せる. 行列演算 $\mathbf{a} \mathbf{b}^T$ を行列の外積(outer product)と呼ぶこともある.

表記法

以上のように, 座標系に依存しないベクトル, ダイアディックの演算が, 座標系を 1 つ指定することにより行列演算に帰着できることが分かる. 座標系を意識せず, ベクトルとダイアディックのみを用いて式を記述すれば**ベクトル・ダイアディック表記**(vector-dyadic notation), 座標系を 1 つ指定することにより行列のみを用いて式を記述すれば**行列表記**(matrix notation)と呼ばれる. ここまで示した演算を, 両方の表記で記述して対比すると表 1.4.1 となる. 理論的な議論をする際にはベクトル・ダイアディック表記, プログラムのコーディングを考慮する際には行列表記が好まれる. 記号は本や論文によって異なるので, どちらの記法で書かれているかを見極めることが大切である.

表 1.4.1 表記法の比較

| | ベクトル・ダイアディック | 行列 ($\{\vec{e}\}$ 系成分) |
|------------------------------------|--------------------------|---------------------------------|
| 内積 (式(1.4.1-a)) | $\vec{a} \cdot \vec{b}$ | $\mathbf{a}^T \mathbf{b}$ |
| 外積 (式(1.4.1-b)) | $\vec{a} \times \vec{b}$ | $\tilde{\mathbf{a}} \mathbf{b}$ |
| 2 つのベクトルから成る ダイアディック (式(1.4.4)) | $\vec{a}\vec{b}$ | $\mathbf{a} \mathbf{b}^T$ |
| ダイアディックと ベクトルの内積 (式(1.3.2-a,b)) | $\vec{D} \cdot \vec{a}$ | $\mathbf{D} \mathbf{a}$ |
| | $\vec{a} \cdot \vec{D}$ | $\mathbf{D}^T \mathbf{a}$ |

【例題 1-2】

式(1.4.1-a)を導く. 以下, $\vec{a} = \{\vec{e}\}^T \mathbf{a} = \{\vec{e}\}^T [a_1 \ a_2 \ a_3]^T$, $\vec{b} = \{\vec{e}\}^T \mathbf{b} = \{\vec{e}\}^T [b_1 \ b_2 \ b_3]^T$ とする.

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (\{\vec{e}\}^T \mathbf{a}) \cdot (\{\vec{e}\}^T \mathbf{b}) \\ &= \mathbf{a}^T \boxed{} \cdot \{\vec{e}\}^T \mathbf{b} \end{aligned} \quad (1.4.5)$$

式(1.2.8-a)を代入すれば, 式(1.4.1-a)の右辺を得る.

次に, 式(1.4.1-b)を導く.

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (\{\vec{e}\}^T \mathbf{a}) \times (\{\vec{e}\}^T \mathbf{b}) \\ &= \mathbf{a}^T \boxed{} \times \{\vec{e}\}^T \mathbf{b} \end{aligned} \quad (1.4.6)$$

ここで, 式(1.2.8-b)を代入することにより,

$$\bar{\mathbf{a}} \times \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{a}^T \left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right\} \mathbf{b} = \{ \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \} \mathbf{b} \quad (1.4.7)$$

$\{\}$ の中から $\{\bar{\mathbf{e}}\}$ を取り出すと式(1.4.1-b)を得る.

$$\bar{\mathbf{a}} \times \bar{\mathbf{b}} = \{\bar{\mathbf{e}}\}^T \left[\begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right] \mathbf{b} = \{\bar{\mathbf{e}}\}^T \tilde{\mathbf{a}} \mathbf{b} \quad (1.4.8)$$

1.5 方向余弦行列

ここでは、異なる座標系 $\{\bar{\mathbf{u}}\}$ 、 $\{\bar{\mathbf{v}}\}$ 間の姿勢(座標系の原点を一致させたときの基底ベクトルのずれ)を考える. 本節では、座標系の原点は一致しているとして議論する.

一般に、ベクトルは式(1.2.2)のように任意の基底ベクトルの線形結合で表される. よって、 $\{\bar{\mathbf{v}}\}$ 系の各基底ベクトルも、 $\{\bar{\mathbf{u}}\}$ 系の基底ベクトルを用いて次式のように表せるはずである.

$$\bar{\mathbf{v}}_1 = c_{11} \bar{\mathbf{u}}_1 + c_{12} \bar{\mathbf{u}}_2 + c_{13} \bar{\mathbf{u}}_3 \quad (1.5.1-a)$$

$$\bar{\mathbf{v}}_2 = c_{21} \bar{\mathbf{u}}_1 + c_{22} \bar{\mathbf{u}}_2 + c_{23} \bar{\mathbf{u}}_3 \quad (1.5.1-b)$$

$$\bar{\mathbf{v}}_3 = c_{31} \bar{\mathbf{u}}_1 + c_{32} \bar{\mathbf{u}}_2 + c_{33} \bar{\mathbf{u}}_3 \quad (1.5.1-c)$$

これらをまとめると、

$$\{\bar{\mathbf{v}}\} = \mathbf{C} \{\bar{\mathbf{u}}\} \quad (1.5.2)$$

と書ける. ただし、

$$\mathbf{C} = \{\bar{\mathbf{v}}\} \cdot \{\bar{\mathbf{u}}\}^T = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{v}}_1 \cdot \bar{\mathbf{u}}_1 & \bar{\mathbf{v}}_1 \cdot \bar{\mathbf{u}}_2 & \bar{\mathbf{v}}_1 \cdot \bar{\mathbf{u}}_3 \\ \bar{\mathbf{v}}_2 \cdot \bar{\mathbf{u}}_1 & \bar{\mathbf{v}}_2 \cdot \bar{\mathbf{u}}_2 & \bar{\mathbf{v}}_2 \cdot \bar{\mathbf{u}}_3 \\ \bar{\mathbf{v}}_3 \cdot \bar{\mathbf{u}}_1 & \bar{\mathbf{v}}_3 \cdot \bar{\mathbf{u}}_2 & \bar{\mathbf{v}}_3 \cdot \bar{\mathbf{u}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \quad (1.5.3)$$

である. \mathbf{C} は、**座標変換行列**(coordinate transformation matrix)とか**方向余弦行列**(direction cosine matrix)(略して DCM と呼ばれることもある)と呼ばれる. 方向余弦(direction cosine)とは図 1.5.1 のように定義される長さであり、 \mathbf{C} の第1行を図示すると図 1.5.2 のようになる. この方向余弦行列によって、2つの座標系間の姿勢が定量的に表せたことになる.

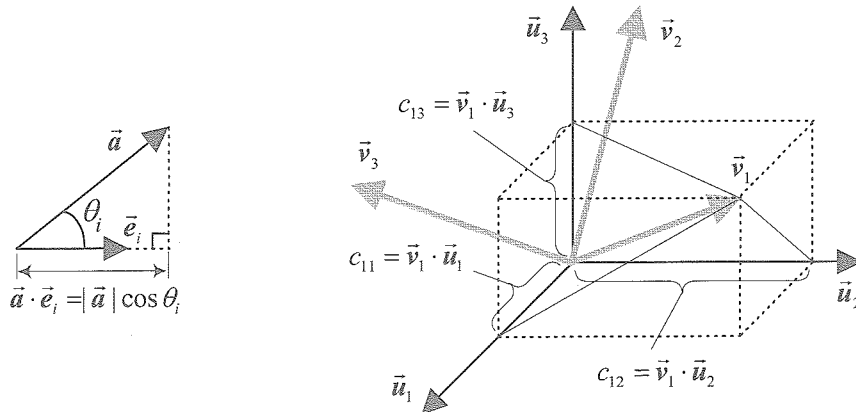


図 1.5.1 方向余弦

図 1.5.2 方向余弦行列の成分[1.6]

式(1.2.8-a)より $\{\vec{v}\} \cdot \{\vec{v}\}^T = U_3$ であるから、これに式(1.5.2)と(1.2.7-a)の関係を適用すれば、

$$\{\vec{v}\} \cdot \{\vec{v}\}^T = C\{\vec{u}\} \cdot (C\{\vec{u}\})^T = C\{\vec{u}\} \cdot \{\vec{u}\}^T C^T = CC^T = U_3 \quad (1.5.4)$$

が導かれる。 $\{\vec{u}\} \cdot \{\vec{u}\}^T$ の計算から同様にして $C^T C = U_3$ も導かれるので、結局

$$CC^T = C^T C = U_3 \quad (1.5.5)$$

つまり

$$C^T = C^{-1} \quad (1.5.6)$$

を得る(逆行列を求めるのに転置するだけでよい!)。これより、 C は**正規直交行列**(orthonormal matrix)であることが分かる。

$C^T C$ が対角行列となる実正方行列 A を直交行列(orthogonal matrix)と呼ぶ。さらに、その対角行列が単位行列の場合、 C を正規直交行列と呼ぶ。 $C^T C$ が対角行列ならば必ず $C^T C = CC^T$ を満たすので、結果的に $C^T C = U_3$ または $CC^T = U_3$ のどちらか一方が示せば正規直交行列であると言える。いずれにしても、式(1.5.5)から正規直交行列の成分の満たすべき条件が6個得られる。すなわち、正規直交行列の9要素のうち、独立なものは3個であることが分かる。

一方、正規直交行列の行列式は ± 1 であることが示せるが、方向余弦行列の行列式は $+1$ でなければならない(固有(proper)正規直交行列と呼ばれる)。これは、右手系間の変換を規定する付加的条件である。 -1 であるとする、右手系から左手系(またはその逆へ)の反転(inversion あるいは reflection)が起こることになり、物理的に矛盾する。

いま、任意の1つのベクトル \vec{x} を、異なる座標系 $\{\vec{u}\}$ と $\{\vec{v}\}$ で表し、 $\vec{x} = \{\vec{u}\}^T \mathbf{x}_u = \{\vec{v}\}^T \mathbf{x}_v$ とする。ここで、方向余弦行列を $\{\vec{v}\} = C\{\vec{u}\}$ と定義すると、 $\{\vec{v}\}^T = \{\vec{u}\}^T C^T$ と書けるので、

$$\{\vec{v}\}^T \mathbf{x}_v = \{\vec{u}\}^T C^T \mathbf{x}_v \quad (1.5.7)$$

つまり、

$$\mathbf{x}_u = C^T \mathbf{x}_v \quad (1.5.8-a)$$

を得る。式(1.5.6)の関係を使えば、

$$\mathbf{x}_v = C \mathbf{x}_u \quad (1.5.8-b)$$

も得られる。

同様に、任意の1つのダイアディック \vec{D} を $\{\vec{u}\}$ 系と $\{\vec{v}\}$ 系で表し、 $\vec{D} = \{\vec{u}\}^T \mathbf{D}_u \{\vec{u}\} = \{\vec{v}\}^T \mathbf{D}_v \{\vec{v}\}$ とすれば、

$$\mathbf{D}_u = C^T \mathbf{D}_v C \quad (1.5.9-a)$$

$$\mathbf{D}_v = C \mathbf{D}_u C^T \quad (1.5.9-b)$$

が成り立つ。

あるベクトルまたはダイアディックを異なる座標系で観測したとき、その成分行列が方向余弦行列によって式(1.5.8)または(1.5.9)で関係づけられることが分かった。逆に、成分行列にそのような関係が成り立つとき、元の量がベクトルまたはダイアディックであると定義できる。

[ベクトル]

方向余弦行列 C により $\{\vec{v}\} = C\{\vec{u}\}$ なる関係にある2つの異なる座標系 $\{\vec{u}\}$ と $\{\vec{v}\}$ に対して、それぞれ3成分 \mathbf{x}_u , \mathbf{x}_v で表されるある量 \vec{x} を考える。このとき、 \mathbf{x}_u , \mathbf{x}_v が式(1.5.8)の関係を満たせば、 \vec{x} をベクトルと呼ぶ。

[ダイアディック]

方向余弦行列 \mathbf{C} により $\{\vec{v}\} = \mathbf{C} \{\vec{u}\}$ なる関係にある 2 つの異なる座標系 $\{\vec{u}\}$ と $\{\vec{v}\}$ に対して、それぞれ 9 成分 \mathbf{D}_u , \mathbf{D}_v で表されるある量 \vec{D} を考える。このとき、 \mathbf{D}_u , \mathbf{D}_v が式(1.5.9)の関係を満たせば、 \vec{D} をダイアデックと呼ぶ。

【例題 1-3】

(1) 図 1.5.3 に示すような 2 次元ユークリッド空間内で、2 つの座標系を考え、その座標系間の方向余弦行列を求める。

式(1.5.1)にならって、 $\{\vec{v}\}$ 系の基底ベクトル \vec{v}_1 , \vec{v}_2 を $\{\vec{u}\}$ 系の基底ベクトル \vec{u}_1 , \vec{u}_2 で表現すると、

$$\vec{v}_1 = \boxed{} \vec{u}_1 + \boxed{} \vec{u}_2 \quad (1.5.10-a)$$

$$\vec{v}_2 = \boxed{} \vec{u}_1 + \boxed{} \vec{u}_2 \quad (1.5.10-b)$$

となる。よって、方向余弦行列は次のように求まる。

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} \quad (1.5.11)$$

式(1.5.3)に基づいて、式(1.5.11)を直接求めてもよい。

(2) 正規直交行列の確認を下さい

$$\mathbf{C}\mathbf{C}^T = \mathbf{C}^T\mathbf{C} = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$$

または $\mathbf{C}^T = \mathbf{C}^{-1}$ を確認すればよい。

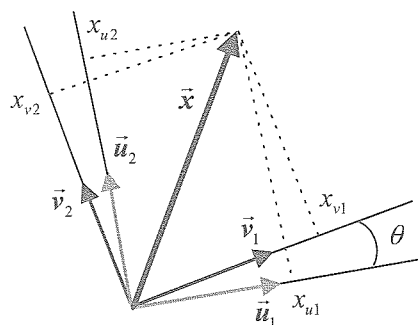


図 1.5.3 2 次元平面内のベクトルと座標系(方向余弦行列)

第 1 章例題解答

【例題 1-1】

基底ベクトルと座標成分の概念を理解する。簡単のため、図 1.2.2 のような 2 次元ユークリッド空間のベクトルを考える。あるベクトル \vec{p} を、直交座標系 $\{\vec{e}\} = \{\vec{e}_1 \ \vec{e}_2\}^T$ で表すと、

$$\vec{p} = p_1 \vec{e}_1 + p_2 \vec{e}_2 = \{\vec{e}\}^T \mathbf{p} \quad (1.2.4-a)$$

ただし、

$$\mathbf{p} = [p_1 \ p_2]^T \quad (1.2.4-b)$$

と表せるとする。次に、 \vec{p} を p_1 , p_2 , θ を使って $\{\vec{e}'\} = \{\vec{e}'_1 \ \vec{e}'_2\}^T$ 系で表すと、

$$\begin{aligned} \vec{p} &= (\cos \theta p_1 + \sin \theta p_2) \vec{e}'_1 + (-\sin \theta p_1 + \cos \theta p_2) \vec{e}'_2 \\ &= p'_1 \vec{e}'_1 + p'_2 \vec{e}'_2 \end{aligned}$$

$$= \{\vec{e}'\}^T \mathbf{p}' \quad (1.2.5-a)$$

ただし,

$$\mathbf{p}' = [p'_1 \quad p'_2]^T \quad (1.2.5-b)$$

である.

このように, ベクトルは基底ベクトルとそれに対応する座標成分によって定義される. 複数の座標系を同時に使用する場合は, ベクトルを式(1.2.2)のように表記すると便利である.

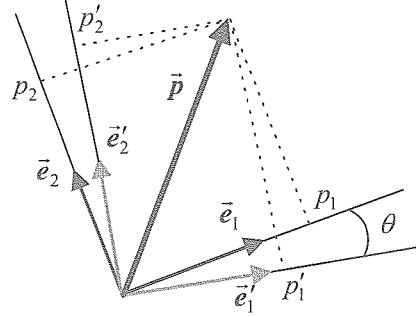


図 1.2.2 2次元平面内のベクトルと座標系

【例題 1-2】

式(1.4.1-a)を導く. 以下, $\vec{a} = \{\vec{e}\}^T \mathbf{a} = \{\vec{e}\}^T [a_1 \quad a_2 \quad a_3]^T$, $\vec{b} = \{\vec{e}\}^T \mathbf{b} = \{\vec{e}\}^T [b_1 \quad b_2 \quad b_3]^T$ とする.

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (\{\vec{e}\}^T \mathbf{a}) \cdot (\{\vec{e}\}^T \mathbf{b}) \\ &= \mathbf{a}^T \boxed{\{\vec{e}\}} \cdot \{\vec{e}\}^T \mathbf{b} \end{aligned} \quad (1.4.5)$$

式(1.2.8-a)を代入すれば, 式(1.4.1-a)の右边を得る.

次に, 式(1.4.1-b)を導く.

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (\{\vec{e}\}^T \mathbf{a}) \times (\{\vec{e}\}^T \mathbf{b}) \\ &= \mathbf{a}^T \boxed{\{\vec{e}\}} \times \{\vec{e}\}^T \mathbf{b} \end{aligned} \quad (1.4.6)$$

ここで, 式(1.2.8-b)を代入することにより,

$$\vec{a} \times \vec{b} = \mathbf{a}^T \begin{bmatrix} \vec{0} & \vec{e}_3 & -\vec{e}_2 \\ -\vec{e}_3 & \vec{0} & \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 & -\vec{e}_1 & \vec{0} \end{bmatrix} \mathbf{b} = \underline{\{-a_2 \vec{e}_3 + a_3 \vec{e}_2 \quad a_1 \vec{e}_3 - a_3 \vec{e}_1 \quad -a_1 \vec{e}_2 + a_2 \vec{e}_1\}} \mathbf{b} \quad (1.4.7)$$

$\{\}$ の中から $\{\vec{e}\}$ を取り出すと式(1.4.1-b)を得る.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \{\vec{e}\}^T \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{b} = \{\vec{e}\}^T \tilde{\mathbf{a}} \mathbf{b} \quad (1.4.8)$$

【例題 1-3】

(1) 図 1.5.3 に示すような 2 次元ユークリッド空間内で、2 つの座標系を考え、その座標系間の方向余弦行列を求める。

式(1.5.1)にならって、 $\{\vec{v}\}$ 系の基底ベクトル \vec{v}_1, \vec{v}_2 を $\{\vec{u}\}$ 系の基底ベクトル \vec{u}_1, \vec{u}_2 で表現すると、

$$\vec{v}_1 = \boxed{\cos \theta} \vec{u}_1 + \boxed{\sin \theta} \vec{u}_2 \quad (1.5.10-a)$$

$$\vec{v}_2 = \boxed{-\sin \theta} \vec{u}_1 + \boxed{\cos \theta} \vec{u}_2 \quad (1.5.10-b)$$

となる。よって、方向余弦行列は次のように求まる。

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (1.5.11)$$

式(1.5.3)に基づいて、式(1.5.11)を直接求めてもよい。

(2) 正規直交行列の確認を下さい

$$\mathbf{C}\mathbf{C}^T = \mathbf{C}^T\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

または $\mathbf{C}^T = \mathbf{C}^{-1}$ を確認すればよい。

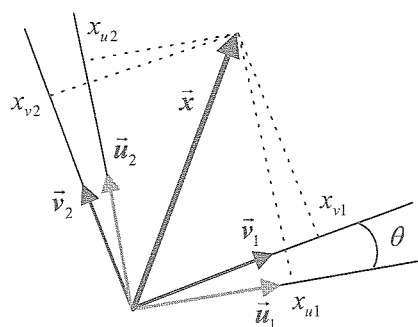


図 1.5.3 2 次元平面内のベクトルと座標系(方向余弦行列)

第2章 運動学の基礎

キネマティクス(運動学)(kinematics)とは, ある物体の幾何学的位置, 速度, 加速度の関係を扱う学問である. したがって, そこには力やトルクは介在しない. 一方, ダイナミクス(動力学)(dynamics)は, 運動方程式に支配される物体の運動を取り扱う学問である. 宇宙機の運動を解析するためには, キネマティクスとダイナミクスの両方の知識が必要である. ここでは単一の剛体を扱い, キネマティクスの基礎を説明する.

2.1 運動と自由度

ここでは簡単のため, 物体上の任意の点の距離が不変であると理想化した剛体(rigid body)の運動を扱う. 剛体の運動を記述する際には, 基準となる座標系と剛体に固定された座標系を用いる. 図 2.1.1 のように, ある点 O を原点とする基準座標系を $\{\vec{a}\}$, 原点を剛体上の点 C に固定されて物体とともに動く物体固定座標系を $\{\vec{b}\}$ とする. このとき, 基準座標系に対する剛体の位置とは, 点 O に対する点 C の位置と $\{\vec{a}\}$ 系に対する $\{\vec{b}\}$ 系の姿勢から構成される. つまり剛体の運動は, それらの時間変化として並進(translation)と回転(rotation)で構成される(Chasles の定理). 以下, 単一剛体の運動を, 図 2.1.1 を用いて具体的に考えてみる. 以後, この章ではできるだけ図 2.1.1 の記号を用いて説明する.

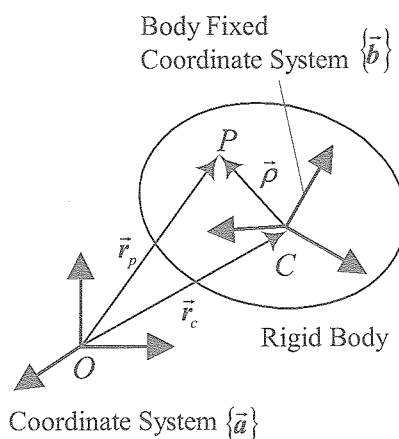


図 2.1.1 単一剛体のキネマティクス

参照系 $\{\vec{a}\}$ の原点 O から見た剛体上のある 1 点 P の位置ベクトル \vec{r}_p は,

$$\vec{r}_p = \vec{r}_c + \vec{\rho} \quad (2.1.1)$$

と書ける. ただし,

$$\vec{r}_p = \{\vec{a}\}^T \mathbf{r}_p \quad (2.1.2-a)$$

$$\vec{r}_c = \{\vec{a}\}^T \mathbf{r}_c \quad (2.1.2-b)$$

$$\vec{\rho} = \{\vec{b}\}^T \boldsymbol{\rho} \quad (2.1.2-c)$$

とする. いま, 方向余弦行列 \mathbf{C} が $\mathbf{C} \{\vec{a}\} = \{\vec{b}\}$ で定義されているとして, 式(2.1.1)を $\{\vec{a}\}$ 系における行列表記で表すと,

$$\mathbf{r}_p = \mathbf{r}_c + \mathbf{C}^T \boldsymbol{\rho} \quad (2.1.3)$$

と書ける. $\boldsymbol{\rho}$ は時間 t に依存せず一定なので, 位置レベルでの並進は $\mathbf{r}_c \equiv \mathbf{r}_c(t)$, 回転は $\mathbf{C} \equiv \mathbf{C}(t)$ によって表されることが分かる. これより, 位置を記述する変数が並進で 3 個, 回転で 9 個の計 12 個必要に思える. しかし, 回転を表す方向余弦行列は正規直交行列であり, その条件から独立な変数は 3 個である. つまり, 独立な位置変数は並進 3 個, 回転 3 個の計 6 個であり, この数を位置レベルの自由度(degrees of freedom)と呼ぶ.

【例題 2-1】3次元剛体の自由度

3次元剛体の位置・姿勢は、剛体上の1直線上にない 点の位置(変数)を指定すれば完全に決まる。それら点の間の距離は一定であることから 個の拘束式が得られるので、結局 個の変数が独立であることが分かる。(空欄は全て数字)

2.2 有限回転

剛体のある一点が固定された場合、並進自由度が消えて回転の自由度のみが残る。これは、”1点が固定された剛体の一般的な変位は、ある軸まわりの回転である”という**回転に関するオイラーの定理**(Euler's theorem on rotation about a fixed point)により示されている(方向余弦行列の固有値問題に帰着させて証明できる)。つまり座標変換は、適当な軸まわりの単一の回転によって表せる(**有限回転**(finite rotation))。

そこで、ある軸まわりの回転変換を表す方向余弦行列を考える。図 2.2.1(a)に示すように、回転軸方向を表す単位ベクトルを $\vec{\lambda}$ (**オイラー軸**(Euler axis)と呼ばれる)、回転角を θ 、基準系を $\{\vec{a}\}$ 、回転系を $\{\vec{b}\}$ とする。このとき、求める方向余弦行列が $\mathbf{C}\{\vec{a}\}=\{\vec{b}\}$ と定義できる。この行列を成分に持つ**回転ダイアディック**は、 \mathbf{C} の正規直交性(1.5.5)より、

$$\bar{\mathbf{C}}=\{\vec{a}\}^T \mathbf{C}\{\vec{a}\}=\{\vec{b}\}^T \mathbf{C}\{\vec{b}\}=\{\vec{a}\}^T \{\vec{b}\} \quad (2.2.1)$$

と表される。ダイアディック $\bar{\mathbf{C}}$ を $\{\vec{a}\}$ 系と $\{\vec{b}\}$ 系のどちらから見てもその成分は \mathbf{C} である。単位ベクトル $\vec{\lambda}$ も、どちらの座標系から見ても同じ成分列となり、

$$\vec{\lambda}=\{\vec{a}\}^T \lambda=\{\vec{b}\}^T \lambda \quad (2.2.2)$$

と表す(2つの座標系の姿勢が一致しているとき($\theta=0$ のときなど)に回転軸は特定できない)。

ここで、 $\vec{\lambda}$ と θ を用いてダイアディック $\bar{\mathbf{C}}$ を求めると、

$$\bar{\mathbf{C}}=\bar{\mathbf{U}} \cos \theta-\tilde{\vec{\lambda}} \sin \theta+\vec{\lambda} \vec{\lambda}^T(1-\cos \theta) \quad (2.2.3)$$

を得る(**回転公式**(rotation formula))[2.1]。ここで $\tilde{\vec{\lambda}}$ は、その成分が反対称行列 $\tilde{\lambda}$ となる反対称ダイアディックである。これを成分行列で表すと、方向余弦行列として、

$$\mathbf{C}=\mathbf{U}_3 \cos \theta-\tilde{\lambda} \sin \theta+\lambda \lambda^T(1-\cos \theta) \quad (2.2.4)$$

を得る。特に、回転軸が基底ベクトルのいずれかと平行な場合、つまり $\lambda=[1 \ 0 \ 0]^T$, $[0 \ 1 \ 0]^T$, $[0 \ 0 \ 1]^T$ の場合、その回転を**基本回転**(elementary rotation)と呼ぶ。1軸、2軸、3軸まわりの回転に対応する方向余弦行列をそれぞれ \mathbf{C}^1 , \mathbf{C}^2 , \mathbf{C}^3 とすると、式(2.2.4)より、

$$\mathbf{C}^1(\theta)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}^2(\theta)=\begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}^3(\theta)=\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2.5)$$

を得る。

[式(2.2.3)の証明]

図 2.2.1 のように座標系を $\vec{\lambda}$ 軸方向に反時計まわりに θ 回転させるダイアディックと、図 2.2.2 のようにベクトルを時計回りに θ だけ回転させるダイアディックは同じである。

そこで図 2.2.2 のように、任意のベクトル \vec{x} を $\vec{\lambda}$ 軸方向に時計回りに θ だけ回転させると、 \vec{y} に一致する状況を考える。つまり、式(2.1.1)の回転ダイアディックを用いて $\vec{y} = \vec{C} \cdot \vec{x}$ と書けるものとする。このとき、

$$\vec{x} = (\vec{x} \cdot \vec{\lambda})\vec{\lambda} + \vec{\tilde{x}} \quad (2.2.6-a)$$

$$\vec{y} = (\vec{x} \cdot \vec{\lambda})\vec{\lambda} + \vec{\tilde{y}} = (\vec{x} \cdot \vec{\lambda})\vec{\lambda} + (\vec{\tilde{x}} \times \vec{\lambda}) \sin \theta + \vec{\tilde{x}} \cos \theta \quad (2.2.6-b)$$

と表される。ここで、

$$\vec{\tilde{x}} \times \vec{\lambda} = \{\vec{x} - (\vec{x} \cdot \vec{\lambda})\vec{\lambda}\} \times \vec{\lambda} = \vec{x} \times \vec{\lambda} \quad (\because \vec{\lambda} \times \vec{\lambda} = \vec{0}) \quad (2.2.7)$$

を用いれば、

$$\begin{aligned} \vec{y} &= (\vec{x} \cdot \vec{\lambda})\vec{\lambda} + (\vec{x} \times \vec{\lambda}) \sin \theta + \{\vec{x} - (\vec{x} \cdot \vec{\lambda})\vec{\lambda}\} \cos \theta = \vec{\lambda} \vec{\lambda} \cdot \vec{x} - (\vec{\lambda} \cdot \vec{x}) \sin \theta + (\vec{U} - \vec{\lambda} \vec{\lambda}) \cdot \vec{x} \cos \theta \\ &= \{\vec{\lambda} \vec{\lambda} - \vec{\lambda} \sin \theta + (\vec{U} - \vec{\lambda} \vec{\lambda}) \cos \theta\} \cdot \vec{x} \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

で表せる。よって、式(2.2.3)を得る。

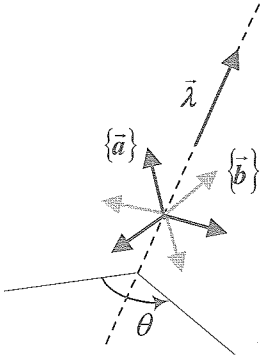


図 2.2.1 座標系の有限回転

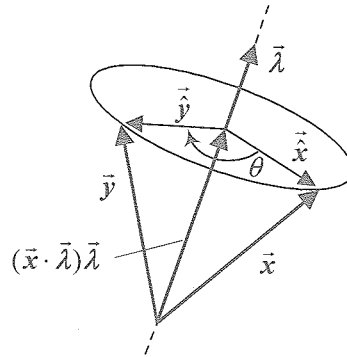


図 2.2.2 ベクトルの有限回転

2.3 無限小回転

ここまで姿勢を表す表現として方向余弦行列を説明したが、その要素数は回転自由度に比べて多すぎる。そこで、回転自由度と同じ数のパラメータで特徴づけられる 1 個のベクトルで姿勢が表せないかと考えたくなる。例えば、オイラー軸 $\vec{\lambda}$ に平行で大きさが回転角 θ の関数で表せるベクトルが、姿勢を表す 1 個のベクトルになると考えられそうだが、次の理由から無理なことが分かる[2.2]。いま、ある姿勢を表すベクトル \vec{a} と \vec{b} が存在すると仮定すると、これらはベクトルであるから $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ が成り立つ。これは、 \vec{a} と \vec{b} に対応する方向余弦行列がそれぞれ $\mathbf{C}_a, \mathbf{C}_b$ であるとしたとき、 $\mathbf{C}_a \mathbf{C}_b = \mathbf{C}_b \mathbf{C}_a$ が成立することを示している。ところが、図 2.3.1 に示すように有限回転の和は、回転の順序により異なる ($\mathbf{C}_a \mathbf{C}_b \neq \mathbf{C}_b \mathbf{C}_a$)。

一方、回転変化が無限小な**無限小回転**(infinitesimal rotation)は、1 個のベクトル量で表現できる。つまり、式(2.2.2)において回転角が無限小であるとすれば、 $\sin \theta \approx \theta$, $\cos \theta \approx 1$ より、

$$\vec{C} \approx \vec{U} - \theta \vec{\lambda} \quad (2.3.1)$$

が成り立つ。このとき、成分である方向余弦行列は、

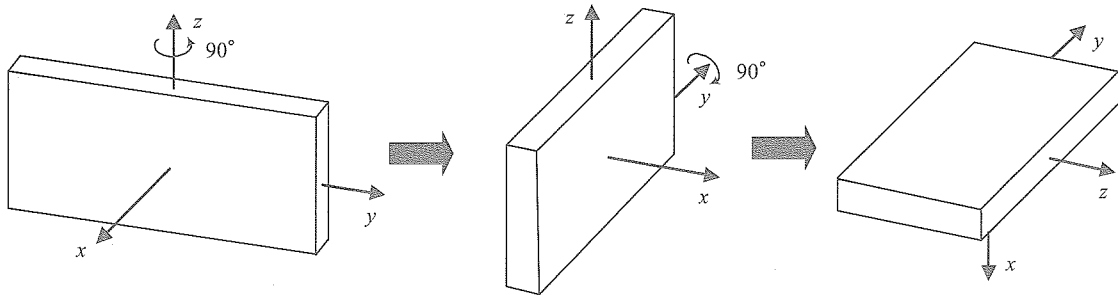
$$\mathbf{C} = \mathbf{U}_3 - \theta \vec{\lambda} \quad (2.3.2)$$

である。いま、異なる無限小回転を表す方向余弦行列を $\mathbf{C}_a = \mathbf{U}_3 - \theta_a \vec{\lambda}_a$, $\mathbf{C}_b = \mathbf{U}_3 - \theta_b \vec{\lambda}_b$ とすれ

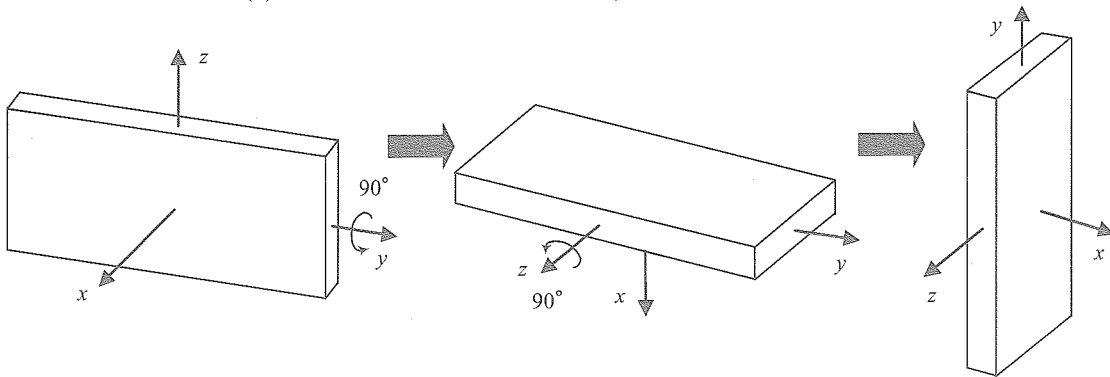
ば，2 次の微小量を無視して，

$$\mathbf{C}_a \mathbf{C}_b = \mathbf{C}_b \mathbf{C}_a = \mathbf{U}_3 - \theta_a \tilde{\lambda}_a - \theta_b \tilde{\lambda}_b \quad (2.3.3)$$

が成り立つ．これより，無限小回転の和は回転順序によらないことが分かる．つまり，無限小回転は，1 個のベクトル $\theta \tilde{\lambda}$ で表せることになる．



(a) z 軸まわりに 90°回転後，y 軸まわりに 90°回転



(b) y 軸まわりに 90°回転後，z 軸まわりに 90°回転

図 2.3.1 回転順序[2.2]

2.4 姿勢のパラメータ表示

ここでは有限回転を，ベクトルと結びついた独立な 3 パラメータで表すことを諦め，単なる 3 つの角度の組み合わせで表現する方法(オイラー角)を説明する．しかし，そこには数学的な特異点が存在してしまう(任意の姿勢を完全に 1 対 1 で表せない)．さらに，パラメータ数は冗長だが，数学的な特異点を持たない表現(クォータニオン)を説明する．

オイラー角

回転自由度と同数のパラメータで姿勢を表現する方法として，最も使用されるのが**オイラー角(Euler angles)**である．オイラー角とは，3 つの連続した基本回転により異なる 2 つの座標系間の姿勢を表現するものである．その種類は，回転により動いた座標系の軸まわりに逐次的に回転を定義する**物体角(body angle)**と，常に基準系の軸まわりに逐次的に回転を定義する**空間角(space angle)**がある[2.1]．ともに，回転させる軸の番号を順番に並べることで，”1-2-3 系オイラー角”などと呼ぶ．以上より 24 種類の異なるオイラー角 (物体角と空間

角でそれぞれ $3 \times 2 \times 2 = 12$ 組)が存在することが分かるが、ここでは中でもよく使用される 3-1-3 系、3-2-1 系(ともに物体角)のみ説明する。

物体角の 3-1-3 系は、オイラーが軌道 6 要素を扱うときに導入したとされている。その歴史的な理由から単にオイラー角というこのタイプを指すことが多い。スピン衛星の運動を解析する際にも適している。ここで、基準系を $\{\vec{a}\}$ 、基準系と姿勢の異なる回転系を $\{\vec{b}\}$ とする。図 2.4.1 に示すように、 $\{\vec{a}\}$ 系を $\{\vec{b}\}$ 系に一致させるように回転してゆく。まず、3 軸(\vec{a}_3)まわりに θ_1 だけ回転する。次に、回転後の座標系を $\{\vec{u}\}$ として、その 1 軸(\vec{u}_1)まわりに θ_2 だけ回転する。さらに、回転後の座標系を $\{\vec{v}\}$ 系として、その 3 軸(\vec{v}_3)まわりに θ_3 だけ回転し、 $\{\vec{b}\}$ 系に一致させる。このようにすればオイラー角 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ は、 $\theta_2 = 0, \pi$ の場合以外は一意に決定される。 $\theta_2 = 0, \pi$ の場合は、 θ_1 と θ_3 が区別できなくなるので特異値と呼ばれる。

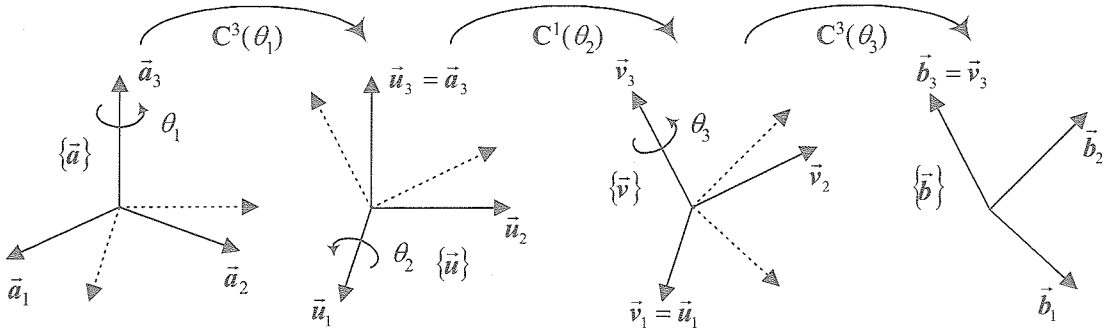


図 2.4.1 3-1-3 系オイラー角(物体角)

ここで、方向余弦行列 $\mathbf{C}(\mathbf{C}\{\vec{a}\} = \{\vec{b}\})$ を、オイラー角 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ を用いて表す。図 2.4.1 より、

$$\mathbf{C}^3(\theta_1)\{\vec{a}\} = \{\vec{u}\}, \quad \mathbf{C}^1(\theta_2)\{\vec{u}\} = \{\vec{v}\}, \quad \mathbf{C}^3(\theta_3)\{\vec{v}\} = \{\vec{b}\} \quad (2.4.1)$$

が成り立つので、

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}^3(\theta_3)\mathbf{C}^1(\theta_2)\mathbf{C}^3(\theta_1) = \begin{bmatrix} c_3c_2 - s_3c_2s_1 & c_3s_1 + s_3c_2c_1 & s_3s_2 \\ -s_3c_1 - c_3c_2s_1 & -s_3s_1 + c_3c_2c_1 & c_3s_2 \\ s_2s_1 & -s_2c_1 & c_2 \end{bmatrix} \quad (2.4.2)$$

を得る。ただし、 $\cos \theta = c_i$, $\sin \theta = s_i$ ($i=1,2,3$) とする。

次に、方向余弦行列 \mathbf{C} (成分を C_{ij} ($i,j=1,2,3$) とする) からオイラー角 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ を計算する方法を示す。式(2.4.2)より、

$$\begin{cases} \theta_2 = \text{atan2}\left(\sqrt{C_{13}^2 + C_{23}^2}, C_{33}\right) & (0 \leq \theta_2 \leq \pi) \\ \theta_3 = \text{atan2}(C_{13}/\sin \theta_2, C_{23}/\sin \theta_2) & (-\pi < \theta_3 \leq \pi) \\ \theta_1 = \text{atan2}(C_{31}/\sin \theta_2, -C_{32}/\sin \theta_2) & (-\pi < \theta_1 \leq \pi) \end{cases} \quad (2.4.3)$$

とすれば計算できることが分かる。ただし、 atan2 は Fortran または C 言語の組み込み関数であり、 $\theta = \text{atan2}(\sin \theta, \cos \theta)$ ($-\pi \leq \theta \leq \pi$) である。この場合、 $\sin \theta_2 = 0$ のとき、すなわち $\theta_2 = 0, \pi$ のとき計算できない。よって、数値計算において $C_{33} \approx \pm 1$ では、方向余弦行列から 3-1-3 系

オイラー角への変換はできない．これは，オイラー角の特異点の影響が直接的に現れた例である．このように，どのオイラー角にも必ず特異点が存在する．したがって，オイラー角を使用する際には，姿勢が特異点近傍に入らないことを確認する必要がある．

次に，物体角の 3-2-1 系について説明する．このタイプは，微小角とり扱いに適しているために航空機や宇宙機の姿勢表現に多用される．その場合，**ロール・ピッチ・ヨー角** (roll-pitch-yaw angles) と呼ばれるが，宇宙機の場合は，通常，軌道座標系(図 1.1.2-e)と衛星座標系(図 1.1.2-f)との姿勢のずれを表す．ただし，空間角としてロール・ピッチ・ヨーを定義する場合もあるので注意を要する．ここでは，[2.3]に基づいた定義を示す．

オイラー角 ϕ (ロール角)， θ (ピッチ角)， ψ (ヨー角) は，図 2.4.2 のように決める．このようにすれば， $\theta \neq \pi/2$ の場合以外は一意に決定される．

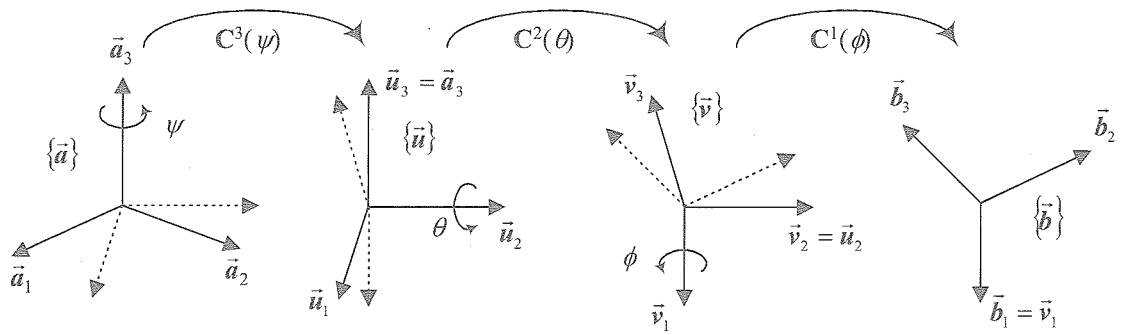


図 2.4.2 3-2-1 系オイラー角(物体角)

次に方向余弦行列 \mathbf{C} を，オイラー角 ψ ， θ ， ϕ を用いて表す(記号は慣習)．図 2.4.2 より，

$$\mathbf{C}^3(\psi)\{\vec{a}\}=\{\vec{u}\}, \quad \mathbf{C}^2(\theta)\{\vec{u}\}=\{\vec{v}\}, \quad \mathbf{C}^1(\phi)\{\vec{v}\}=\{\vec{b}\} \quad (2.4.4)$$

つまり，

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}^1(\phi)\mathbf{C}^2(\theta)\mathbf{C}^3(\psi) = \begin{bmatrix} c_\psi c_\theta & s_\psi c_\theta & -s_\theta \\ c_\psi s_\theta s_\phi - s_\psi c_\phi & s_\psi s_\theta s_\phi + c_\psi c_\phi & c_\theta s_\phi \\ c_\psi s_\theta c_\phi + s_\psi s_\phi & s_\psi s_\theta c_\phi - c_\psi s_\phi & c_\theta c_\phi \end{bmatrix} \quad (2.4.5)$$

を得る．ただし， $\cos\theta=c_\theta$ ， $\sin\theta=s_\theta$ などとする．

このとき，方向余弦行列 \mathbf{C} からオイラー角 ψ ， θ ， ϕ への変換は，

$$\begin{cases} \theta = \text{atan2}\left(-C_{13}, \sqrt{C_{23}^2 + C_{33}^2}\right) & (-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2) \\ \phi = \text{atan2}(C_{23}/\cos\theta, C_{33}/\cos\theta) & (-\pi \leq \phi \leq \pi) \\ \psi = \text{atan2}(C_{12}/\cos\theta, C_{11}/\cos\theta) & (-\pi \leq \psi \leq \pi) \end{cases} \quad (2.4.6)$$

となる．この場合， $\cos\theta=0$ のとき，すなわち $\theta=\pm\pi/2$ のとき計算できない．よって，数値計算において $C_{13} \approx \pm 1$ では，方向余弦行列から 3-2-1 系オイラー角への変換はできない．

オイラー・パラメータ(クォータニオン)

式(2.2.3)の方向余弦行列 \mathbf{C} は, $\cos \theta = 2\cos^2(\theta/2) - 1 = 1 - 2\sin^2(\theta/2)$, $\sin \theta = 2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)$ を用いて,

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}_3(2\cos^2(\theta/2) - 1) - 2\tilde{\lambda} \sin(\theta/2)\cos(\theta/2) + 2\lambda\lambda^T \sin^2(\theta/2) \quad (2.4.7)$$

と書ける. ここで,

$$e_0 = \cos(\theta/2) \quad (2.4.8-a)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \varepsilon_3]^T = \lambda \sin(\theta/2) \quad (2.4.8-b)$$

とおけば, 式(2.4.7)は,

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{U}_3(\varepsilon_0^2 - \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon}) - 2e_0 \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} + 2\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}^T \\ &= \begin{bmatrix} \varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2 - \varepsilon_3^2 + \varepsilon_0^2 & 2(\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \varepsilon_0) & 2(\varepsilon_1 \varepsilon_3 - \varepsilon_2 \varepsilon_0) \\ 2(\varepsilon_2 \varepsilon_1 - \varepsilon_3 \varepsilon_0) & \varepsilon_2^2 - \varepsilon_3^2 - \varepsilon_1^2 + \varepsilon_0^2 & 2(\varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_1 \varepsilon_0) \\ 2(\varepsilon_3 \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \varepsilon_0) & 2(\varepsilon_3 \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_0) & \varepsilon_3^2 - \varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2 + \varepsilon_0^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

と表せる. ここで $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = [e_0 \ \varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \varepsilon_3]^T$ は, オイラー・パラメータ (Euler parameters)(四元数あるいはクォータニオン(quaternion))と呼ばれる. $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ (4×1 行列), $\boldsymbol{\varepsilon}$ (3×1 行列), $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ (3×3 行列)の記号上の区別に注意.

添え字に 0 が含まれる場合(添え字が 0~3)は, 式(2.4.8-a)のように $e_0 = \cos(\theta/2)$, 添え字に 4 が含まれる場合(添え字が 1~4)は, $e_4 = \cos(\theta/2)$ と定義されることが多い. ここでは, 添え字 0~3 を使用する.

式(2.4.8-a,b)より, オイラー・パラメータを構成する 4 つのスカラー数は, 次式を満足することが分かる.

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \varepsilon_0^2 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 = 1 \quad (2.4.10)$$

オイラー・パラメータを用いることによって, オイラー角など 3 変数で表したときに生ずる数学的特異値を回避することができる. さらに, 回転軸と回転角を用いた 4 変数表現と比べても, 三角関数を含まない単純な代数計算となるので効率的である. ただし, 物理的なイメージがつかめない, さらには, 数値計算で式(2.4.10)の拘束式を厳密に満たすように行うことが難しいなどの問題もある.

方向余弦行列からオイラー・パラメータに変換するアルゴリズムはいくつか提案されている. 数学的には同一の値が得られるはずであるが, 数値計算的には優劣があり, 場合によっては発散することもある. 以下に参考として, 比較的効率的かつ数値的に安定と考えられるアルゴリズム[2.4]を示す.

[方向余弦行列からオイラー・パラメータを計算するアルゴリズム]

方向余弦行列 \mathbf{C} の (i,j) 成分を C_{ij} と書く. まず, 一時変数として $C_{00} = \text{tr}(\mathbf{C})$, $T = C_{00}$ とおく. ここで, $\text{tr}(\mathbf{C})$ は, 正方行列 \mathbf{C} のトレース(trace)であり, 対角要素の総和として定義される. このとき,

$$4\varepsilon_i^2 = 1 + 2C_{ii} - T \quad (i = 0, 1, 2, 3) \quad (2.4.11)$$

$$4\varepsilon_1 e_0 = C_{23} - C_{32} \quad (2.4.12-a)$$

$$4\varepsilon_2 e_0 = C_{23} + C_{32} \quad (2.4.12-b)$$

$$4\varepsilon_3 e_0 = C_{31} - C_{13} \quad (2.4.13-a)$$

$$4\varepsilon_1\varepsilon_3 = C_{31} + C_{13} \quad (2.4.13-b)$$

$$4\varepsilon_3\varepsilon_0 = C_{12} - C_{21} \quad (2.4.14-a)$$

$$4\varepsilon_1\varepsilon_2 = C_{12} + C_{21} \quad (2.4.14-b)$$

の 10 個の式が得られる．ここから $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ を解くためにまず，

$$C_{jj} = \max(C_{00}, C_{11}, C_{22}, C_{33}) \quad (2.4.15-a)$$

$$|\varepsilon_j| = \sqrt{1 + 2C_{jj} - T} / 2 \quad (2.4.15-b)$$

を計算する．ただし， j は式(2.4.15-a)において最大の C_{jj} の添字と一致するように決める．式(2.4.11, 12-a)より，式(2.4.15-b)の $|\varepsilon_j|$ は $|\varepsilon_j| = \max(|\varepsilon_0|, |\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|, |\varepsilon_3|)$ を満たすことが保証され，後の計算において零近傍の数で除算すること避けられる．

次に，式(2.4.15-b)から ε_j を求めるため，さしあたり正の符号を選択する．これより，

$j=0$ の場合，式(2.4.15-a, 16-a, 17-a)からそれぞれ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$

$j=1$ の場合，式(2.4.15-a, 16-b, 17-b)からそれぞれ $\varepsilon_0, \varepsilon_3, \varepsilon_2$

$j=2$ の場合，式(2.4.15-b, 16-a, 17-b)からそれぞれ $\varepsilon_3, \varepsilon_0, \varepsilon_1$

$j=3$ の場合，式(2.4.15-b, 16-b, 17-a)からそれぞれ $\varepsilon_2, \varepsilon_1, \varepsilon_0$

が計算できる．

注意を要するのは，方向余弦行列からオイラー・パラメータに変換するときの解が常に 2 組存在することである．これを避けるために通常は $-\pi < \theta \leq \pi$ を想定して $\varepsilon_0 \geq 0$ となる解の組を選択する．したがって，上記の計算によって $\varepsilon_0 < 0$ になった場合は， ε_j ($j=0,1,2,3$) 全ての符号を反転させればよい．このアルゴリズムは，平方根の計算を 1 度だけ行えばよいため計算効率がよく，さらに零近傍の数による除算を行うことがない (singularity-free)．

2.5 角速度と角加速度

速度や加速度を考えるときは，それがどの座標系に対する時間変化率であるかを明確にする必要がある．以下，次章のダイナミクスの議論も考慮して，図 2.1.1 の基準系 $\{\bar{a}\}$ を慣性座標系 (inertial coordinate system) とする．慣性座標系とは，ニュートンの運動の第 1 法則である慣性の法則 (外力が働いていない物体は同一の運動状態を持続する) が成立する座標系である．ここで， d/dt を慣性系 $\{\bar{a}\}$ に対する時間微分を表す記号とすれば，

$$\frac{d\{\bar{a}\}}{dt} = \{\bar{\theta} \quad \bar{\theta} \quad \bar{\theta}\}^T \quad (2.5.1)$$

が成り立つ．

まず， $\{\bar{a}\}$ 系と $\{\bar{b}\}$ 系の原点が一致していると仮定して，剛体の回転運動のみを考える．剛体上にあるベクトル \bar{p} の慣性系に対する時間微分は，式(2.1.2-c)より，

$$\dot{\bar{p}} = \{\bar{b}\}^T \dot{\bar{p}} + \frac{d\{\bar{b}\}}{dt} \bar{p} \quad (2.5.2)$$

を得る．ただし， (\cdot) は d/dt と同じ意味の演算子として用いる．また，点 C に対して点 P が動く (剛体上を点 P が動く) 一般の場合を想定して $\dot{\bar{p}}$ を残しておく．

さらに， $C\{\bar{a}\} = \{\bar{b}\}$ であることから，式(2.5.1)を考慮して，

$$\frac{d\{\bar{b}\}}{dt} = \frac{d}{dt} (\{\bar{a}\}^T C^T) = \{\bar{a}\}^T \dot{C}^T + \frac{d\{\bar{a}\}}{dt} C^T = \{\bar{a}\}^T \dot{C}^T = \{\bar{b}\}^T C \dot{C}^T \quad (2.5.3)$$

と表せる．ここで，方向余弦行列の満たす関係式(1.5.5)を時間微分すると，

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{C}}^T + \dot{\mathbf{C}}\mathbf{C}^T = \mathbf{O}_{33} \quad (2.5.4)$$

を得る. ただし, \mathbf{O}_{nm} は $n \times m$ の零行列である. つまり,

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{C}}^T = -\dot{\mathbf{C}}\mathbf{C}^T = -(\mathbf{C}\dot{\mathbf{C}}^T)^T \quad (2.5.5)$$

が成り立つ. これは $\mathbf{C}\dot{\mathbf{C}}^T$ が反対称行列であることを表している. 一般に, 反対称行列は高々 3 変数で表せるので, これらを $\boldsymbol{\omega} = [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^T$ とおけば,

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{C}}^T = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} = \tilde{\boldsymbol{\omega}} \quad (2.5.6)$$

と表現することができる. この $\boldsymbol{\omega}$ を用いれば, 式(2.5.3)より式(2.5.2)は,

$$\dot{\vec{\rho}} = \{\vec{b}\}^T (\dot{\rho} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \rho) \quad (2.5.7)$$

と書ける. さらに, $\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \{\vec{b}\}^T \boldsymbol{\omega}$ なるベクトルを導入することができて,

$$\dot{\vec{\rho}} = \left(\frac{d\vec{\rho}}{dt} \right)_b + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\rho} \quad (2.5.8)$$

と書ける. ただし, $(d/dt)_b$ は $\{\vec{b}\}$ 系における時間微分を表現した演算子である. 剛体上のどの点の速度も全て共通な $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ を使って式(2.5.8)の形に書けるので, $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ は剛体の**角速度ベクトル** (angular velocity vector)と呼ばれる. このように, 姿勢の時間変化率として1個のベクトルが定義できるのは, 2.3 節で示したように, 無限小回転が 1 個のベクトルで表現できると関係している. 角速度ベクトルの方向は, 図 2.5.1 に示すように無限小回転のオイラー軸方向であり, **瞬間回転軸** (infinitesimal axis of rotation) と呼ばれる. $\boldsymbol{\omega}$ は, ベクトル $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ の $\{\vec{b}\}$ 系成分として定義されていることは注意を要する.

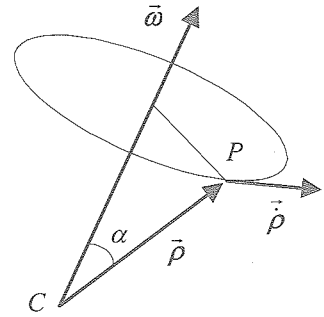


図 2.5.1 角速度ベクトル

また, 角速度ベクトルは, あるベクトルの時間導関数として表現できない, つまり, 角速度ベクトルは積分できないという事実も重要である. これは, 姿勢を表すベクトル量が存在しないことから明らかである. この意味から, **擬座標**

(quasi-coordinate)の時間微分あるいは**非ホロノミック速度** (non-holonomic velocity)と呼ばれる. ただし, 無限小回転, 固定軸まわりの回転であれば積分できる. 例えば 2 次元解析の場合は, 常に固定(z)軸まわりの回転になるので常に積分できる.

角加速度ベクトル (angular acceleration vector)を求めるには, 式(2.5.8)の $\vec{\rho}$ を角速度 $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ に交換して計算をすればよい. このとき, $\tilde{\boldsymbol{\omega}} \times \tilde{\boldsymbol{\omega}} = \vec{0}$ より,

$$\frac{d\tilde{\boldsymbol{\omega}}}{dt} = \left(\frac{d\tilde{\boldsymbol{\omega}}}{dt} \right)_b = \tilde{\boldsymbol{\alpha}} \quad (2.5.11)$$

を得る. つまり, 剛体の角速度ベクトルは慣性系 $\{\vec{a}\}$ に対する時間微分も, 回転系 $\{\vec{b}\}$ に対する時間微分も等しいことが分かる. 以下, 角速度ベクトル $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ に対して, 角加速度ベクトル

を $\vec{\omega}$ と書く．

また，角速度ベクトルの重要な性質として連鎖法則(chain rule)がある．つまり，図 2.5.2 のように， $\{\vec{a}\}$ 系に対する $\{\vec{b}\}$ 系の角速度ベクトルを $\vec{\omega}_{ab}$ ， $\{\vec{b}\}$ 系に対する $\{\vec{c}\}$ 系の角速度ベクトルを $\vec{\omega}_{bc}$ ， $\{\vec{a}\}$ 系に対する $\{\vec{c}\}$ 系の角速度ベクトルを $\vec{\omega}_{ac}$ とすると，

$$\vec{\omega}_{ac} = \vec{\omega}_{ab} + \vec{\omega}_{bc} \quad (2.5.12)$$

が成り立つ．

[式(2.5.12)の証明]

任意のベクトル \vec{x} に対して，

$$\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)_a = \left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)_b + \vec{\omega}_{ab} \times \vec{x} \quad (2.5.13-a)$$

$$\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)_b = \left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)_c + \vec{\omega}_{bc} \times \vec{x} \quad (2.5.13-b)$$

$$\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)_a = \left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)_c + \vec{\omega}_{ac} \times \vec{x} \quad (2.5.13-c)$$

が成り立つ． $(d/dt)_a$ ， $(d/dt)_b$ ， $(d/dt)_c$ は，それぞれ $\{\vec{a}\}$ ， $\{\vec{b}\}$ ， $\{\vec{c}\}$ 系における時間微分を表す．式(2.5.13-a,b)より，

$$\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)_a = \left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)_c + (\vec{\omega}_{ab} + \vec{\omega}_{bc}) \times \vec{x} \quad (2.5.14)$$

となるから，式(2.5.13-c, 14)を比較することにより，式(2.5.12)が成り立つことが分かる．

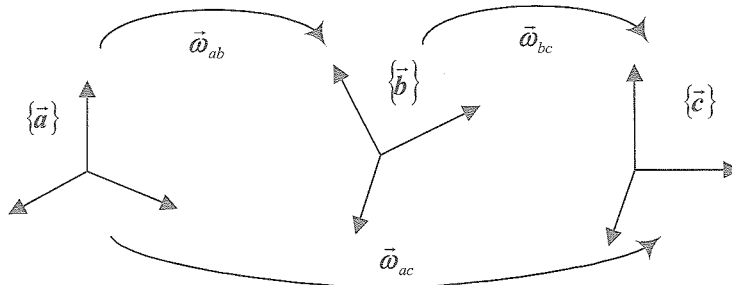


図 2.5.2 角速度ベクトルの連鎖法則

さらに，式(2.5.12)を $\{\vec{a}\}$ 系に関して時間微分すると，

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{\omega}_{ac}}{dt}\right)_a &= \left(\frac{d\vec{\omega}_{ab}}{dt}\right)_a + \left(\frac{d\vec{\omega}_{bc}}{dt}\right)_a \\ &= \left(\frac{d\vec{\omega}_{ab}}{dt}\right)_a + \left(\frac{d\vec{\omega}_{bc}}{dt}\right)_b + \vec{\omega}_{ab} \times \vec{\omega}_{bc} \end{aligned} \quad (2.5.13)$$

となり， $(d\vec{\omega}_{ac}/dt)_a$ ， $(d\vec{\omega}_{ab}/dt)_a$ ， $(d\vec{\omega}_{bc}/dt)_b$ との間には連鎖法則が成り立たなくなる．

【例題 2-2】

図 2.5.3 に示すように，基準座標系 $\{\vec{a}\}$ に対して， \vec{a}_3 軸まわりに θ 回転した座標系 $\{\vec{b}\}$ を考える． $\{\vec{b}\}$ 系の \vec{a}_3 軸まわりの角速度が $\dot{\theta}$ であるとすれば，角速度ベクトルは

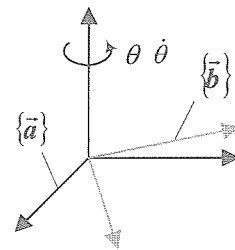


図 2.5.3 固定軸まわりの回

$\vec{\omega} = \{\vec{b}\}^T \omega = \{\vec{b}\}^T [0 \ 0 \ \dot{\theta}]^T$ となる．それを確かめる．

方向余弦行列は，

$$C = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5.14)$$

である．よって，

$$\tilde{\omega} = C \dot{C}^T = \begin{bmatrix} \quad \quad \quad \\ \quad \quad \quad \\ \quad \quad \quad \end{bmatrix} \quad (2.5.15)$$

これより， ω は式(2.5.6)から，

$$\omega = \begin{bmatrix} \quad \quad \quad \end{bmatrix}^T \quad (2.5.16)$$

であり，所望の結果を得ることができる．

2.6 並進速度と加速度

ここで，剛体上の点 P の慣性系原点 O に対する速度 $\vec{v}_p = \dot{\vec{r}}_p$ は，式(2.1.1)を慣性系に対して時間微分することにより求められる．点 O に対する点 C の速度を $\vec{v}_c = \dot{\vec{r}}_c$ とすれば，式(2.5.8)を用いて，

$$\vec{v}_p = \vec{v}_c + \left(\frac{d\vec{\rho}}{dt} \right)_b + \vec{\omega} \times \vec{\rho} \quad (2.6.1)$$

と表せる．ここで， $\vec{v}_p = \{\vec{a}\}^T \mathbf{v}_p$ ， $\vec{v}_c = \{\vec{a}\}^T \mathbf{v}_c$ とおけば， $\{\vec{a}\}$ 系における行列関係式として，

$$\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_c + C^T (\dot{\rho} + \tilde{\omega} \rho) \quad (2.6.2)$$

を得る．

さらに，慣性系に対して時間微分することにより，点 P の点 O に対する加速度 $\vec{a}_p = \ddot{\vec{r}}_p$ は，点 O に対する点 C の加速度を $\vec{a}_c = \ddot{\vec{r}}_c$ とすれば，

$$\vec{a}_p = \vec{a}_c + \left(\frac{d^2 \vec{\rho}}{dt^2} \right)_b + 2 \vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{\rho}}{dt} \right)_b + \vec{\alpha} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) \quad (2.6.3)$$

と書ける．ここで， $\vec{a}_p = \{\vec{a}\}^T \mathbf{a}_p$ ， $\vec{a}_c = \{\vec{a}\}^T \mathbf{a}_c$ ， $\vec{\alpha} = \{\vec{b}\}^T \alpha$ とおけば， $\{\vec{a}\}$ 系における行列関係式として，

$$\mathbf{a}_p = \mathbf{a}_c + C^T (\ddot{\rho} + 2 \tilde{\omega} \dot{\rho} + \tilde{\alpha} \rho + \tilde{\omega} \tilde{\omega} \rho) \quad (2.6.4)$$

を得る．

宇宙機の解析では，その運動を宇宙機に固定された座標系から表現することが多い．そこで，図 2.1.1 において，点 C の点 O に対する並進速度 \vec{v}_c と加速度 \vec{a}_c を， $\{\vec{b}\}$ 系側から考えてみる．いま，

$$\vec{r}_c = \{\vec{b}\}^T \bar{\mathbf{r}}_c \quad (2.6.5-a)$$

$$\vec{v}_c = \{\vec{b}\}^T \bar{\mathbf{v}}_c \quad (2.6.5-b)$$

とすると，

$$\vec{v}_c = \dot{\vec{r}}_c = \{\bar{b}\}^T \dot{\vec{r}}_c + \frac{d\{\bar{b}\}^T}{dt} \vec{r}_c = \{\bar{b}\}^T (\dot{\vec{r}}_c + \tilde{\omega} \vec{r}_c) \quad (2.6.6)$$

を得る。つまり、 $\{\bar{b}\}$ 系における行列表記では、

$$\bar{\vec{v}}_c = \dot{\vec{r}}_c + \tilde{\omega} \vec{r}_c \quad (2.6.7)$$

を得る。式(2.6.6)を、行列を用いずにベクトル表記すると、

$$\vec{v}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \left(\frac{d\vec{r}_c}{dt} \right)_b + \tilde{\omega} \times \vec{r}_c \quad (2.6.8)$$

を得る。これより、回転系(非慣性系)である $\{\bar{b}\}$ 系において並進速度を表現すると、角速度の影響が現れることが分かる。つまり、 $\bar{\vec{v}}_c$ は非ホノミック(積分できない)変数である。

さらに、式(2.6.7)を慣性系に関してさらに時間微分すると、

$$\bar{\vec{a}}_c = \frac{d^2 \vec{r}_c}{dt^2} = \left(\frac{d^2 \vec{r}_c}{dt^2} \right)_b + 2 \tilde{\omega} \times \left(\frac{d\vec{r}_c}{dt} \right)_b + \bar{\vec{a}} \times \vec{r}_c + \tilde{\omega} \times (\tilde{\omega} \times \vec{r}_c) \quad (2.6.9)$$

を得る。

【例題 2-3】並進速度

図 2.6.1 のような慣性系 $\{\bar{a}\}$ と、楕円に固定された機体系 $\{\bar{b}\}$ を考える。点 P は、 $\{\bar{b}\}$ 系上を、時刻 t において $(t, 0)$ に位置する。そのとき、点 P の慣性系 $\{\bar{a}\}$ からみた速度を求めなさい。

まず、方向余弦行列は、

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} & \\ & \\ & \end{bmatrix} \quad (2.6.10)$$

である。 $\bar{\rho} = \{\bar{b}\}^T \rho$ とすると、

$$\rho = [t \ 0 \ 0]^T \quad (2.6.11)$$

であるから、

$$\dot{\rho} = \begin{bmatrix} & \\ & \\ & \end{bmatrix}^T \quad (2.6.12)$$

である。また、角速度ベクトルを $\tilde{\omega} = \{\bar{b}\}^T \omega$ とおくと、 $\mathbf{C}\dot{\mathbf{C}}^T = \tilde{\omega}$ より、

$$\omega = \begin{bmatrix} & \\ & \\ & \end{bmatrix}^T \quad (2.6.13)$$

である。点 P の速度ベクトルを $\bar{\vec{v}}_p = \{\bar{a}\}^T \mathbf{v}_p$ とすれば、 $\{\bar{a}\}$ 、 $\{\bar{b}\}$ 系の原点が常に一致していることも考慮して、式(2.6.2)より、

$$\mathbf{v}_p = \begin{bmatrix} & \\ & \\ & \end{bmatrix}^T \quad (2.6.14)$$

を得る。その絶対値を調べると、 $\sqrt{1+t^2\dot{\theta}^2}$ となる。

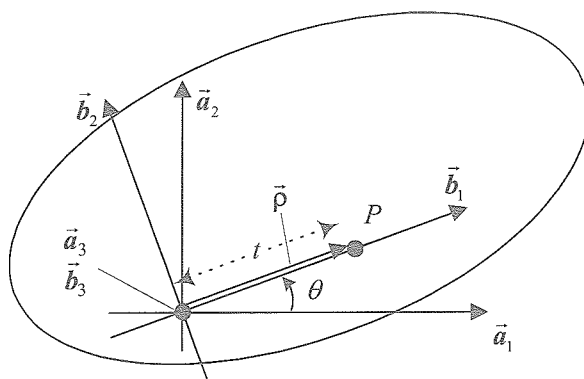


図 2.6.1 剛体上を動く点

2.7 角速度と姿勢パラメータの時間導関数との関係

2.5 節では、角速度が積分できない物理量であることを説明した。しかし、ダイナミクスでは、速度レベルの変数を積分して位置レベルの変数を得る必要がある。そこで、本節では積分が可能なオイラー角、オイラー・パラメータの時間導関数と角速度の関係を調べる。

オイラー角

まず、3-1-3 系オイラー角を考える。慣性系 $\{\bar{a}\}$ から見た回転系 $\{\bar{b}\}$ の角速度 $\bar{\omega} = \{\bar{b}\}^T \omega$ は、角速度の連鎖法則(2.5.12)を適用すれば、

$$\bar{\omega} = \dot{\theta}_1 \bar{a}_3 + \dot{\theta}_2 \bar{u}_1 + \dot{\theta}_3 \bar{v}_3 \quad (2.7.1)$$

と書ける。ここで、 $\delta_1 = [1 \ 0 \ 0]^T$, $\delta_2 = [0 \ 1 \ 0]^T$, $\delta_3 = [0 \ 0 \ 1]^T$ とすると、 $\bar{a}_3 = \bar{u}_3 = \{\bar{u}\}^T \delta_3$, $\bar{u}_1 = \bar{v}_1 = \{\bar{v}\}^T \delta_1$, $\bar{v}_3 = \bar{b}_3 = \{\bar{b}\}^T \delta_3$ なので、

$$\begin{aligned} \{\bar{b}\}^T \omega &= \dot{\theta}_1 \{\bar{u}\}^T \delta_3 + \dot{\theta}_2 \{\bar{v}\}^T \delta_1 + \dot{\theta}_3 \{\bar{b}\}^T \delta_3 = \{\bar{b}\}^T \left(\dot{\theta}_1 C^3(\theta_3) C^1(\theta_2) \delta_3 + \dot{\theta}_2 C^3(\theta_3) \delta_1 + \dot{\theta}_3 \delta_3 \right) \\ &= \{\bar{b}\}^T \begin{bmatrix} C^3(\theta_3) C^1(\theta_2) \delta_3 & C^3(\theta_3) \delta_1 & \delta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.7.2)$$

よって、 $\dot{\theta} = [\dot{\theta}_1 \ \dot{\theta}_2 \ \dot{\theta}_3]^T$ とおけば、

$$\omega = G(\theta) \dot{\theta} = \begin{bmatrix} s_3 s_2 & c_3 & 0 \\ c_3 s_2 & -s_3 & 0 \\ c_2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_3 s_2 \dot{\theta}_1 + c_3 \dot{\theta}_2 \\ c_3 s_2 \dot{\theta}_1 - s_3 \dot{\theta}_2 \\ c_2 \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \quad (2.7.3-a)$$

と表せる。さらに式(2.7.3-a)の逆変換は、以下のように表せる。

$$\dot{\theta} = \Pi(\theta) \omega = \begin{bmatrix} s_3/s_2 & c_3/s_2 & 0 \\ c_3 & -s_3 & 0 \\ -s_3 c_2/s_2 & -c_3 c_2/s_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (s_3 \omega_1 + c_3 \omega_2)/s_2 \\ c_3 \omega_1 - s_3 \omega_2 \\ -(s_3 c_2 \omega_1 + c_3 c_2 \omega_2)/s_2 + \omega_3 \end{bmatrix} \quad (2.7.3-b)$$

ただし、 $\Pi(\theta) = G^{-1}(\theta)$ である。式(2.7.3-b)にもオイラー角の特異点の影響が現れている。

同様にして、3-2-1 系オイラー角の時間導関数と角速度との関係は、以下ようになる。

$$\omega = G(\theta) \dot{\theta} = \begin{bmatrix} -s_\theta & 0 & 1 \\ c_\theta s_\phi & c_\phi & 0 \\ c_\theta c_\phi & -s_\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_\theta \dot{\psi} + \dot{\phi} \\ c_\theta s_\phi \dot{\psi} + c_\phi \dot{\theta} \\ c_\theta c_\phi \dot{\psi} - s_\phi \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (2.7.4-a)$$

$$\dot{\theta} = \Pi(\theta) \omega = \begin{bmatrix} 0 & s_\phi/c_\theta & c_\phi/c_\theta \\ 0 & c_\phi & -s_\phi \\ 1 & s_\phi s_\theta/c_\theta & c_\phi s_\theta/c_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (s_\phi \omega_2 + c_\phi \omega_3)/c_\theta \\ c_\phi \omega_2 - s_\phi \omega_3 \\ \omega_1 + (s_\phi s_\theta \omega_2 + c_\phi s_\theta \omega_3)/c_\theta \end{bmatrix} \quad (2.7.4-b)$$

一般に、物体角の r_1 - r_2 - r_3 系オイラー角($r_1, r_2, r_3=1,2,3; r_1 \neq r_2, r_2 \neq r_3$)を考えると、

$$G(\theta) = [C^{r_3}(\theta_3) C^{r_2}(\theta_2) \delta_{r_1} \quad C^{r_3}(\theta_3) \delta_{r_2} \quad \delta_{r_3}] \quad (2.7.5)$$

と表せる。

オイラー・パラメータ(クォータニオン)

角速度とオイラー・パラメータの時間導関数との関係は、

$$\omega = 2\{(\epsilon_0 U_3 - \tilde{\epsilon}) \dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}_0 \epsilon\} = 2E^T(\hat{\epsilon}) \dot{\hat{\epsilon}} = 2 \begin{bmatrix} -\epsilon_1 \dot{\epsilon}_0 + \epsilon_0 \dot{\epsilon}_1 + \epsilon_3 \dot{\epsilon}_2 - \epsilon_2 \dot{\epsilon}_3 \\ -\epsilon_2 \dot{\epsilon}_0 - \epsilon_3 \dot{\epsilon}_1 + \epsilon_0 \dot{\epsilon}_2 + \epsilon_1 \dot{\epsilon}_3 \\ -\epsilon_3 \dot{\epsilon}_0 + \epsilon_2 \dot{\epsilon}_1 - \epsilon_1 \dot{\epsilon}_2 + \epsilon_0 \dot{\epsilon}_3 \end{bmatrix} \quad (2.7.6)$$

のように与えられる[2.5]。ここで、

$$E^T(\hat{\epsilon}) = [-\epsilon \quad \epsilon_0 U_3 - \tilde{\epsilon}] = \begin{bmatrix} -\epsilon_1 & \epsilon_0 & \epsilon_3 & -\epsilon_2 \\ -\epsilon_2 & -\epsilon_3 & \epsilon_0 & \epsilon_1 \\ -\epsilon_3 & \epsilon_2 & -\epsilon_1 & \epsilon_0 \end{bmatrix} \quad (2.7.7)$$

である。

[式(2.7.6)の証明]^[2.5]

オイラー・パラメータで表した方向余弦行列(2.4.7)は、

$$C = U_3(\epsilon_0^2 - \epsilon^T \epsilon) - 2\epsilon_0 \tilde{\epsilon} + 2\epsilon \epsilon^T = U_3(1 - 2\epsilon^T \epsilon) - 2\epsilon_0 \tilde{\epsilon} + 2\epsilon \epsilon^T = U_3 + 2(\epsilon \epsilon^T - \epsilon^T \epsilon U_3) - 2\epsilon_0 \tilde{\epsilon} \\ = U_3 + 2(\epsilon \epsilon^T - \epsilon^T \epsilon U_3) - 2\epsilon_0 \tilde{\epsilon} \quad (2.7.8)$$

ここで、式(1.3.6)において、 $\vec{a} = \{\tilde{\epsilon}\}^T \mathbf{a}$ 、 $\vec{b} = \{\tilde{\epsilon}\}^T \mathbf{b}$ とおけば、任意の 3×1 列行列 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} に関して、

$$\tilde{\mathbf{a}} \tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{b} \mathbf{a}^T - \mathbf{b}^T \mathbf{a} U_3 \quad (2.7.9)$$

が成り立つから、式(2.7.8)は、

$$C = U_3 + 2(\tilde{\epsilon} \tilde{\epsilon} - \epsilon_0 \tilde{\epsilon}) \quad (2.7.10)$$

と書ける。よって、

$$\dot{C}^T = 2(\tilde{\epsilon} \dot{\tilde{\epsilon}} + \tilde{\epsilon} \dot{\tilde{\epsilon}} + \dot{\epsilon}_0 \tilde{\epsilon} + \epsilon_0 \dot{\tilde{\epsilon}}) \quad (2.7.11)$$

を得る。ここで、式(2.7.8,11)を式(2.5.6)に代入すると、 $\epsilon^T \tilde{\epsilon} = \mathbf{0}_3^T$ なる関係を用いて、

$$\tilde{\omega} = \{U_3 + 2(\epsilon \epsilon^T - \epsilon^T \epsilon U_3) - 2\epsilon_0 \tilde{\epsilon}\} \{2(\tilde{\epsilon} \tilde{\epsilon} + \tilde{\epsilon} \dot{\tilde{\epsilon}} + \dot{\epsilon}_0 \tilde{\epsilon} + \epsilon_0 \dot{\tilde{\epsilon}})\} \\ = 2(1 - 2\epsilon^T \epsilon)(\tilde{\epsilon} \tilde{\epsilon} + \tilde{\epsilon} \dot{\tilde{\epsilon}} + \dot{\epsilon}_0 \tilde{\epsilon} + \epsilon_0 \dot{\tilde{\epsilon}}) + 4\epsilon \epsilon^T (\tilde{\epsilon} \tilde{\epsilon} + \epsilon_0 \tilde{\epsilon}) - 4\epsilon_0 (\tilde{\epsilon} \tilde{\epsilon} \tilde{\epsilon} + \tilde{\epsilon} \dot{\tilde{\epsilon}} \tilde{\epsilon} + \dot{\epsilon}_0 \tilde{\epsilon} \tilde{\epsilon} + \epsilon_0 \tilde{\epsilon} \dot{\tilde{\epsilon}}) \quad (2.7.12)$$

を得る。いま、式(2.4.10)を時間微分して、

$$\epsilon^T \epsilon + \epsilon_0 \dot{\epsilon}_0 = 0 \quad (2.7.13)$$

が成り立つ。式(2.7.9)より得られる $\tilde{\epsilon} \tilde{\epsilon} = \epsilon \epsilon^T - \epsilon^T \epsilon U_3$ を時間微分して、さらに式(2.7.9,13)を適用すると、

$$\tilde{\dot{\mathbf{e}}} \tilde{\mathbf{e}} = \mathbf{e} \dot{\mathbf{e}}^T + \dot{\mathbf{e}}_0 \dot{\mathbf{e}}_0^T \mathbf{U}_3 \quad (2.7.14-a)$$

$$\tilde{\mathbf{e}} \tilde{\dot{\mathbf{e}}} = \dot{\mathbf{e}} \mathbf{e}^T + \dot{\mathbf{e}}_0 \dot{\mathbf{e}}_0^T \mathbf{U}_3 \quad (2.7.14-b)$$

を得る. よって, 式(2.7.12)に式(2.7.14-a,b)と $\mathbf{e}^T \mathbf{e} = 1 - \varepsilon_0^2$ を適用して, $\mathbf{e} \dot{\mathbf{e}}^T$, $\dot{\mathbf{e}} \mathbf{e}^T$, $\dot{\mathbf{e}}$, $\dot{\mathbf{e}}_0$ の項でまとめることにより,

$$\begin{aligned} \tilde{\omega} &= 2(1 - 2\varepsilon^T \mathbf{e})(\tilde{\mathbf{e}} \tilde{\mathbf{e}} + \tilde{\mathbf{e}} \tilde{\dot{\mathbf{e}}} + \dot{\mathbf{e}}_0 \tilde{\mathbf{e}} + \dot{\mathbf{e}}_0 \tilde{\dot{\mathbf{e}}}) + 4\varepsilon \varepsilon^T (\mathbf{e} \dot{\mathbf{e}}^T + \dot{\mathbf{e}}_0 \dot{\mathbf{e}}_0^T \mathbf{U}_3 + \dot{\mathbf{e}}_0 \tilde{\dot{\mathbf{e}}}) \\ &\quad - 4\dot{\mathbf{e}}_0 \{ \tilde{\mathbf{e}} (\mathbf{e} \dot{\mathbf{e}}^T + \dot{\mathbf{e}}_0 \dot{\mathbf{e}}_0^T \mathbf{U}_3) + (\mathbf{e} \varepsilon^T - \varepsilon^T \mathbf{e} \mathbf{U}_3) \tilde{\dot{\mathbf{e}}} + \dot{\mathbf{e}}_0 (\mathbf{e} \varepsilon^T - \varepsilon^T \mathbf{e} \mathbf{U}_3) + \dot{\mathbf{e}}_0 (\dot{\mathbf{e}} \mathbf{e}^T + \dot{\mathbf{e}}_0 \dot{\mathbf{e}}_0^T \mathbf{U}_3) \} \\ &= 2(\mathbf{e} \dot{\mathbf{e}}^T - \dot{\mathbf{e}} \mathbf{e}^T + \dot{\mathbf{e}}_0 \tilde{\dot{\mathbf{e}}}) - 2\dot{\mathbf{e}}_0 \tilde{\mathbf{e}} \end{aligned} \quad (2.7.15)$$

を得る. ここで, 式(1.2.10)より, 任意の 3×1 列行列 \mathbf{a} , \mathbf{b} に関して,

$$(\tilde{\mathbf{a}}\mathbf{b})^{\sim} = \mathbf{b}\mathbf{a}^T - \mathbf{a}\mathbf{b}^T \quad (2.7.16)$$

が成り立つ. ただし, $()^{\sim}$ は, $()$ 内の 3×1 列行列を 3×3 の反対称行列にする演算子である. そこで, 式(2.7.6)を式(2.7.15)に適用して,

$$\tilde{\omega} = 2\{(\dot{\mathbf{e}}_0 \mathbf{U}_3 - \tilde{\mathbf{e}}) \dot{\mathbf{e}}\}^{\sim} - 2\dot{\mathbf{e}}_0 \tilde{\mathbf{e}} \quad (2.7.17)$$

と変形できる. これより \sim をとって, $\omega = 2\{(\dot{\mathbf{e}}_0 \mathbf{U}_3 - \tilde{\mathbf{e}}) \dot{\mathbf{e}} - \dot{\mathbf{e}}_0 \mathbf{e}\}$, つまり, 式(2.7.6)を得る.

また, 式(2.7.6)の逆変換は,

$$\dot{\mathbf{e}} = \frac{1}{2} \mathbf{E}(\hat{\mathbf{e}}) \omega = \frac{1}{2} \Omega(\omega) \hat{\mathbf{e}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\varepsilon_1 \omega_1 - \varepsilon_2 \omega_2 - \varepsilon_3 \omega_3 \\ \varepsilon_0 \omega_1 - \varepsilon_3 \omega_2 + \varepsilon_2 \omega_3 \\ \varepsilon_3 \omega_1 + \varepsilon_0 \omega_2 - \varepsilon_1 \omega_3 \\ -\varepsilon_2 \omega_1 + \varepsilon_1 \omega_2 + \varepsilon_0 \omega_3 \end{bmatrix} \quad (2.7.18)$$

より与えられる. ここで,

$$\Omega(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega^T \\ \omega & -\tilde{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3 \\ \omega_1 & 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ \omega_2 & -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_3 & \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.7.19)$$

である. 数値計算では, 冗長な計算を避けるため式(2.7.6,18)の右辺のように展開した式を用いるが, 定式化段階では \mathbf{E} , Ω 等の行列を用いると便利なことが多い. 特に \mathbf{E} に関しては,

$$\mathbf{E}^T(\hat{\mathbf{e}}) \hat{\mathbf{e}} = \mathbf{o}_3 \quad (2.7.20-a)$$

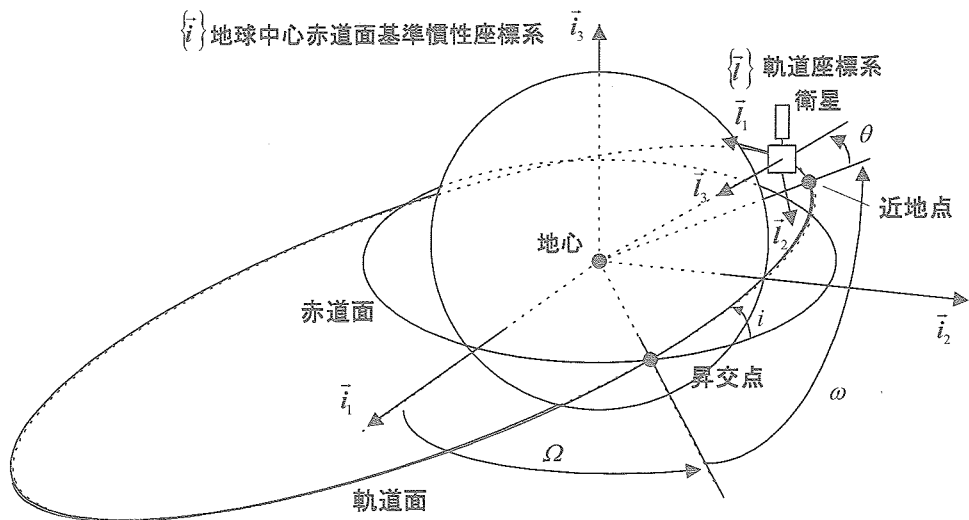
$$\mathbf{E}^T(\hat{\mathbf{e}}) \mathbf{E}(\hat{\mathbf{e}}) = \mathbf{U}_3 \quad (2.7.20-b)$$

$$\mathbf{E}(\hat{\mathbf{e}}) \mathbf{E}^T(\hat{\mathbf{e}}) = \mathbf{U}_4 - \hat{\mathbf{e}} \hat{\mathbf{e}}^T \quad (2.7.20-c)$$

$$\dot{\mathbf{E}}(\hat{\mathbf{e}}) = \frac{1}{2} \Omega(\omega) \mathbf{E}(\hat{\mathbf{e}}) + \mathbf{E}(\hat{\mathbf{e}}) \tilde{\omega} \quad (2.7.20-d)$$

など多くの関係式が成り立つ[2.6].

【例題 2-4】



通常のダイナミクス解析では、特異点为了避免のためにオイラー角ではなくオイラー・パラメータ(クォータニオン)を用いる。そこで、上図に示すような地球中心赤道面基準慣性座標系 $\{\bar{i}\}$ と軌道座標系 $\{\bar{j}\}$ (図 1.1.2(c, e)参照)の方向余弦行列を求め、さらに、その方向余弦行列からオイラー・パラメータに変換する計算を MATLAB で行う。また、方向余弦行列からオイラー角を求めるプログラムも作成する。

軌道の離心率は 0 とする(円軌道)。この仮定のもとで、2 つの座標系 $\{\bar{i}\}$, $\{\bar{j}\}$ 間の姿勢は、昇交点赤経 Ω 、軌道傾斜角 i 、近地点引数 ω 、真近点離角 θ を用いて次のように表される。

1. 慣性座標系 $\{\bar{i}\}$ を 3 軸まわりに Ω 回転させる。
2. さらに、回転後の座標系の 1 軸まわりに i だけ回転させる。
3. さらに、回転後の座標系の 3 軸まわりに軌道角 $\eta = \omega + \theta$ だけ回転して、1 軸を衛星の現在位置の半径方向に一致させる。
4. さらに、3 軸まわりに $\pi/2$ 、1 軸まわりに $-\pi/2$ 回転させて、軌道座標系 $\{\bar{j}\}$ に一致させる。

その結果、方向余弦行列は、

$$\{\bar{j}\} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{C}^3(\eta) \mathbf{C}^1(i) \mathbf{C}^3(\Omega) \{\bar{i}\}$$

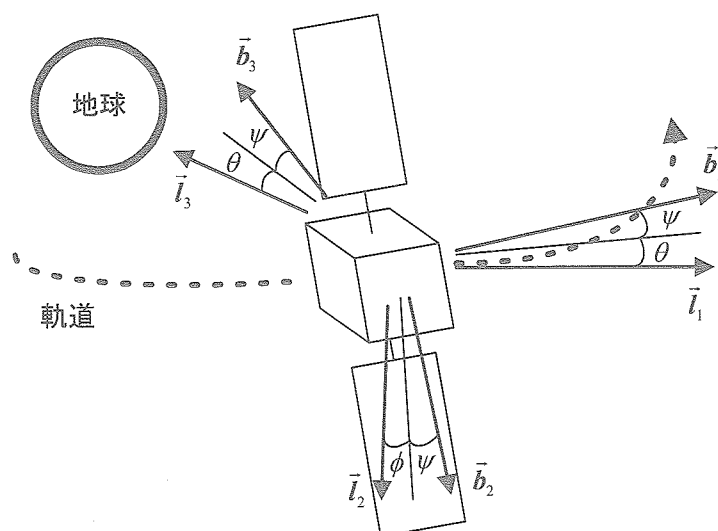
で与えられる。

問題 1 $i=45[\text{deg}]$, $\Omega=120[\text{deg}]$, $\omega=25[\text{deg}]$, $\theta=5[\text{deg}]$ として、上記の方向余弦行列を計算しなさい。

問題 2 問題 1 で求めた方向余弦行列に対応するオイラー・パラメータを求めなさい。

問題 3 問題 1 で求めた方向余弦行列に対応する 3-2-1 系のオイラー角を求めなさい。

【例題 2-5】



一般に、3 軸衛星の姿勢は、軌道座標系 $\{\bar{i}\}$ と衛星座標系 $\{\bar{b}\}$ の姿勢のずれをヨー、ピッチ、ロール角(3-2-1 系オイラー角) $\theta = [\psi \ \theta \ \phi]^T$ で表現する。しかし、マヌーバなど大きな姿勢変動まで考慮する場合、特異点のあるオイラー角ではなくオイラー・パラメータ $\hat{\mathbf{e}}$ を状態変数として用いる(ダイナミクス・プログラムを作るときは、はじめからオイラー・パラメータを状態変数として用いるほうが汎用的)。

姿勢を表す状態変数にオイラー・パラメータを用いるときでも、初期姿勢と初期姿勢レートの入力は、物理的に理解しやすいオイラー角を用いる。ここでは、初期姿勢と姿勢レートをヨー、ピッチ、ロール角(3-2-1 系オイラー角) $\theta_0 = [\psi_0 \ \theta_0 \ \phi_0]^T$ とその時間導関数 $\dot{\theta}_0 = [\dot{\psi}_0 \ \dot{\theta}_0 \ \dot{\phi}_0]^T$ で与える。そこで、以下の設問に従って、3-2-1 系オイラー角とその時間導関数から、オイラー・パラメータ $\hat{\mathbf{e}}$ とその時間導関数 $\dot{\hat{\mathbf{e}}}$ へ変換するプログラムを作成する。

1. (2.4.5)式を用いて、方向余弦行列を求める。
2. 課題 1 で作成したアルゴリズムを適用して、オイラー・パラメータを求める。
3. (2.7.4)式を適用して、軌道座標系に対する衛星座標系の角速度 ω を導出する。
4. (2.7.18)式を適用して、 $\dot{\hat{\mathbf{e}}}$ を導出する。

以上のアルゴリズムを MATLAB で実装して、初期値を $\theta_0 = [30 \ 20 \ 10]^T$ [deg] と $\dot{\theta}_0 = [15 \ 10 \ 5]^T$ [deg/sec] として実行してみる。

第 2 章例題解答

【例題 2-1】3 次元剛体の自由度

3 次元剛体の位置・姿勢は、剛体上の 1 直線上にない 3 点の位置(9 変数)を指定すれば完全に決まる。それら点の間の距離は一定であることから 3 個の拘束式が得られるので、結局 (9-3=)6 個の変数が独立であることが分かる。(空欄は全て数字)

【例題 2-2】

図 2.5.3 に示すように，基準座標系 $\{\vec{a}\}$ に対して， \vec{a}_3 軸まわりに θ 回転した座標系 $\{\vec{b}\}$ を考える． $\{\vec{b}\}$ 系の \vec{a}_3 軸まわりの角速度が $\dot{\theta}$ であるとするれば，角速度ベクトルは $\vec{\omega} = \{\vec{b}\}^T \omega = \{\vec{b}\}^T [0 \ 0 \ \dot{\theta}]^T$ となる．それを確かめる．

方向余弦行列は，

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5.14)$$

である．よって，

$$\tilde{\omega} = \mathbf{C}\dot{\mathbf{C}}^T = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin \theta & -\cos \theta & 0 \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dot{\theta} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta} & 0 \\ \dot{\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.5.15)$$

これより， ω は式(2.5.6)から，

$$\omega = [0 \ 0 \ \dot{\theta}]^T \quad (2.5.16)$$

であり，所望の結果を得ることができる．

【例題 2-3】並進速度

図 2.6.1 のような慣性系 $\{\vec{a}\}$ と，楕円に固定された機体系 $\{\vec{b}\}$ を考える．点 P は， $\{\vec{b}\}$ 系上を，時刻 t において $(t, 0)$ に位置する．そのとき，点 P の慣性系 $\{\vec{a}\}$ からみた速度を求めなさい．

まず，方向余弦行列は，

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.6.10)$$

である． $\vec{\rho} = \{\vec{b}\}^T \rho$ とすると，

$$\rho = [t \ 0 \ 0]^T \quad (2.6.11)$$

であるから，

$$\dot{\rho} = [1 \ 0 \ 0]^T \quad (2.6.12)$$

である．また，角速度ベクトルを $\vec{\omega} = \{\vec{b}\}^T \omega$ とおくと， $\mathbf{C}\dot{\mathbf{C}}^T = \tilde{\omega}$ より，

$$\omega = [0 \ 0 \ \dot{\theta}]^T \quad (2.6.13)$$

である．点 P の速度ベクトルを $\vec{v}_p = \{\vec{a}\}^T v_p$ とすれば， $\{\vec{a}\}$ ， $\{\vec{b}\}$ 系の原点が常に一致していることも考慮して，式(2.6.2)より，

$$v_p = [\cos \theta - t\dot{\theta}\sin \theta \quad \sin \theta + t\dot{\theta}\cos \theta \quad 0]^T \quad (2.6.14)$$

を得る．その絶対値を調べると， $\sqrt{1+t^2\dot{\theta}^2}$ となる．

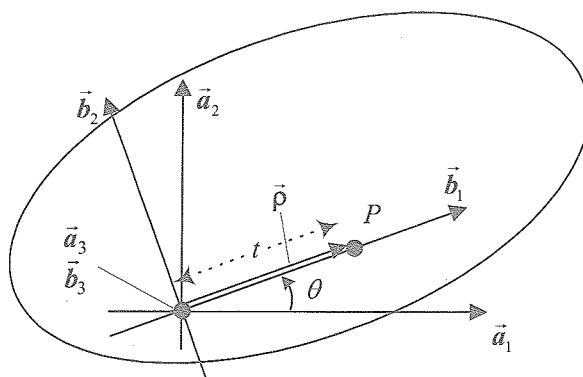


図 2.6.1 剛体上を動く点

【例題 2-4】

問題 1

式(2.2.5)から,

$$C^1(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad C^2(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

である. よって, 求める方向余弦行列は,

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \eta & \sin \eta & 0 \\ -\sin \eta & \cos \eta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & \sin i \\ 0 & -\sin i & \cos i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \Omega & \sin \Omega & 0 \\ -\sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -0.2803 & -0.7392 & 0.6124 \\ -0.6124 & -0.3536 & -0.7071 \\ 0.7392 & -0.5732 & -0.3536 \end{bmatrix}$$

問題 2

方向余弦行列からクォータニオン求めるにはテキスト p.17 ページのアルゴリズムを利用する. そのため, "dcm2quate" という関数を作成した. dcm2quate.m を参照のこと.

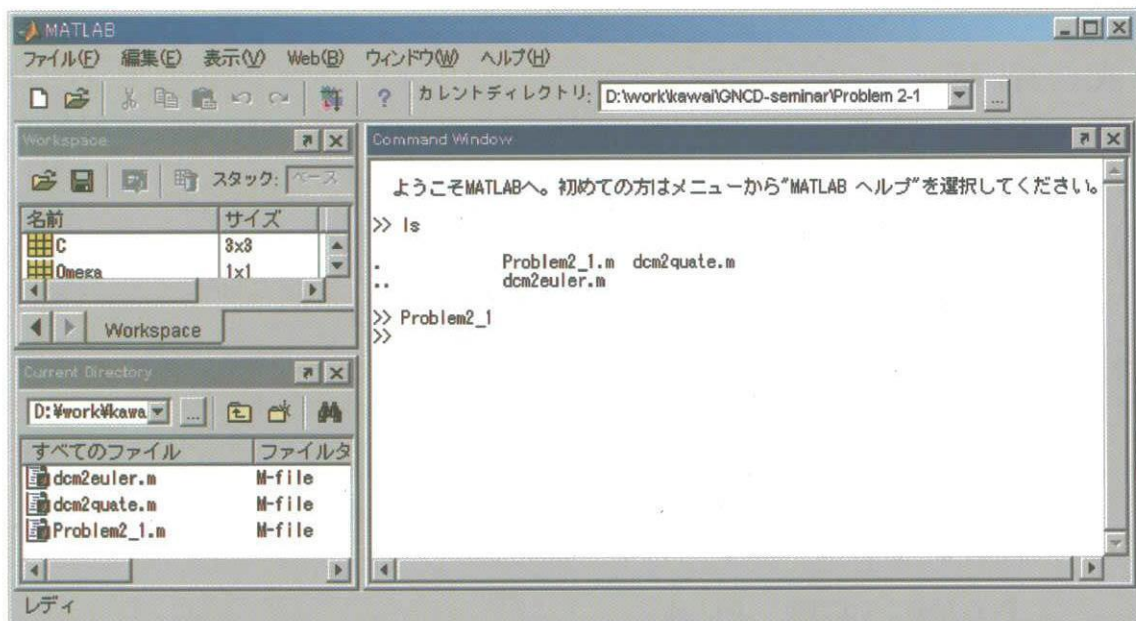
$$\hat{\epsilon} = \begin{bmatrix} -0.0560 \\ 0.5972 \\ -0.5658 \\ 0.5658 \end{bmatrix}$$

問題 3

方向余弦行列から 3-2-1 系オイラー角を求めるには式(2.4.6)のアルゴリズムを用いる。そのため、"dcm2euler"という関数を作成した。dcm2euler.m を参照のこと。

$$\begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.0344 \\ -0.6591 \\ -1.9333 \end{bmatrix} [\text{rad}] = \begin{bmatrix} -116.5651 \\ -37.7612 \\ -110.7685 \end{bmatrix} [\text{deg}]$$

プログラムを実行するためには、Program2-1.m, dcm2quate.m、dcm2euler.m を同じフォルダに入れて、"Problem2_1"と入力する。

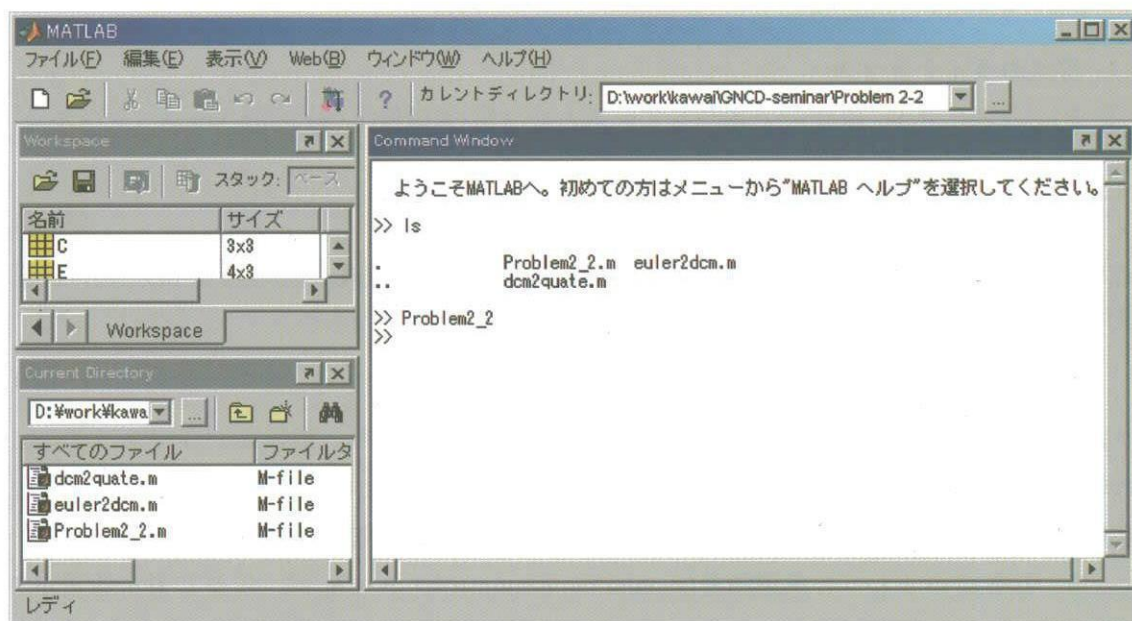


【例題 2-5】

3-2-1 系オイラー角から方向余弦行列を求めるのに式(2.4.5)を利用する。そのため、"euler2dcm"という関数を作成した。euler2dcm.m を参照のこと。

$$\hat{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0.9515 \\ 0.2393 \\ 0.1893 \\ 0.0381 \end{bmatrix} \quad \dot{\hat{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} -0.0281 \\ 0.0056 \\ 0.1153 \\ 0.0929 \end{bmatrix}$$

プログラムを実行するためには、Problem2_2.m、euler2dcm.m、dcm2quate.m を同じフォルダに入れて、"Problem2_2"と入力する。



第3章 動力学の基礎

本章では、単一の剛体の運動方程式を説明する。次に、一般的な力学系の安定性について説明した後、スピンの運動について述べる。

3.1 質点のダイナミクス

質量 m の質点 P が、速度 $\dot{\vec{r}}_p$ で運動しているとき、(線)運動量(linear momentum)ベクトル $\vec{\pi}_p$ は、

$$\vec{\pi}_p = m \dot{\vec{r}}_p \quad (3.1.1)$$

で定義される。このとき、Newton の運動の第2法則(運動方程式: equation of motion)は、質点に働く力ベクトルを \vec{f}_p とし、

$$\dot{\vec{\pi}}_p = \vec{f}_p \quad (3.1.2)$$

で表される。Newton の運動の第1法則である慣性の法則により、慣性系の存在が示されており、式(3.1.2)の時間微分は慣性系に対して行われる。これより、もし力が働かなければ、運動量ベクトルは慣性系に対して変化しないこと(運動量保存則)が分かる。

一方、ある点 O まわりの角運動量(angular momentum)ベクトル \vec{h}_p は、点 O に対する質点 P の位置ベクトルを \vec{r}_p とすると、

$$\vec{h}_p = \vec{r}_p \times \vec{\pi}_p \quad (3.1.3)$$

で定義される。また、点 O まわりの力のモーメントあるいはトルク(moment of force あるいは torque)ベクトル $\vec{\tau}_p$ を、

$$\vec{\tau}_p = \vec{r}_p \times \vec{f}_p \quad (3.1.4)$$

と定義する。角運動量、トルクとも、ある点まわりに定義されることに注意したい。

ここで、 $\dot{\vec{r}}_p \times \vec{\pi}_p = \vec{0}$ なる関係を用いて、

$$\dot{\vec{h}}_p = \frac{d(\vec{r}_p \times \vec{\pi}_p)}{dt} = \vec{r}_p \times \dot{\vec{\pi}}_p \quad (3.1.5)$$

が成り立つ。式(3.1.2)の両辺に左から \vec{r}_p を外積し、式(3.1.5)を適用すると、

$$\dot{\vec{h}}_p = \vec{\tau}_p \quad (3.1.6)$$

を得る。これより、もしトルクが働かなければ、角運動量ベクトルは慣性系に対して変化しないこと(角運動量保存則)が分かる。

3.2 剛体のダイナミクス

剛体の運動方程式を考える前に、複数の質点で構成される系(質点系)を考える必要がある。質点系全体の運動方程式は、各質点の運動方程式の重ね合わせ(和)で表現できる。このとき、質点に働く力は、系の外部からの影響によって働く外力(external force)と系の内部の各質点間で及ぼし合う内力(internal force)に分けて考える必要がある。内力は、運動方程式を重ね

合わせる過程において**作用反作用の法則**(law of action and reaction)により消去され、全体の運動方程式には現れない。つまり、系全体の運動を考える際は、外力のみ考慮すればよい。

一方、剛体の運動方程式は、微小要素の運動方程式の重ね合わせ(和)を考え、さらにその極限(積分)をとることにより求められる。ここでは、図 3.2.1 の質量 m の剛体 B を考える。剛体 B の運動量 $\vec{\pi}$ は、質量密度が一定であると仮定すると、

$$\vec{\pi} = \int_B \dot{\vec{r}}_p dm = \int_B (\dot{\vec{r}}_c + \vec{\omega} \times \vec{\rho}) dm = \int_B \dot{\vec{r}}_c dm = m \dot{\vec{r}}_c \quad (3.2.1)$$

と表される。ただし、 \int_B は、剛体 B 全体についての積分を表す。 $\dot{\vec{r}}_c$ は B の質量中心 C の絶対速度(“絶対”とは慣性系に対する値であることを意味する)、 $\dot{\vec{r}}_p$ は B 上の任意点 P の絶対速度、 $\vec{\omega}$ は B の絶対角速度であり、

$$m = \int_B dm \quad (3.2.2-a)$$

$$\int_B \vec{\rho} dm = \vec{0} \quad (3.2.2-b)$$

である。

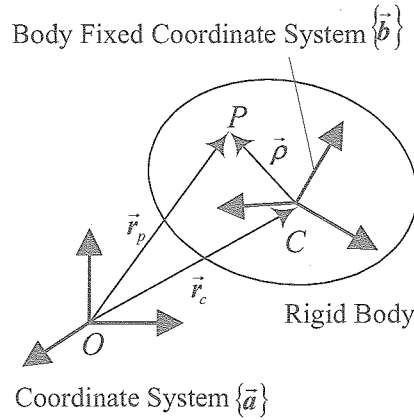


図 3.2.1 単一剛体のダイナミクス

また、 C まわりの角運動量ベクトル \vec{h} は、

$$\vec{h} = \int_B \vec{\rho} \times \dot{\vec{\rho}} dm = \int_B \vec{\rho} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) dm \quad (3.2.3)$$

より計算できる。式(3.2.3)より、 \vec{h} は $\vec{\omega}$ の一次関数であることが分かる。よって、式(3.2.3)を式(1.2.19)や式(1.3.3-a)を用いることにより、

$$\begin{aligned} \vec{h} &= \int_B \left\{ \rho^2 \vec{\omega} - \vec{\rho}(\vec{\rho} \cdot \vec{\omega}) \right\} dm = \int_B \left\{ \rho^2 \vec{U} \cdot \vec{\omega} - (\vec{\rho}\vec{\rho}) \cdot \vec{\omega} \right\} dm = \int_B (\rho^2 \vec{U} - \vec{\rho}\vec{\rho}) dm \cdot \vec{\omega} \\ &= \vec{I} \cdot \vec{\omega} \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

のように $\vec{\omega}$ を分離するように変形する。ただし、 $\rho = |\vec{\rho}|$ であり、 \vec{I} は、

$$\vec{I} = \int_B (\rho^2 \vec{U} - \vec{\rho}\vec{\rho}) dm \quad (3.2.5)$$

で定義される剛体 B の(C まわりの)慣性ダイアディック(inertia dyadic)と呼ばれる。式(3.2.5)より、慣性ダイアディックは対称ダイアディックであることも分かる。これは、ある一点

が決まれば、その点まわりで座標系に依存しない物体固有の量である。また、 \vec{I} は、角速度ベクトル $\vec{\omega}$ に作用して別の物理量である角運動量ベクトル \vec{h} に変換する役割をしていると解釈することもできる。

参照点が質量中心に一致しているときの運動方程式は、次式で与えられる。

$$\begin{cases} \dot{\vec{h}} = \vec{\tau} \\ \dot{\vec{\pi}} = \vec{f} \end{cases} \quad (3.2.6)$$

ただし、点 C には外トルクと外力が働いているものとし、それぞれ $\vec{\tau}$, \vec{f} とする。角運動量ベクトルの慣性系に対する時間微分は、

$$\dot{\vec{h}} = \left(\frac{d\vec{h}}{dt} \right)_b + \vec{\omega} \times \vec{h} \quad (3.2.7)$$

とも書けるので、回転に関する運動方程式は、

$$\left(\frac{d\vec{h}}{dt} \right)_b + \vec{\omega} \times \vec{h} = \vec{\tau} \quad (3.2.8)$$

とも書ける。これより運動方程式(3.2.6)は、式(3.2.1,4), 式(2.5.11), $(d\vec{I}/dt)_b = \vec{0}$ を用いて、

$$\begin{cases} \vec{I} \cdot \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times (\vec{I} \cdot \vec{\omega}) = \vec{\tau} \\ m\ddot{\vec{r}}_c = \vec{f} \end{cases} \quad (3.2.9)$$

を得る。運動方程式を質量中心まわりで定式化したために、回転と並進の運動がカップルしていないことが分かる。

一般に、回転に関する運動方程式(式(3.2.9)の第1式)は解析解を持たない(ただし、外力が働かない場合は、オイラーにより厳密に解かれている[3.1])。そこで、実際に単一剛体の回転に関するダイナミクスを数値計算する方法について説明する。そのためにはまず、ベクトル・ダイアディック記法により書かれている運動方程式を行列形式に直す必要がある。例えば、全ての物理量を物体固定座標系 $\{\vec{b}\}$ で観測して、

$$\vec{\omega} = \{\vec{b}\}^T \omega \quad (3.2.10-a)$$

$$\vec{I} = \{\vec{b}\}^T \mathbf{I} \{\vec{b}\} \quad (3.2.10-b)$$

$$\vec{\tau} = \{\vec{b}\}^T \tau \quad (3.2.10-c)$$

とする。ただし、 3×3 の行列 \mathbf{I} は対称行列であり、その対角行列成分を**慣性モーメント**(moment of inertia)、非対角成分を**慣性乗積**(product of inertia)と呼ぶ。また、慣性行列 \mathbf{I} の成分が対角成分のみになるような物体固定座標系が必ず存在し、その軸を**慣性主軸**(principal axis of inertia)、 \mathbf{I} の対角成分を**主慣性モーメント**(principal moment of inertia)と呼ぶ。

このとき、運動方程式(3.2.9)の第1式は、

$$\mathbf{I} \dot{\omega} + \tilde{\omega} \mathbf{I} \omega = \tau \quad (3.2.11)$$

と行列形式で書ける。

【例題 3-1】慣性ダイアディックの成分行列

座標系の取り方で、慣性行列の成分が変わることを確かめる。質量分布が一様な直方体の各面に垂直に軸を取ったとき、それらの軸は慣性主軸である。この座標系を $\{\vec{a}\}$ とし、慣性ダイアディック \vec{I} が、

$$\vec{I} = \{\vec{a}\}^T \mathbf{I}_a \{\vec{a}\} \quad (3.2.12)$$

ただし、

$$\mathbf{I}_a = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 200 & 0 \\ 0 & 0 & 300 \end{bmatrix} [\text{kg m}^2] \quad (3.2.13)$$

で与えられるものとする。

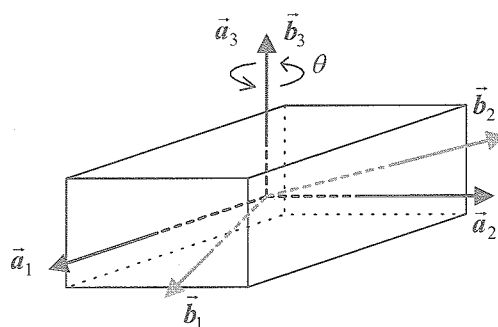


図 3.2.2 直方体と座標系

いま、図 3.2.2 のように $\{\vec{a}\}$ 系を第 3 軸まわりに $\theta=30[\text{deg}]$ 回転した $\{\vec{b}\}$ 系を考える。この 2 つの座標系の関係は、式(2.2.5)より、

$$\{\vec{b}\} = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix} \{\vec{a}\} = \mathbf{C} \{\vec{a}\} \quad (3.2.14)$$

よって、慣性ダイアディックを $\{\vec{b}\}$ 系で書き直すと、

$$\vec{I} = \{\vec{b}\}^T \boxed{\phantom{\mathbf{I}}} \mathbf{I} \boxed{\phantom{\mathbf{I}}} \{\vec{b}\} = \{\vec{b}\}^T \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix} \{\vec{b}\} \quad (3.2.15)$$

となり、直方体の $\{\vec{b}\}$ 系でみた慣性行列を求めることができる。

【例題 3-2】

姿勢が各軸に独立に制御できないことを確認する。いま、原点が質量中心に一致する宇宙

機固定座標系からみた慣性行列を $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}$ ，角速度を $\omega = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$ ，外トルクを

$\tau = [\tau_x \ \tau_y \ \tau_z]^T$ とする。このとき、式(3.2.11)を計算すると、

$$\begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} \quad (3.2.16)$$

となる．さらに展開すると，

$$\begin{cases} \\ \\ \end{cases} \begin{aligned} &= \tau_x \\ &= \tau_y \\ &= \tau_z \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

以上の結果から，宇宙機の姿勢を各軸独立に制御できないことがわかる（カップリング項がある）．

角速度 ω は，積分しても意味のある物理量にならない(2.5 節)ため，式(3.2.11)より $\dot{\omega}$ を解いて単純に位置レベルの変数になるまで積分することはできない．そこで，2.7 節で説明したように，角速度と姿勢パラメータの時間導関数との関係式(キネマティクス微分方程式)を用いる．例えば，姿勢パラメータとしてオイラー・パラメータを用いた場合，式(2.7.18)を利用する．ここで，状態量を $\mathbf{x} = [\omega^T \quad \hat{\mathbf{e}}^T]^T \in \mathbf{R}^7$ と設定すると，運動方程式(3.2.11)とキネマティクス微分方程式(2.7.18)を連立することにより，

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) \quad (3.2.18)$$

のような1階の常微分方程式(ordinary differential equation: ODE)が得られる．これは，状態方程式(state equation)と呼ばれる．ただし，

$$f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}^{-1}(-\tilde{\omega}\mathbf{I}\omega + \boldsymbol{\tau}) \\ \frac{1}{2}\Omega(\omega)\hat{\mathbf{e}} \end{bmatrix} \quad (3.2.19)$$

であり，状態量に関して非線形である．これより，式(3.2.18)をODEの汎用ルーチン[3.2]に適用すれば，単一剛体の姿勢のダイナミクスを数值的に解くことができる．

【例題 3-3】

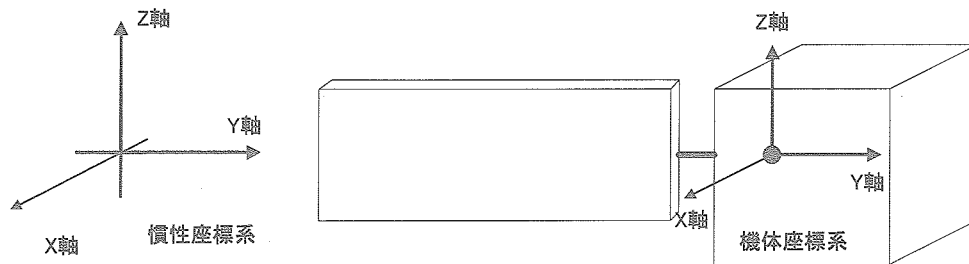
ADEOS-II を単一剛体と仮定したモデルに対して，その運動方程式を数値的に解く．

いま，下図のように ADEOS-II の機体座標系(原点は質量中心に一致)と慣性座標系の 2 つを設定する．慣性系に対する衛星の初期角速度を $\omega_0 = [\omega_{x0} \ \omega_{y0} \ \omega_{z0}]^T = [5 \ 10 \ 15]^T [\text{deg/s}]$ ，初期姿勢を $\theta_0 = [\phi \ \theta \ \psi]^T = [20 \ 25 \ 30]^T [\text{deg}]$ ，慣性行列を，

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 46462 & -975 & 334 \\ -975 & 13330 & 752 \\ 334 & 752 & 51268 \end{bmatrix} [\text{kg m}^2]$$

とする (BOL にて，PDL 回転角 0[deg])．

1. 入力値から，クォータニオン $\hat{\mathbf{e}}_0$ を求める．
2. (3.2.18)式から，微分方程式を求める．
3. ode45() を使って，100[s]後の角速度と，クォータニオンを求める．
4. クォータニオンから，3-2-1 オイラー角を求める．



●ode45()について

MATLAB では常微分方程式を解く関数のひとつとして，ode45()が用意されている．使い方は，

```
[t, y]=ode45('diff_eqs', t_span, y0);
```

である．例えば，

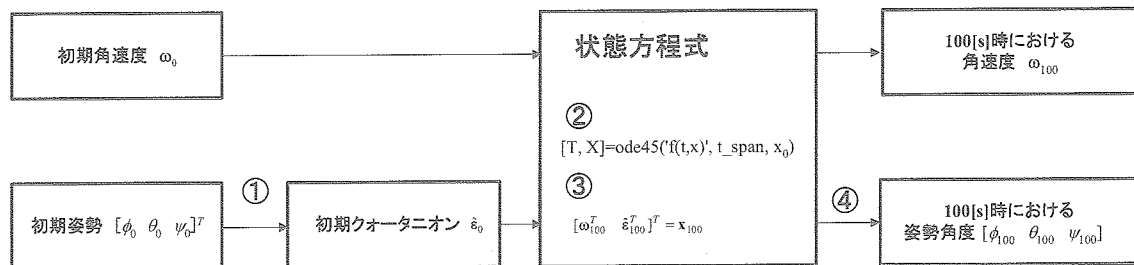
$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}_0 = [1 \ 1 \ 1]^T$$

という微分方程式で表現できるシステムの 100[s]後の状態を調べるためには，以下の 2 つのファイルを用意する．

```
%main.m
x0 = [1 1 1]';
t_span = [0 100];
[t, x]=ode45('diff_eqs', t_span, x0);
```

```
%diff_eqs.m
function dx = diff_eqs(t, x)
dx = [0 1 0; 0 0 1; -2 -3 -4]*x
```

以下に、計算過程をまとめる。



3.3 力学系の安定性

スピン衛星の運動を考える前に、一般の力学系の安定性について議論する必要がある。前節では、剛体の姿勢に関する運動方程式を、1 階の常微分方程式である状態方程式で表現したが、ここでは一般に、 n 次元の座標 $\mathbf{x}=[x_1 \ \dots \ x_n]^T \in \mathbf{R}^n$ を用いて、

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (3.3.1)$$

で表される微分方程式系を考える。特に、式(3.3.1)の右辺に時間が陽に含まれないとき、つまり、

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (3.3.2)$$

のとき、系を**自励系**あるいは**自律系**(autonomous system)と呼ぶ。非自律系の場合は、 $t=x_{n+1}$ として式(3.3.1)に $\dot{x}_{n+1}=1$ を付け加えれば自律系の扱いができるので、ここでは**自律系のみ扱う**。また、微分方程式(3.3.2)の解の存在と一意性は保証されていると仮定する。

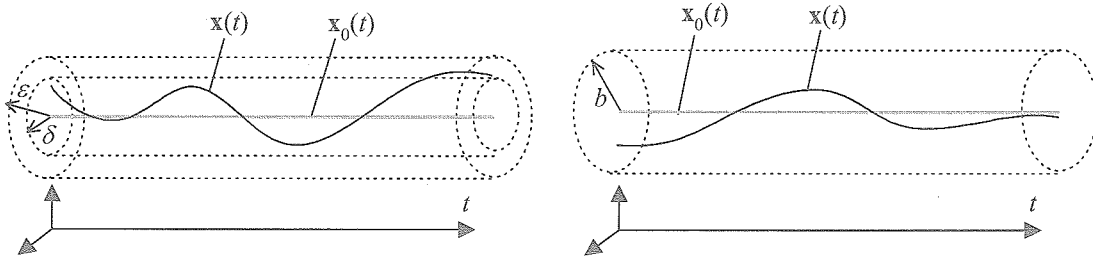
いま、点 $\mathbf{x}=\mathbf{x}_0$ で、

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}_n \quad (3.3.3)$$

が成り立つとき、この点 \mathbf{x}_0 を、解が変化しないことから**不動点**(fixed point)または**平衡点**(equilibrium point)などと呼ぶ。大まかにいえば、 $\mathbf{x}_0(t)$ が**安定**(stable)(または**リアプノフ安定**(Lyapunov stable))とは、与えられた時刻で $\mathbf{x}_0(t)$ の近くから出発した解 $\mathbf{x}(t)$ がその後ずっと $\mathbf{x}_0(t)$ の近くに留まることであり、**漸近安定**(asymptotically stable)とは、近くの解が $t \rightarrow \infty$ で $\mathbf{x}_0(t)$ に収束することをいう。なお、 \mathbf{x}_0 には \mathbf{x}_0 外から有限時間で \mathbf{x}_0 に収束することはできない。

厳密には、 $\mathbf{x}_0(t)$ が安定とは、与えられた $\varepsilon > 0$ に対して $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ が存在して、式(3.3.2)の他の解 $\mathbf{x}(t)$ に対し

て、 $\|x_0(t_0) - x(t_0)\| < \delta$ を満たすならば、 $t > t_0$ に対して $\|x_0(t) - x(t)\| < \varepsilon$ であるときであり、 $x_0(t)$ が漸近安定とは、それが安定であり、また定数 $b > 0$ があって、もし $\|x_0(t) - x(t)\| < b$ ならば $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_0(t) - x(t)\| = 0$ であるときである。



(a) リアプノフ安定

(b) 漸近安定

図 3.3.1 リアプノフ安定と漸近安定

一般に、微分方程式(3.3.2)は非線形であり、解析的に解けることは稀である。そこで、解析解が得られない場合は、平衡解(または周期解)に注目し、その安定性を調べることににより解の性質を議論する。まず、平衡解近傍の解の様子を調べるために、方程式(3.3.2)を線形化する。いま、平衡解が原点である(原点でなければ、適当に座標を平行移動すればよい)と仮定すれば、その近傍で式(3.3.2)の右辺は、

$$f(x) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0} x + O(x^2) \quad (3.3.4)$$

のように展開できる。これより 2 次の微小量を無視すると、

$$\dot{x} = Ax \quad (3.3.5)$$

のような平衡解まわりの線形化方程式が得られる。ただし、 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ である。式(3.3.4)の解は必ず解けて、形式的に、

$$x = e^{At} x(0) \quad (3.3.6)$$

と表される[3.3]。 e^{At} は、状態遷移行列(state transition matrix)と呼ばれる。式(3.3.5)をラプラス変換し、逆ラプラス変換で時間領域に戻した解を式(3.3.6)と比べれば、

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1} \{ (sI - A)^{-1} \} \quad (3.3.7)$$

が成り立つことが分かる。

式(3.3.5)の線形方程式の安定性は、以下のように行列の固有値だけから判定できる[3.4]。

【定理 3.3.1-a】 行列 A の固有値の実部がすべて零以下であり、かつ実部が 0 となる固有値は最小多項式の 1 位の零点であるとき、系(3.3.5)の平衡点は安定である。

【定理 3.3.1-b】 行列 A の固有値の実部がすべて負であるとき、系(3.3.5)の平衡点は漸近安定である。

ここで、 A の最小多項式(minimal polynomial) $\chi(\lambda)$ とは、行列 $(\lambda I - A)^{-1}$ の各要素の分母の最小公倍多項式のことである。 A の固有値を $\lambda_i (i=1, \dots, k)$ 、その重複度を n_i とおくと、 $\chi(\lambda)$ は、

$$\chi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{p_1} (\lambda - \lambda_2)^{p_2} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{p_k} \quad (3.3.8)$$

と書ける. ただし, p_i は $1 \leq p_i \leq n_i (i=1, \dots, k)$ を満たす整数であり, λ_i は p_i 位の零点である. 例

えば, $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ の固有値はともに 0 (重根) であるが,

$$(\lambda U - A_1)^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\lambda^2} \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3.9-a)$$

$$(\lambda U - A_2)^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\lambda^2} \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad (3.3.9-b)$$

より, 最小多項式はそれぞれ $\chi_1(\lambda) = \lambda$, $\chi_2(\lambda) = \lambda^2$ である. つまり, 0 はそれぞれ 1 位, 2 位の零点であるから, A_1 の系の原点は安定, A_2 の系の原点は不安定であることが分かる.

【例題 3-4】

$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ のシステムに対して, 初期値 $\mathbf{x}(0)$ の時間応答を調べる.

まず, 式(3.3.6,7)とラプラス変換表から, A_1 に関して,

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathcal{L}^{-1} \{ (s\mathbf{U} - A_1)^{-1} \} \mathbf{x}(0) \\ &= \begin{bmatrix} \quad \quad \quad \\ \quad \quad \quad \end{bmatrix} \mathbf{x}(0) \end{aligned}$$

よって, 任意の初期値に対して, (リアプノフ)安定であることが分かる.

同様に, A_2 に関して,

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathcal{L}^{-1} \{ (s\mathbf{U} - A_2)^{-1} \} \mathbf{x}(0) \\ &= \begin{bmatrix} \quad \quad \quad \\ \quad \quad \quad \end{bmatrix} \mathbf{x}(0) \end{aligned}$$

よって, 任意の初期値に対して, 時間とともに発散していくことが分かる.

一口に安定, 不安定といっても, 条件によって状態量は様々に変化する. 例えば, 一般の 2 次元状態方程式,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}) \quad (3.3.10)$$

を考える. ただし, a, b, c, d は実数である. このとき \mathbf{A} の固有値は,

$$\lambda_1 = \sigma + \sqrt{\sigma^2 - \kappa}, \quad \lambda_2 = \sigma - \sqrt{\sigma^2 - \kappa} \quad (3.3.11)$$

で与えられる。ただし、 $2\sigma = \text{tr}(\mathbf{A}) = a+b$, $\kappa = \det(\mathbf{A}) = ad-bc$ である。詳細な議論は省略し(詳しくは、[3.5]等参照)、固有値の値によって状態がどのように変化するかを図示すると、図 3.3.2 のようになる。

次に、元の非線形系(3.3.2)の安定性について考える。そのために、以下の定理は重要である。以下、証明は省略する([3.4, 6]等を参照のこと)。

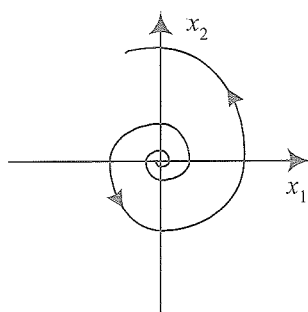
【定理 3.3.2-a】 (リアプノフの間接法(indirect method of Lyapunov))

線形系において平衡点が漸近安定であれば、元の非線形系においてもその平衡点は漸近安定である。また、線形系において平衡点が不安定であれば、元の非線形系においてもその平衡点は不安定である。

漸近安定について、もう少し詳しく述べると以下のようになる。

【定理 3.3.2-b】 線形系の行列 \mathbf{A} の固有値の実部がすべて負であるとき、元の非線形系(3.3.2)も漸近安定である。

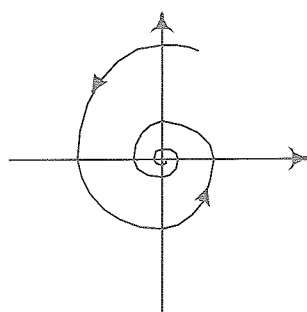
つまり、線形系の行列 \mathbf{A} の固有値の実部が 0 でなければ、非線形系の平衡点の漸近安定性と不安定性が、線形近似で得られるものと一致するということである。問題は、線形系で(リアプノフ)安定な解は、元の非線形系では安定でないかもしれないということである。このようなときには、以下の定理がしばしば使われる。



$$\sigma > 0, \kappa > \sigma^2$$

固有値:複素数(実部正)

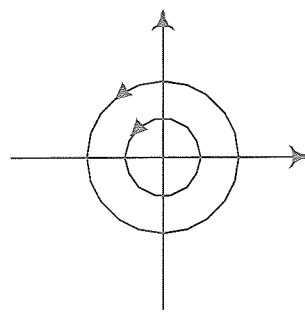
(a-1) 不安定な渦状点(spiral)



$$\sigma < 0, \kappa > \sigma^2$$

固有値:複素数(実部負)

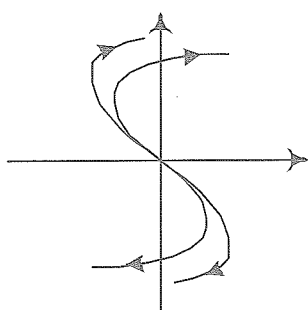
(a-2) 漸近安定な渦状点



$$\sigma = 0, \kappa > \sigma^2$$

固有値:純虚数

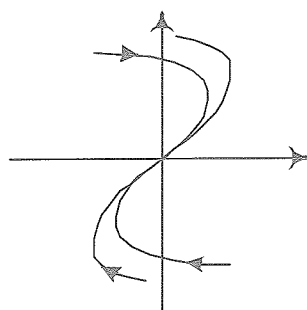
(b) 安定な渦心点(center)



$$\kappa = \sigma^2 > 0, \sigma > 0$$

固有値:実数重根(実部正)

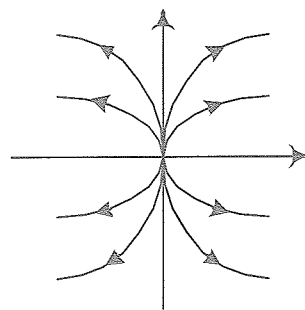
(c-1) 不安定な結節点(node) I



$$\kappa = \sigma^2 > 0, \sigma < 0$$

固有値:実数重根(実部負)

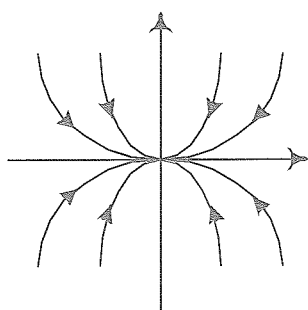
(c-2) 漸近安定な結節点I



$$\sigma^2 \geq \kappa > 0, \sigma > 0$$

固有値:異なる正の2実根

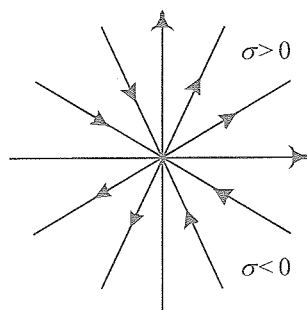
(d-1) 不安定な結節点II



$$\sigma^2 \geq \kappa > 0, \sigma < 0$$

固有値:異なる負の2実根

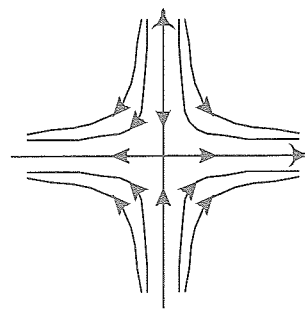
(d-2) 漸近安定な結節点II



$$\kappa = 0$$

固有値:0を含む2実根

(e) 焦点(focus)



$$\kappa < 0$$

固有値:異符号の2実根

(f) 不安定な鞍点(saddle)

図 3.3.2 2次元線形力学系の平衡点近傍の解の振る舞い

【定理 3.3.3】 (リアプノフの直接法(direct method of Lyapunov))

V を, 平衡点 \mathbf{x}_0 のある近傍 U で定義された $\partial V / \partial \mathbf{x}$ が連続であるような関数としたとき,

(1) $V(\mathbf{x}_0) = 0$, かつ $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ のとき $V(\mathbf{x}) > 0$

(2) \mathbf{x}_0 以外の領域 U において, $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$
 が成り立つとき, \mathbf{x}_0 は安定である. さらに,

(3) \mathbf{x}_0 以外の領域 U において, $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$
 が成り立つとき, \mathbf{x}_0 は漸近安定である.

V は, **リアプノフ関数**(Lyapunov function)と呼ばれる. ただし, この定理は非線形系の安定性に関する十分条件のみを与えているので, リアプノフ関数が見つけれない場合でも不安定とは言えない. また, リアプノフ関数を見つけるための一般的な方法はない. 安定性に関するより詳細な解説は, 各種参考書を参照のこと.

3.4 スピン衛星ダイナミクスの基礎

剛体の姿勢のダイナミクスは, オイラーの運動方程式(3.2.11)(物体固定座標系における成分表示)で完全に表されている. しかし, この方程式は, 一般には解析解を得ることができない. そこで, 外トルクが働かない場合(トルクフリー)を考えてみる. 古典力学では, **オイラーのこま**(Euler's top)と呼ばれる. 宇宙機の場合は, 様々な外乱トルクが働くので必ずしもオイラーのこまのような運動にはならないが, 運動解析を行うための基本として知っておくことは重要である. 特にスピン衛星のようにダイナミクスの安定化を図っている衛星は, オイラーのこまの運動を理解することが必要となる. 実は, トルクフリーの場合の運動方程式は解析的に解くことができる. しかし解析解を求めなくても, **ポアンソールの作図法**(Poinso't's theorem)により幾何学的に比較的明快に運動を考察できることが知られている.

まず, 物体固定座標系を $\{\bar{\mathbf{b}}\} = \{\bar{\mathbf{b}}_1 \ \bar{\mathbf{b}}_2 \ \bar{\mathbf{b}}_3\}^T$ (原点は剛体の質量中心にとる)とし, 剛体の慣性ダイアディックを $\bar{\mathbf{I}} = \{\bar{\mathbf{b}}\}^T \mathbf{I} \{\bar{\mathbf{b}}\}$ とする. また, 図 3.4.1 左のように, 任意の単位ベクトルを $\bar{\mathbf{n}} = \{\bar{\mathbf{b}}\}^T \mathbf{n}$ とする. このとき, $\bar{\mathbf{n}}$ まわりの慣性モーメント I は,

$$I = \bar{\mathbf{n}} \cdot (\bar{\mathbf{I}} \cdot \bar{\mathbf{n}}) = \mathbf{n}^T \mathbf{I} \mathbf{n} \quad (3.4.1)$$

で定義される. さらに,

$$\bar{\xi} = \{\bar{\mathbf{b}}\}^T \xi = \frac{\bar{\mathbf{n}}}{\sqrt{I}} \quad (3.4.2)$$

なるベクトルを定義し, $\xi = [x \ y \ z]^T$, $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_x & I_{xy} & I_{xz} \\ & I_y & I_{yz} \\ \text{sym.} & & I_z \end{bmatrix}$ とすると, 式(3.4.1)は,

$$I = \bar{\xi} \cdot (\bar{\mathbf{I}} \cdot \bar{\xi}) = \xi^T \mathbf{I} \xi = I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 + I_{xy} xy + I_{yz} yz + I_{zx} zx \quad (3.4.3)$$

と書ける. これは x - y - z 空間において楕円体を表しており, **慣性楕円体**(inertia ellipsoid)と呼ばれる. この楕円体は, ある点まわりに剛体固有の形状をとる. 式(3.4.3)は, $\{\bar{\mathbf{b}}\}$ 系を慣性主軸に一致させてとれば, 剛体の主慣性モーメント I_1, I_2, I_3 を用いて,

$$I_1 x^2 + I_2 y^2 + I_3 z^2 = 1 \quad (3.4.4)$$

という形に書ける(図 3.4.1 右).

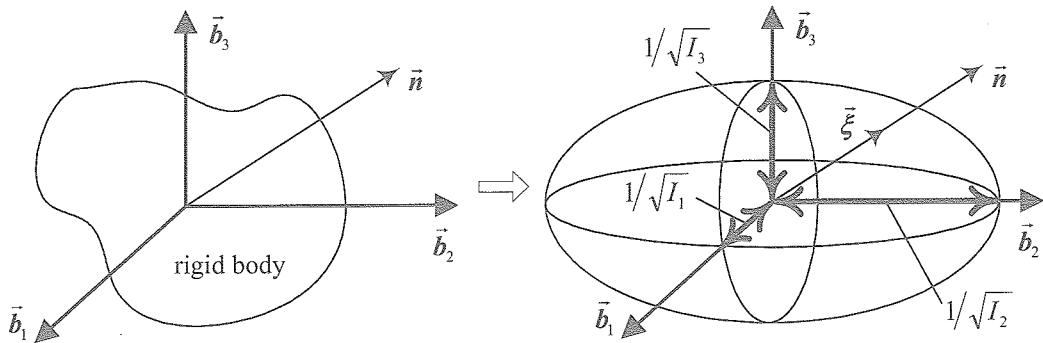


図 3.4.1 慣性楕円体

【例題 3-5】

$$\vec{I} = \{\vec{b}\}^T \mathbf{I} \{\vec{b}\}, \mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_x & I_{xy} & I_{xz} \\ & I_y & I_{yz} \\ \text{sym.} & & I_z \end{bmatrix} \text{ に対して, } \vec{n} = \{\vec{b}\}^T \mathbf{n}, \mathbf{n} = [0 \quad 0 \quad 1]^T \text{ の } \vec{b}_3 \text{ 軸周りの慣性モー}$$

メントを求める. 式(3.4.1)から

$$I = \mathbf{n}^T \mathbf{I} \mathbf{n} = \boxed{}$$

一方, 回転運動エネルギー T は, 角速度ベクトル $\vec{\omega} = \{\vec{b}\}^T \omega = \{\vec{b}\}^T [\omega_1 \quad \omega_2 \quad \omega_3]^T$ を用いて,

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot (\vec{I} \cdot \vec{\omega}) = \frac{1}{2} \omega^T \mathbf{I} \omega \quad (3.4.5)$$

と表せる. $\{\vec{b}\}$ 系が慣性主軸に一致していれば,

$$\frac{\omega_1^2}{(\sqrt{2T/I_1})^2} + \frac{\omega_2^2}{(\sqrt{2T/I_2})^2} + \frac{\omega_3^2}{(\sqrt{2T/I_3})^2} = 1 \quad (3.4.6)$$

と書ける. ω を変数として見れば, 形状としては式(3.4.3)の慣性楕円体を $\sqrt{2T}$ 倍した楕円体であり, **ポアンソーの楕円体**(Poinsot ellipsoid)と呼ばれる.

いま, $\vec{\omega}$ の終点を通り角運動量ベクトル $\vec{h} = \vec{I} \cdot \vec{\omega} = \{\vec{b}\}^T \mathbf{h}$ (大きさ h) に垂直な平面を考える. このとき, ポアンソーの楕円体の中心と平面との距離を計算すると, 式(3.4.5)より,

$$\vec{\omega} \cdot \frac{\vec{h}}{h} = \frac{\vec{\omega} \cdot (\vec{I} \cdot \vec{\omega})}{h} = \frac{2T}{h} \quad (3.4.7)$$

が成り立つ. いまの場合外トルクが働かないので, \vec{h} が慣性系に対して固定されていること, T も保存することを考慮すると, この平面が慣性系に関して動かない定平面であることが分かる. これよりこの平面は, **不変平面**(invariable plane)と呼ばれる.

さらに, 式(3.4.7)で \vec{h} , T を一定にして微分をとると,

$$d\vec{\omega} \cdot \frac{\vec{h}}{h} = 0 \quad (3.4.8)$$

を満たす。つまり、楕円体表面に接する微小ベクトル $d\vec{\omega}$ が \vec{h} と直交、すなわち不変平面上にある。また、 $\vec{\omega}$ は瞬間回転軸だから、 $\vec{\omega}$ の終点は瞬間静止、つまり、ポアンソアの楕円体は不変平面上を滑らずに転がる。以上をまとめると以下ようになる。

- ・ $\vec{\omega}$ の先端は、 \vec{h} に垂直な平面(不変平面)上を動く。
- ・ $\vec{\omega}$ の先端は、ポアンソアの楕円体上を動く。
- ・ ポアンソアの楕円体は、中心を不変平面から等距離に保ちながら不変平面に接し、不変平面上を滑らずに転がる。

つまり、剛体の回転運動は、図 3.4.2 のようにイメージできる。ポアンソアの楕円体を剛体と同一視して考えると分かりやすい。

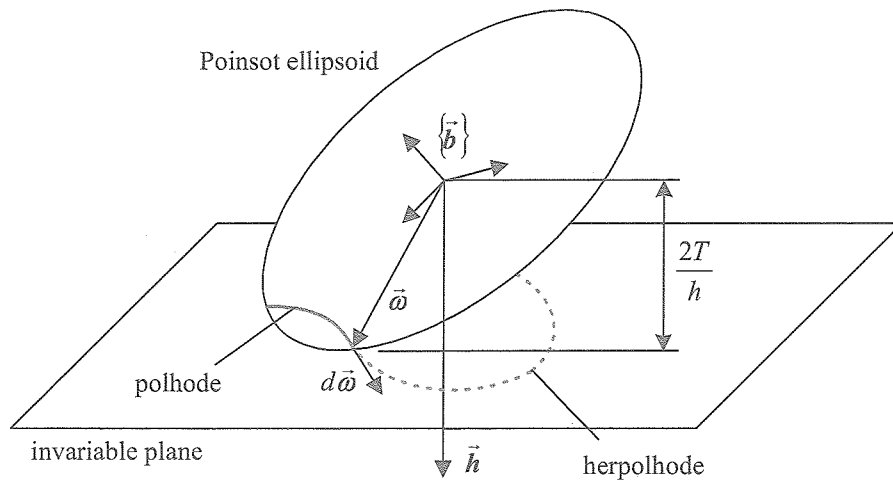


図 3.4.2 ポアンソアの作図法

このとき、 $\vec{\omega}$ の終点がポアンソアの楕円体上に描く軌跡を**ポールホード**(polhode; ギリシ語 pol=axis, hode=path より)、不変平面上に描く軌跡を**ハーポールホード**(herpolhode; her=creep)と呼ぶ。ポールホード、ハーポールホードは、それぞれ剛体、慣性系からみた角速度ベクトルの軌跡と解釈できる。当然、運動の初期条件によって軌跡は変わってくる。ポールホードは、必ず閉じた曲線であるのに対し、ハーポールホードは一般に閉じているとは限らない。

ここで、**角運動量楕円体**(angular momentum ellipsoid)は、 $\{\vec{b}\}$ 系を慣性主軸に一致させると、 $h^2 = \|\vec{I} \cdot \vec{\omega}\|^2$ より、

$$\frac{\omega_1^2}{(h/I_1)^2} + \frac{\omega_2^2}{(h/I_2)^2} + \frac{\omega_3^2}{(h/I_3)^2} = 1 \quad (3.4.9)$$

と書ける。ポールホードは、角運動量楕円体とポアンソアの楕円体との交線としても求められる。図 3.4.3 は、エネルギー一定で、角運動量を変化(実際は初期条件により一定値に決まる)させたときにポールホードがどのように変化するかを示したものである。この図から、剛体の回転運動は、最大最小慣性主軸まわりの回転は安定で、中間慣性主軸まわりの回転

が不安定であることが分かる。

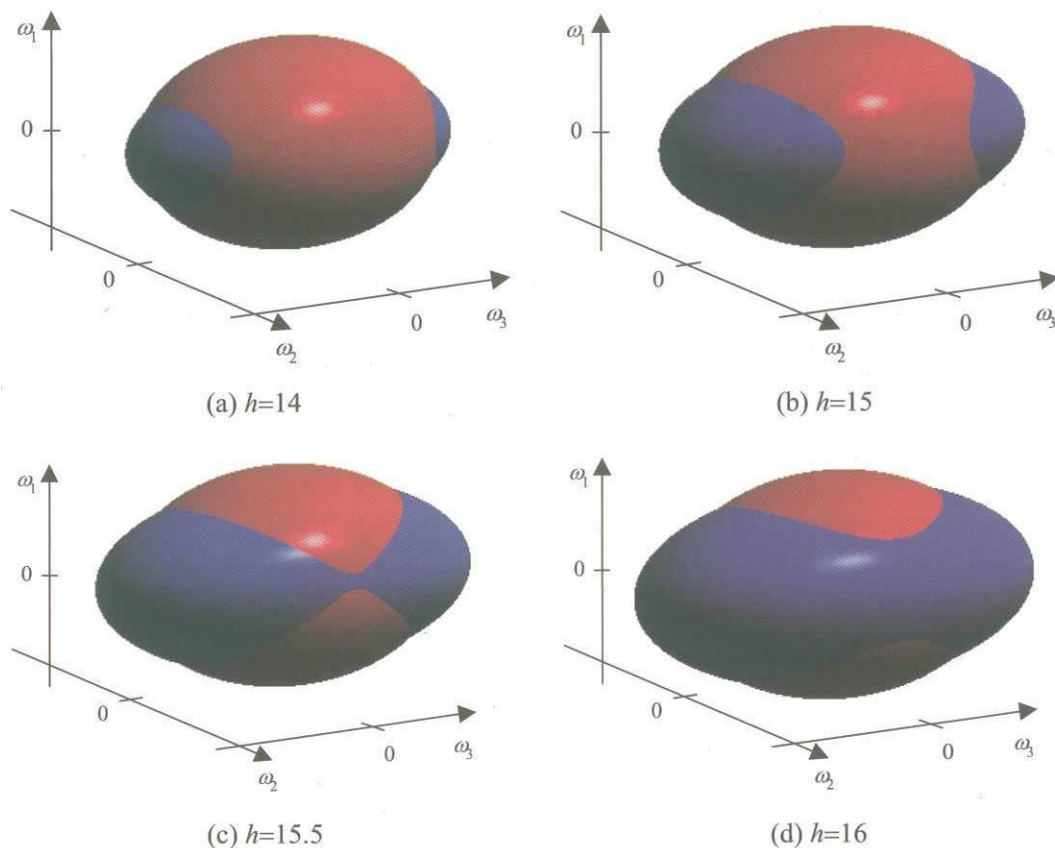


図 3.4.3 角運動量を変化させたときのポールホード

($I_1=4, I_2=3, I_3=2, T=40$, 赤: ポアンソアの楕円体, 青: 角運動量楕円体)

また、エネルギー散逸があるようなセミリジッド(semirigid)な物体(エネルギー散逸があるが、駆動部分がなく剛体と近似できる理想的な物体)の場合、角運動量楕円体が同じ大きさを保ち、ポアンソー楕円体が徐々に小さくなってゆく。つまり、最小慣性主軸まわりの回転が徐々に中間慣性主軸まわりの回転になり、最終的に最大慣性主軸まわりの回転に収束してゆく様子(フラットスピン(flat-spin))も想像できる。つまり、セミリジッドな物体は、最小慣性主軸まわりの回転は不安定であり、最大慣性主軸まわりの回転は漸近安定である(major axis rule)(証明は[3.7])。最大慣性主軸まわりの近傍で回転させておけば、何らかのエネルギー散逸機構をつけておくだけで最大慣性主軸まわりの回転に収束してくれるので、基本的にアクティブな制御は必要ない。逆に、何らかの制約から最小慣性主軸方向に回転させなければいけないときは、スラスタなどによるアクティブな制御が必要である[3.8]。この事実は、アメリカの最初の人工衛星 Explore-I (図 3.4.4, 最小慣性主軸まわりに回転する軸対称なスピン衛星で、中央部から伸びているアンテナによりエネルギーが散逸した)が、軌道上でタンブリング(tumbling)をしたことにより発見的に得られた。



図 3.4.4 Explorer-I

次に、オイラーのこまの運動方程式、

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 = 0 \\ I_2 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 = 0 \\ I_3 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 = 0 \end{cases} \quad (3.4.10)$$

を用いて安定性を考えてみる．ここでは、 $I_1 > I_2 > I_3$ とする．この方程式の平衡点は、式(3.4.10)において $\dot{\omega}_1 = \dot{\omega}_2 = \dot{\omega}_3 = 0$ とすれば、 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ のうち少なくとも2つが零、すなわち、各慣性主軸まわりの回転($\omega = \mathbf{0}$ は明らかに不安定なので除く)であることが分かる．

まず、最大慣性主軸(第1軸)まわりの回転を考える． x_1, x_2, x_3 を微小量として、 $\omega = [\Omega_1 + x_1 \ x_2 \ x_3]^T$ として式(3.4.10)を線形化すると、

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{I_3 - I_1}{I_2} \Omega_1 \\ 0 & \frac{I_1 - I_2}{I_3} \Omega_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (3.4.11)$$

を得る．係数行列の固有値は、

$$0, \pm i \sqrt{\frac{(I_1 - I_3)(I_1 - I_2)}{I_2 I_3}} \Omega_1 \quad (3.4.12)$$

となる．固有値が純虚数であるから線形系においてこの平衡点は渦心点で、安定である．最小慣性主軸(第3軸)まわりも同様である．一方、中間慣性主軸(第2軸)まわりでは、線形系の係数行列の固有値が、

$$0, \pm \sqrt{\frac{(I_2 - I_3)(I_1 - I_2)}{I_1 I_3}} \Omega_1 \quad (3.4.13)$$

となる．固有値が異符号の実根であることからこの平衡点は鞍点で、不安定である．

上記は、線形系に関する議論である．第2軸は、線形系で不安定なので、元の非線形でも不安定である．しかし、第1,3軸は、固有値に零が含まれているので、非線形系の安定性は保証されない．そこで、第3

軸まわりの線形化方程式,

$$\begin{cases} I_1 \dot{x}_1 = (I_2 - I_3) \omega_3 x_2 \\ I_1 \dot{x}_2 = (I_3 - I_1) \omega_3 x_1 \\ I_3 \dot{x}_3 = 0 \end{cases} \quad (3.4.14)$$

を x_1 - x_2 平面に射影した運動を考える. 式(3.3.14)の第 1 式に $2(I_1 - I_3)x_1$ を掛け, 第 2 式に $2(I_2 - I_3)x_2$ を掛けて加えると,

$$\frac{d}{dt} \{I_1(I_1 - I_3)x_1^2 + I_2(I_2 - I_3)x_2^2\} = 0 \quad (3.4.15)$$

を得る. つまり, 平衡点は,

$$V = I_1(I_1 - I_3)x_1^2 + I_2(I_2 - I_3)x_2^2 \geq 0 \quad (3.4.16)$$

をリアプノフ関数としてもつので安定である. ただし, $dV/dt=0$ なので漸近安定ではない.

【例題 3-6】最大慣性主軸周りの回転運動

式(3.4.11)で表される回転運動の解を求める. $I_1=3$, $I_2=2$, $I_3=1$, $\Omega=1$ とする. このとき, 線形系の係数行列は,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となる. これより,

$$s\mathbf{U} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 1 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix}$$

であるから,

$$(s\mathbf{U} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} & 0 \\ \frac{1}{s^2} & \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

が得られる. さらに, ラプラス変換表に当てはめて,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} & 0 \\ \frac{1}{s^2} & \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix}$$

を得る. よって, (リアプノフ)安定であることが分かる.

軸対称剛体の回転運動

次に特別な場合として, 慣性楕円体が球($I_1=I_2=I_3$)で表される剛体を考える. このとき, 図 3.4.4 のように常に $\bar{\mathbf{h}}$ と $\bar{\boldsymbol{\omega}}$ の方向が一致して安定であることが分かる.

$$\omega_3 = n = \text{const.} \quad (3.4.18)$$

を得る. ここで, $\lambda = n(I - I_3)/I$ とおくと, 式(3.4.17)の第 1, 2 式は,

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 = \lambda \omega_2 \\ \dot{\omega}_2 = -\lambda \omega_1 \end{cases} \quad (3.4.19)$$

と書ける. これより, $\omega_1 \dot{\omega}_1 + \omega_2 \dot{\omega}_2 = 0$, つまり,

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = \omega_{12}^2 = \text{const.} \quad (3.4.20)$$

という関係が成り立つ. ここで, \vec{h} と \vec{b}_3 のなす角を θ , $\vec{\omega}$ と \vec{b}_3 のなす角を γ とおけば,

$$\vec{h} = \begin{bmatrix} \vec{b} \end{bmatrix}^T [h_1 \ h_2 \ h_3]^T \text{ として,}$$

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}{h_3} = \frac{I}{I_3} \frac{\omega_{12}}{n} = \text{const.} \quad (3.4.21-a)$$

$$\tan \gamma = \frac{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}{\omega_3} = \frac{\omega_{12}}{n} = \text{const.} \quad (3.4.21-b)$$

を得る. つまり, $I_3 < I$ のときは $\gamma < \theta$, $I_3 > I$ のときは $\gamma > \theta$ であり, 図 3.4.7 のように $I_3 < I$ のときは空間円錐が物体円錐の外側にあり, $I_3 > I$ のときは空間円錐が物体円錐の内側にあることが分かる.

スピン衛星の運動解析においては, 外トルクが働かないとき慣性系に固定された \vec{h} のまわりを宇宙機のスピン軸 \vec{b}_3 が回転する運動をニューテーション(章動, nutation), 外トルクが働くことによる \vec{h} の方向変化をプリセッション(歳差, precession)と呼ぶ. また, θ をニューテーション角(nutation angle)と呼ぶ. 外トルクの働かない場合, 軸対称剛体であれば上記のようにニューテーション角は一定であるが, 軸対称でない剛体を安定な 1, 3 軸まわりに回転させてもニューテーション角は一定にならない.

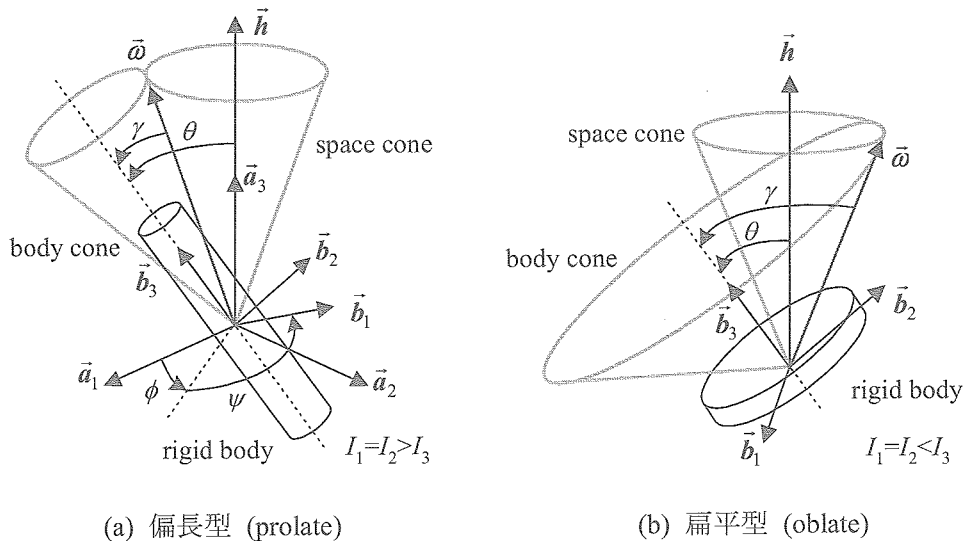


図 3.4.7 物体円錐と空間円錐

スピン衛星に関するニューテーションとプリセッションの定義は、古典力学のそれとは区別して考えたほうがよい。古典力学では、以下に示すような3-1-3系オイラー角 $[\phi \ \theta \ \psi]^T$ を導入してそれらの時間変化をそれぞれプリセッション、ニューテーション、スピンと定義する。この場合、外トルクが働かない場合でもプリセッションが存在することになるので明らかに定義が異なる[3.9].

次に、図3.4.7(a)のように3-1-3系オイラー角 $[\phi \ \theta \ \psi]^T$ を導入し、それぞれの時間変化を調べる。このとき、式(2.7.3-a)より、

$$\omega = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \sin \psi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \psi \\ \dot{\phi} \cos \psi \sin \theta - \dot{\theta} \sin \psi \\ \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (3.4.22)$$

が成り立つ。軸対称剛体の場合は、 θ が一定であることから、

$$\omega = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \sin \psi \sin \theta \\ \dot{\phi} \cos \psi \sin \theta \\ \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (3.4.23)$$

となる。さらに、式(3.4.18, 20)を考慮すると、 $\dot{\phi}$ 、 $\dot{\psi}$ が一定であることが分かる。実際、式(3.4.17, 23)より、

$$\dot{\psi} = n(I - I_3)/I = \lambda \quad (3.4.24-a)$$

$$\dot{\phi} = I_3 n \cos \theta / I = I_3 \dot{\psi} \cos \theta / (I - I_3) \quad (3.4.24-b)$$

を得る。式の右辺より $\dot{\phi}$ と $\dot{\psi}$ の関係が分かり、 $I > I_3$ のときは対称軸 \bar{b}_3 が角運動量ベクトル \bar{h} のまわりを回転する方向とスピン方向が同じ、 $I < I_3$ のときは反対になることが分かる。以上のように、慣性モーメント比(MOIR, moment of inertia ratio) $\sigma = I_3/I$ が1より大きいかどうかで動力学的な性質が変わってくるので、軸対称衛星の場合に σ を一つの設計基準として用いることも多い。

次に、セミリジッドな対称剛体に対して安定性を考えてみる。角運動量 h と運動エネルギー T は、それぞれ、

$$h^2 = \omega_{12}^2 I^2 + n^2 I_3^2 \quad (3.4.25-a)$$

$$2T = \omega_{12}^2 I^2 + n^2 I_3^2 \quad (3.4.25-b)$$

を満たすので、これより ω_{12} を消去して、 $\cos \theta = I_3 n / h$ なる関係を用いれば、

$$T = \frac{h^2}{2I_3} \left\{ 1 - \cos^2 \theta \left(\frac{I_3}{I} - 1 \right) \right\} \quad (3.4.26)$$

が成り立つ。これを時間微分することにより、最終的に、

$$\dot{T} = \frac{h^2}{2I_3} \cos 2\theta \left(\frac{I_3}{I} - 1 \right) \dot{\theta} \quad (3.4.27)$$

を得る。これより、エネルギー散逸がある場合、つまり $\dot{T} < 0$ のとき、

- $I > I_3$ ($\sigma < 1$) のとき $\dot{\theta} > 0$ 、つまり、ニューテーション角は増大する
- $I < I_3$ ($\sigma > 1$) のとき $\dot{\theta} < 0$ 、つまり、ニューテーション角は0に収束する

ということが分かる．これは，非対称剛体のとき考えた major-axis rule から明らかなである．

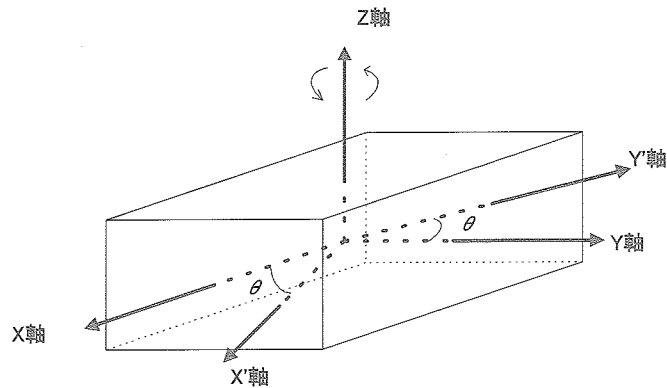
第3章例題解答

【例題 3-1】慣性ダイアディックの成分行列

座標系のとり方で，慣性行列 \mathbf{I} の成分が変わることを確かめる．質量分布が一様な直方体の各面に垂直に軸を取ったとき，それらの軸は慣性主軸であり，

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 200 & 0 \\ 0 & 0 & 300 \end{bmatrix} \quad (3.2.9)$$

のように慣性乗積が零になる．



このときの物体固定座標系を $\{\vec{a}\} = \{\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{a}_3\}^T$ とすると，直方体の慣性ダイアディック $\vec{\mathbf{I}}$ は，

$$\vec{\mathbf{I}} = \{\vec{a}\}^T \mathbf{I} \{\vec{a}\} \quad (3.2.10)$$

と表すことができる．そこで，第3軸まわりに $\theta = 30[\text{deg}]$ 回転した軸まわりの慣性行列を求める．回転した座標系として， $\{\vec{b}\} = \{\vec{b}_1 \ \vec{b}_2 \ \vec{b}_3\}^T$ とすると，2つの座標系の関係は，式(2.2.5)より，

$$\{\vec{b}\} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \{\vec{a}\} = \mathbf{C} \{\vec{a}\} \quad (3.2.11)$$

よって，慣性ダイアディックを $\{\vec{b}\}$ 系で書き直すと，

$$\vec{\mathbf{I}} = \{\vec{b}\}^T \boxed{\mathbf{C}} \mathbf{I} \boxed{\mathbf{C}^T} \{\vec{b}\} = \{\vec{b}\}^T \begin{bmatrix} 125 & 25\sqrt{3} & 0 \\ 25\sqrt{3} & 175 & 0 \\ 0 & 0 & 300 \end{bmatrix} \{\vec{b}\} \quad (3.2.12)$$

となり，直方体の $\{\vec{b}\}$ 系でみた慣性行列を求めることができる．

【例題 3-2】

姿勢が、各軸に独立に制御できないことを確認する。いま、 $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\omega} = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$,

$\boldsymbol{\tau} = [\tau_x \ \tau_y \ \tau_z]^T$ とする。このとき、式(3.2.13)を計算すると、

$$\begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} \quad (3.2.14)$$

となる。さらに展開すると、

$$\begin{cases} I_x \dot{\omega}_x - (I_y - I_z) \omega_y \omega_z = \tau_x \\ I_y \dot{\omega}_y - (I_z - I_x) \omega_z \omega_x = \tau_y \\ I_z \dot{\omega}_z + (I_x - I_y) \omega_x \omega_y = \tau_z \end{cases} \quad (3.2.15)$$

以上の結果から、宇宙機の姿勢を各軸独立に制御できないことがわかる（カップリング項がある）。

【例題 3-3】

$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ のシステムに対して、初期値 $\mathbf{x}(0)$ の時間応答を調べる。

まず、式(3.3.6,7)とラプラス変換表から、 \mathbf{A}_1 に関して、

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathcal{L}^{-1} \{ (s\mathbf{U} - \mathbf{A}_1)^{-1} \} \mathbf{x}(0) \\ &= \mathcal{L}^{-1} \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{x}(0) = \mathcal{L}^{-1} \begin{bmatrix} 1/s & 0 \\ 0 & 1/s \end{bmatrix} \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(0) \end{aligned}$$

よって、任意の初期値に対して、(リアプノフ)安定であることが分かる。

同様に、 \mathbf{A}_2 に関して、

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathcal{L}^{-1} \{ (s\mathbf{U} - \mathbf{A}_2)^{-1} \} \mathbf{x}(0) \\ &= \mathcal{L}^{-1} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{x}(0) = \mathcal{L}^{-1} \begin{bmatrix} 1/s & 1/s^2 \\ 0 & 1/s \end{bmatrix} \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(0) \end{aligned}$$

よって、任意の初期値に対して、時間とともに発散していくことが分かる。

【例題 3-4】

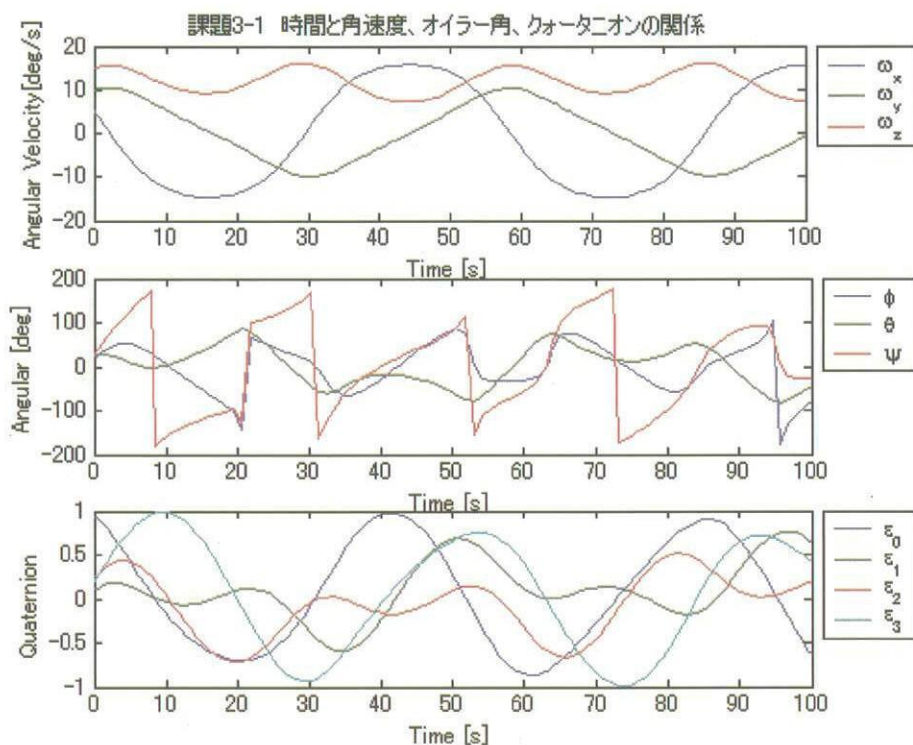
初期姿勢 $[\phi \ \theta \ \psi]^T$ からクォータニオン $\hat{\mathbf{e}}_0$ を求めるのに、"euler2dcm" と "dcm2quater" を使用する。ダイナミクスとキネマティクスの微分方程式は diff_eqs.m に記述した。

また、得られたクォータニオンをオイラー角へ変換するのに "quater2dcm" と "dcm2euler" を利用した。

100[s]後の姿勢とレートは、

$$\omega_{100} = \begin{bmatrix} 15.7068 \\ -0.6095 \\ 7.2141 \end{bmatrix} [\text{deg/s}] \quad \hat{\varepsilon}_{100} = \begin{bmatrix} -0.63267 \\ 0.63205 \\ 0.18417 \\ 0.41 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \phi_{100} \\ \theta_{100} \\ \varphi_{100} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -78.247 \\ -48.589 \\ -25.568 \end{bmatrix} [\text{deg}]$$

また、シミュレーション開始後から 100[s]までの時間経過を下图に示す。



プログラムを実行するためには、Problem3_1.m, diff_eqs.m, euler2dcm.m, dcm2quate.m, quate2dcm.m, dcm2euler.m を同じフォルダに入れて、"Problem3_1"を入力する。

【例題 3-5】

$\vec{I} = \{\vec{b}\}^T \mathbf{I} \{\vec{b}\}$, $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_x & I_{xy} & I_{xz} \\ & I_y & I_{yz} \\ \text{sym.} & & I_z \end{bmatrix}$ に対して, $\vec{n} = \{\vec{b}\}^T \mathbf{n}$, $\mathbf{n} = [0 \ 0 \ 1]^T$ の \vec{b}_3 軸周りの慣性モー

メントを求める。式(3.4.1)から

$$I = \mathbf{n}^T \mathbf{I} \mathbf{n} = \boxed{I_z}$$

【例題 3-6】 最大慣性主軸周りの回転運動

式(3.4.11)で表される回転運動の解を求める． $I_1=3$, $I_2=2$, $I_3=1$, $\Omega=1$ とする． このとき，線形系の係数行列は，

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

となる． これより，

$$s\mathbf{U} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 1 \\ 0 & -1 & s \end{bmatrix}$$

であるから，

$$(s\mathbf{U} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{s^3 + s} \begin{bmatrix} s^2 + 1 & 0 & 0 \\ 0 & s^2 & -s \\ 0 & s & s^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/s & 0 & 0 \\ 0 & -s/(s^2 + 1) & -1/(s^2 + 1) \\ 0 & 1/(s^2 + 1) & -s/(s^2 + 1) \end{bmatrix}$$

が得られる． さらに， ラプラス変換表に当てはめて，

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix}$$

を得る． よって， (リアプノフ)安定であることが分かる．

第 4 章 スピン衛星の力学と制御

4.1 受動的スピン安定性

4.1.1 オイラーの運動方程式

オイラーの回転に関する運動方程式は，ニュートンの慣性の法則および，作用反作用の法則を剛体に適用し，次のように導かれる．

$$\left\{ \frac{d\mathbf{h}}{dt} \right\}_N = \boldsymbol{\tau} \quad (4.1.1)$$

式(4.1.1)の意味するところは，角運動量ベクトルの慣性系での微分は，外力トルクベクトルと一致するということである．さらに，機体座標系での微分を導入した表現形式

$$\left\{ \frac{d\mathbf{h}}{dt} \right\}_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h} = \boldsymbol{\tau} \quad (4.1.2)$$

を考えると，外力トルクベクトルは，機体座標系からみた角運動量ベクトルの時間変化率と角運動量ベクトルが倒れこむ運動に対して発生する抵抗力との足し合わせに一致することがわかる．後者の抵抗力をジャイロ剛性といい，スピン衛星はこの性質を積極的に利用して姿勢を安定化させようとするものである．

4.1.2 安定性

二通りのアプローチで安定条件を導出する．一つは式(4.1.2)を線形化することで固有値問題を解くもの，もう一つは角運動量および運動エネルギーがもつ物理法則と照らし合わせて導かれるものである．

固有値解析

機体座標系が慣性主軸と一致するとき，慣性行列 I は

$$I = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{bmatrix} \quad (4.1.3)$$

のように書き表され，また入力トルクを 0 とすると，式(4.1.2)は次のように書き換えられる．

$$I_{11}\dot{\omega}_1 - (I_{22} - I_{33})\omega_2\omega_3 = 0 \quad (4.1.4a)$$

$$I_{22}\dot{\omega}_2 - (I_{33} - I_{11})\omega_3\omega_1 = 0 \quad (4.1.4b)$$

$$I_{33}\dot{\omega}_3 - (I_{11} - I_{22})\omega_1\omega_2 = 0 \quad (4.1.4c)$$

次に，スピン軸を第 3 軸とし，スピン軸と直交する 2 軸まわりの角速度は微小であり，さらにこれらの軸まわりの慣性モーメントが比較的近い値をもつ，すなわち

$$\left| \frac{I_{11} - I_{22}}{I_{33}} \omega_1 \omega_2 \right| \ll |\dot{\omega}_3| \quad (4.1.5)$$

を仮定すると，

$$\dot{\omega}_3 \approx 0 \quad (4.1.6)$$

の近似式が得られ、 ω_3 は一定とみなすことができる。これを $\bar{\omega}_3$ と書き表すことにする。さらに

$$\lambda_1 = \frac{I_{33} - I_{22}}{I_{11}} \bar{\omega}_3, \quad \lambda_2 = \frac{I_{33} - I_{11}}{I_{22}} \bar{\omega}_3 \quad (4.1.7)$$

を定義すると、式(4.1.4)は次のように書き換えられる。

$$\dot{\omega}_1 + \lambda_1 \omega_2 = 0 \quad (4.1.8a)$$

$$\dot{\omega}_2 - \lambda_2 \omega_1 = 0 \quad (4.1.8b)$$

式(4.1.8)は線形微分方程式であり、

$$\dot{x} = Ax \quad (4.1.9)$$

のように書き換えられる。ただし

$$x = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda_1 \\ \lambda_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.1.10)$$

したがって、 A の固有値 $\pm \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}$ が複素平面虚軸上にある、すなわち

$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{(I_{33} - I_{22})(I_{33} - I_{11})}{I_{11}^2} \bar{\omega}_3^2 < 0 \quad (4.1.11)$$

より、次式を満たすことが安定（リアプノフ安定）であることの必要十分条件となる。

$$I_{33} / I_{22} > 1, \quad I_{33} / I_{11} > 1 \quad (4.1.12)$$

または

$$I_{33} / I_{22} < 1, \quad I_{33} / I_{11} < 1 \quad (4.1.13)$$

なお、最大慣性モーメントの値を他の 2 軸回りの慣性モーメントで割った値を慣性能率比と呼ぶ。

リアプノフ安定を角速度ベクトルの動きとして物理的に解釈すると、角速度ベクトルの移動空間をある閉空間に拘束するような初期条件が与えられるということである。このこ

とは、時刻 $t=0$ での初期条件 $\omega_1(0), \omega_2(0)$ 、新たな定数 $\lambda = \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}$ を用いて、

式(4.1.8)または(4.1.10)の一般解が

$$\omega_1(t) = \omega_1(0) \cos \lambda t + \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \omega_2(0) \sin \lambda t \quad (4.1.14a)$$

$$\omega_2(t) = \omega_2(0) \cos \lambda t - \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \omega_1(0) \sin \lambda t \quad (4.1.14b)$$

のように導かれる、すなわち ω_1, ω_2 が $\omega_1(0), \omega_2(0)$ を適当に選ぶことによって、楕円曲線上を運動することと結びつく。

ここまで、剛体を仮定した安定性について述べたが、実際の衛星では程度の大小はあるものの何らかのエネルギー消散部分を有する。たとえば、燃料スロッシングや柔軟ビームな

どである。この場合、最大慣性主軸まわりの運動について漸近安定であり、最小慣性主軸まわりの運動については不安定であることが結論付けられる。

実用上は、慣性能率比の理論的限界に余裕を持たせた慣性能率比 1.05 を安定基準のひとつとしている。NASDA がこれまで打ち上げてきたスピンの衛星もこの基準を満たしている（表 4.1.1 参照）。衛星ごとに、要求安定度、許容ニューテーション角などの仕様、および構造特性、機構部品の有無などが異なるため、何に対するどの程度の余裕かを解析しておくことは重要である。たとえば、つばさの場合、太陽電池パドルの展開にともなう局所的安定領域の変動や不確定性に対する余裕として、慣性能率比 1.05 以上で問題ないことを確認している。

表 4.1.1 スピン衛星

| 衛星名称 | 慣性能率比 | スピンレート [rpm] | 備考 |
|--------|----------------|-----------------|----|
| CS-3 | 1.05 以上 | 90±9 | |
| CS-3b | 1.05 以上 | 90±9 | |
| ETS-I | ? | 100±15 | |
| ETS-IV | 1.05 以上 | 60±6 | |
| GMS-V | 1.05 以上 (2.25) | 100±1 | |
| つばさ | 1.05 以上 | 5 | |

局所的安定領域

式(4.1.12)および式(4.1.13)は、剛体の最大慣性主軸または最小慣性主軸まわりの回転運動はリアプノフ安定であることを示すものである。ここで注意すべき点は、これらの安定条件は、式(4.1.5)の仮定のもとで成り立つということである。したがって、式(4.1.4)までさかのぼれば、式(4.1.12)および式(4.1.13)の条件は局所的リアプノフ安定性を保証するものではない。本節では、局所的リアプノフ安定性が保証される領域を剛体の物理量である運動エネルギーおよび角運動量と結びつけて特定することを考える。

3.4 節で述べたように、式(4.1.4)で一般的に記述される非軸対称剛体の自由運動の解曲線は、モーメント楕円体

$$\frac{\omega_1^2}{I_{22}^2 I_{33}^2} + \frac{\omega_2^2}{I_{33}^2 I_{11}^2} + \frac{\omega_3^2}{I_{11}^2 I_{22}^2} = \frac{|h|^2}{I_{11}^2 I_{22}^2 I_{33}^2} (= \text{const.}) \quad (4.1.15)$$

と、エネルギー楕円体

$$\frac{\omega_1^2}{I_{22} I_{33}} + \frac{\omega_2^2}{I_{33} I_{11}} + \frac{\omega_3^2}{I_{11} I_{22}} = \frac{2T}{I_{11} I_{22} I_{33}} \quad (4.1.16)$$

の交線、すなわちポルホードとして得られる。図 4.1.1 にこれらを示す。最大慣性主軸およ

び最小慣性主軸まわりのポルホードは、ある範囲まではその軸まわりに閉じた曲線をなし
ており、その外でいったん分岐し、また別の軸回りに閉曲線をえがく。分岐が生じる境界
をセパトリクスといい、セパトリクスより内側が局所的安定領域といえる。

セパトリクスを基準とする局所的安定領域を定義し、衛星の状態が局所的安定領域に
対してどのような位置関係にあるかを評価することは、式(4.1.5)や(4.1.6)の近似をとまなわ
ないため、非線形効果を考慮する点でより一般的な安定判別法である。たとえば、つばさ
の姿勢制御系設計においても、慣性能率比による評価だけでなく、このような観点でも評
価が行われている。具体的には、衛星のもつ運動エネルギーとセパトリクスに達したと仮
定したときにもつ運動エネルギーとの差に対するさまざまな要因でのエネルギー変動分の比を
安定余裕の指標の一つとして解析している。

また、許容ニューテーション角は、搭載センサの可視性などから決まる要求とは別に、
セパトリクスに達しない条件としても定義される。つばさでは、スピン軸とセパトリ
クスとのなす角からマージンを差し引いたものが、スピン安定を維持できる最大許容ニ
ューテーション角として設定されている。

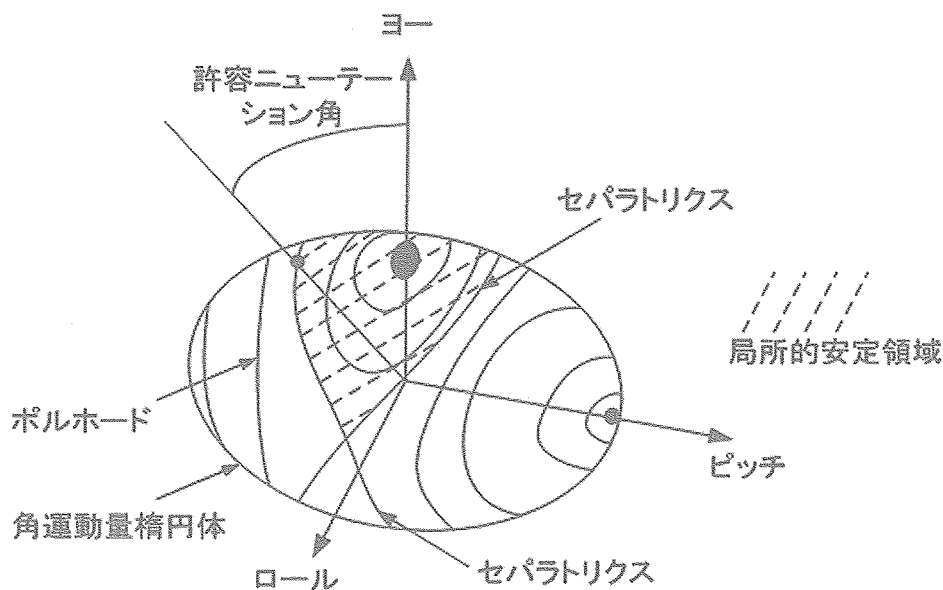


図 4.1.1 局所的安定領域

4.2 能動制御

ニューテーション角、スピンレート、スピン軸方向の調整を実施する場合には、ガスジ
ェットスラストなどにより、能動制御を行う。本節では、これらの制御法について概説す
る。

4.2.1 ニューテーション制御

スピン軸と直交する任意の 1 軸まわりに制御トルクを加えることを考える。このときの運動は、式(4.1.8)の第 2 式に外力トルクを付け加え、次のように定式化できる。

$$\dot{\omega}_1 - \lambda_1 \omega_2 = 0 \quad (4.2.1a)$$

$$\dot{\omega}_2 + \lambda_2 \omega_1 = \tau_2 \quad (4.2.1b)$$

トルクを印加する軸についての角速度成分 ω_2 をフィードバックする、すなわち、任意の正の定数 c を用いて

$$\tau_2 = -c\omega_2 \quad (4.2.2)$$

で表される制御を施すことを考えると、式(4.2.1b)は次のように書き換えられる。

$$\dot{\omega}_2 + \lambda_2 \omega_1 = -c\omega_2 \quad (4.2.3)$$

式(4.2.1a),(4.2.3)を整理すると、次式が得られる。

$$\ddot{\omega}_2 + c\dot{\omega}_2 + \lambda^2 \omega_2 = 0 \quad (4.2.4)$$

したがって、 ω_2 は漸近安定であり、クロスオーバー周波数 λ ，減衰比 $c/(2\lambda)$ で特徴付けられる減衰波形となることがわかる。 ω_2 の減衰と同時に、式(4.2.1a)より ω_1 も漸近的に収束することがわかる。

4.2.2 スピンレート制御

スピン軸まわりに制御トルク τ_3 を印加することを考えれば、式(4.1.6)は次のように書き換えられる。

$$\dot{\omega}_3 = \tau_3 \quad (4.2.5)$$

したがって、他の軸とは独立してスピンレートを制御することができる。

4.2.3 スピン軸方向制御

ニューテーション制御やスピンレート制御は角速度成分についての制御であったが、スピン軸方向制御は姿勢角の制御である点が大きく異なる。スピン軸方向制御では、ある基準座標系からみたスピン軸方向を目標値に追従させようとするため、取り扱う変数の中に姿勢を表すものが含まれることとなる。本節では、スピン軸方向を表現するのに、スピン座標系を定義し、制御則について説明する。図 4.2.1 に示すような単位球面を考え、基準座標系に対して固定された子午線および経線を用意する。角速度ベクトルが球面と交わる点において、子午線と平行な単位ベクトル、経線と平行な単位ベクトル、これらと正規直交系をなす単位ベクトル（交点における法線ベクトル）で規定される座標系をスピン座標系と定義する。

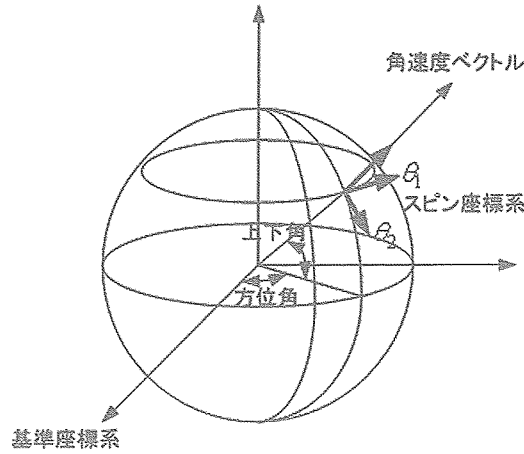


図 4.2.1 スピン座標系

このとき、スピン軸の運動を解くことは、単位球面上を交点がどのように移動するかという問題に置き換えられる。交点の位相角 θ_1 および上下角 θ_2 を変数として用いる。スピン角速度と比較してスピン軸直交軸まわりの角速度が小さいものとして線形近似すると、次式が得られる。

$$-I_{11}\ddot{\theta}_1 + I_{33}\bar{\omega}_3\dot{\theta}_2 = \tau_{s1} \quad (4.2.6a)$$

$$I_{11}\ddot{\theta}_2 + I_{33}\bar{\omega}_3\dot{\theta}_1 = \tau_{s2} \quad (4.2.6b)$$

ここで、 τ_{s1}, τ_{s2} は、スピン座標系での制御トルクの成分である。一定の制御トルク $\tau_{s1} = \bar{\tau}_{s1} = \text{const.}$ および $\tau_{s2} = \bar{\tau}_{s2} = \text{const.}$ を加える場合、式(4.2.6)の一般解は次のように導かれる。

$$\theta_1(t) = \theta_1(0) + \frac{\tau_{s2}}{I_{33}\bar{\omega}_3}t - \frac{A}{\lambda}\cos(\lambda t + \phi) \quad (4.2.7a)$$

$$\theta_2(t) = \theta_2(0) + \frac{\tau_{s1}}{I_{33}\bar{\omega}_3}t + \frac{A}{\lambda}\sin(\lambda t + \phi) \quad (4.2.7b)$$

式(4.2.7a),(4.2.7b)いずれも、右辺第 2 項が外力トルクによる角運動量ベクトルの移動、すなわちプリセッション運動を表し、第 3 項がニューテーション運動を表す。したがって、スピン軸の運動は、プリセッションとニューテーションが重ねあわされた軌道となり、一般にはスパイラス曲線となる（図 4.2.2 参照）。また、プリセッション項をみてわかるように、スピン角速度が高いほどジャイロ剛性が高く、外力トルクに対するスピン軸の移動量が小さくなる。

スピン軸方向制御は、 θ_1, θ_2 をある初期状態から目標の状態へ制御するものであるが、この間の軌道はどのようなものであるかを考える。つばさをはじめ多くのスピン衛星がガス

ジェットスラストをアクチュエータとして用いているが、発生するトルクは機体軸に固定されているため、スピン軸まわりの回転角が所定の位相になったタイミングで、間欠的にガスジェットを吹くこととなる。太陽センサのパルス信号を利用してタイミングを計る場合が多い。このような制御を行うとき、初期位置と最終位置を結ぶ曲線は、ラム・ラインと呼ばれる形状になるため、このようなスピン軸方向制御をラム・ライン制御といい、つばさもこの手法を用いている。

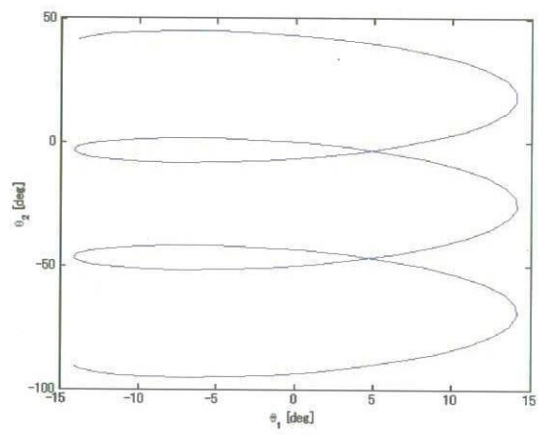


図 4.2.2 スパイラル曲線
(慣性系からみて一定外力を加える場合の解曲線)

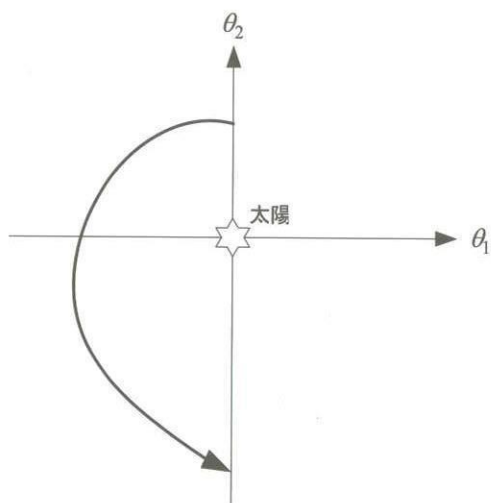


図 4.2.3 ラム・ライン曲線
(サンパルス有位相基準として間欠的に外力トルクを加える場合の解曲線)

4.3 姿勢決定

4.3.1 スピン軸方向の検出

太陽センサによってスピン軸と太陽方向のなす角，すなわち太陽角が得られ，地球センサによってスピン軸と地心方向とのなす角が得られる．太陽方向ベクトルを中心とし，半頂角が太陽角と等しい円錐を描く．同様に，地心方向ベクトルを中心とし，半頂角がスピン軸と地心方向のなす角の円錐を描く．2つの円錐の交線が2本定まるが，これらのいずれかがスピン軸と一致する（図 4.3.1 参照）．

太陽方向ベクトルを \mathbf{s} ，地心方向ベクトルを \mathbf{e} ，スピン軸方向ベクトルを \mathbf{a} とおく．また， \mathbf{s} まわりの半頂角を β ， \mathbf{e} まわりの半頂角を η とする．ここで， \mathbf{s} ， \mathbf{e} ， β ， η は既知であり， \mathbf{a} は未知である．これらには，以下の関係式が成り立つ．

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{s} = \cos \beta \quad (4.3.1)$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e} = \cos \eta \quad (4.3.2)$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 1 \quad (4.3.3)$$

これらを解くことにより，次式が得られる．

$$\mathbf{a} = x\mathbf{s} + y\mathbf{e} + z\mathbf{s} \times \mathbf{e}$$

ただし

$$x = \frac{\cos \beta - \mathbf{e} \cdot \mathbf{s} \cos \eta}{1 - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{s})^2} \quad (4.3.4)$$

$$y = \frac{\cos \eta - \mathbf{e} \cdot \mathbf{s} \cos \beta}{1 - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{s})^2} \quad (4.3.5)$$

$$z = \pm \sqrt{\frac{1 - x \cos \beta - y \cos \eta}{1 - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{s})^2}} \quad (4.3.6)$$

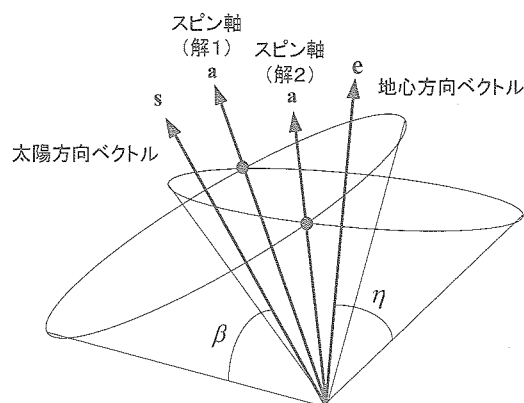


図 4.3.1 コーン角法によるスピン軸の決定

4.3.2 ニューテーション運動の検出

4.2.1 節で述べたニューテーション制御では、スピン軸と直交する軸まわりの角速度をフィードバックすることで、ニューテーション制御できることを示した。したがって、角速度の検出が必要となるが、多くのスピン衛星において、角速度をジャイロなどで直接検出するのではなく、加速度計によりスピン軸から半径方向にオフセットした位置におけるスピン軸平行方向の加速度を検出し、これをフィードバック信号として用いている。これは、ニューテーション運動で生じる角速度と加速度の波形は、同周期の位相のずれた波として関係づけられる力学的特性を利用するものである。本節では、この関係式を示す。

4.1.1 節では、非軸対称剛体の回転運動は式(4.1.8)で定式化され、一般解は式(4.1.14)となることを述べた。ここで、加速度計の取付位置を r 、取付位置における加速度を a とすると

$$a = \left\{ \frac{d^2 r}{dt^2} \right\} = \ddot{\omega} r + \tilde{\omega} \tilde{\omega} r \quad (4.3.7)$$

の関係が成り立つ。式(4.3.7)より、加速度計の感度方向として、 a のスピン軸方向成分を取り出すと、次のようになる。

$$\begin{aligned} a_3 &= -\dot{\omega}_2 r_1 + \dot{\omega}_1 r_2 + \omega_2 \omega_3 r_2 + \omega_3 \omega_1 r_1 - \omega_2^2 r_3 - \omega_1^2 r_3 \\ &= -\lambda_2 \omega_1 r_1 - \lambda_1 \omega_2 r_2 + \omega_2 \omega_3 r_2 + \omega_3 \omega_1 r_1 - \omega_2^2 r_3 - \omega_1^2 r_3 \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

$\omega_3 \gg \omega_1, \omega_2$ を仮定し、2 次以上の微小項を無視すると、式(4.3.8)は次のように近似できる。

$$a_3 \approx (\bar{\omega}_3 - \lambda_2) r_1 \omega_1 + (\bar{\omega}_3 - \lambda_1) r_2 \omega_2 \quad (4.3.9)$$

式(4.3.9)より、加速度計出力と角速度計出力は同期することがわかる。したがって、角速度と加速度計出力との位相の差を考慮したタイミングでフィードバック制御を行うことで、ニューテーションを減衰することが可能となる。

また、つばさでは、位相が 180 度ずれた位置にそれぞれ加速度計を搭載し、これらの出力の差をとることによって、加速度検出の感度を 2 倍に高め、ニューテーション制御精度を高めている。

第5章 3軸姿勢制御衛星の力学と制御

本章では、5.1節から5.3節で3軸姿勢制御の基礎としてホイールを利用した姿勢制御方式について扱う。また、5.4節では重力傾斜トルクを利用した受動的な姿勢安定方式を扱う。

5.1 ホイールを搭載した衛星の姿勢運動

衛星の3軸姿勢制御方式は、バイアスモーメント方式とゼロモーメント方式に大別できる。バイアスモーメント方式では、ピッチ軸のホイールに大きな角運動量（バイアスモーメント）を持たせ、ピッチ軸はそのホイールで制御し、ロール軸とヨー軸はバイアスモーメントによるジャイロ剛性で基本的には安定化される。ゼロモーメント方式では、比較的小さなホイールを衛星の3軸に配置し、それぞれ独立に制御される。

姿勢運動のモデルと座標系の定義

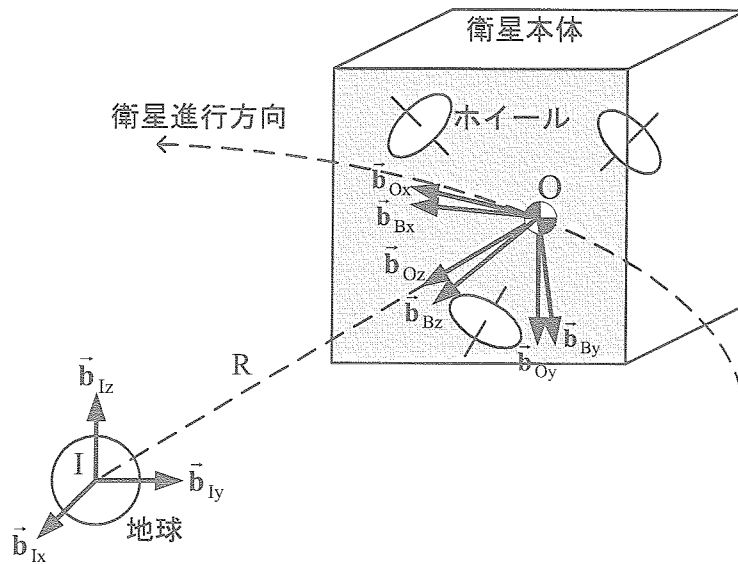


図 5.1.1 ホイールを搭載した衛星モデル

図5.1.1のように地球周回軌道をまわる衛星にホイールが搭載されているモデルを考える。ここでは、衛星が円軌道に沿って地球指向しながら軌道運動している（図5.1.1の色塗りの面を常に地球に向けようとしながら軌道運動している）とする。衛星の質量中心位置に基準座標系 $\{\bar{b}_O\}$ の原点 O をとり、軌道面内での衛星の速度ベクトルの方向を \bar{b}_{Ox} 軸、軌道面の逆法線方向を \bar{b}_{Oy} 軸、地心方向を \bar{b}_{Oz} 軸とする。この基準座標系は局所垂直水平座標系（LVLH : Local Vertical Local Horizontal frame）とも呼ばれる。一方、原点 O に固定された衛星固定座標系 $\{\bar{b}_B\}$ は、 \bar{b}_{Bx} をロール軸（roll axis）、 \bar{b}_{By} をピッチ軸（pitch axis）、 \bar{b}_{Bz} をヨー軸（yaw axis）と定義する。衛星の姿勢運動は、 $\{\bar{b}_O\}$ 系に対する $\{\bar{b}_B\}$ 系の傾き（オイラー角）として表される。 $\{\bar{b}_O\}$ 系をオイラー角 ψ, θ, ϕ の順に傾けると $\{\bar{b}_B\}$ 系に一致するとき、その変換は以下のように表される。

$$\{\bar{b}_B\} = C^1(\phi) \cdot C^2(\theta) \cdot C^3(\psi) \cdot \{\bar{b}_O\} \equiv C_B^O(\phi, \theta, \psi) \cdot \{\bar{b}_O\} \quad (5.1.1)$$

ただし、 C_B^O は $\{\bar{b}_O\}$ 系から $\{\bar{b}_B\}$ 系への座標変換を表す方向余弦行列であり、ここでは3-2-1のオイラー変換を用いた。 ϕ をロール角（roll angle）、 θ をピッチ角（pitch angle）、 ψ をヨー角（yaw angle）と呼び衛星の姿勢角を定義する。一般に、衛星の姿勢制御はこれらの

姿勢角（誤差）を定められた範囲内にするように実施される。

ホイールを搭載した衛星の運動方程式

ここでは剛体の回転運動に注目し、ホイールなどの角運動量を内部に保有した衛星の姿勢運動の方程式を示す。地球中心を原点 I とする慣性座標系 $\{\bar{\mathbf{b}}_I\}$ に対する衛星全体（衛星本体+ホイール）の角運動量ベクトル $\bar{\mathbf{H}}$ は、ホイールが回転していないときの衛星の角運動量ベクトル $\bar{\mathbf{H}}_B$ 、衛星に対するホイールの角運動量ベクトル $\bar{\mathbf{H}}_W$ を用いて、以下のように表される。

$$\bar{\mathbf{H}} = \bar{\mathbf{H}}_B + \bar{\mathbf{H}}_W \quad (5.1.2)$$

式 (5.1.2) を $\{\bar{\mathbf{b}}_I\}$ 系に関して時間微分することにより、衛星姿勢の運動方程式（オイラーの方程式）は以下のように表せる。

$$\begin{aligned} \left(\dot{\bar{\mathbf{H}}} \right)_I &= \left(\dot{\bar{\mathbf{H}}} \right)_B + \bar{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\mathbf{H}} = \left(\dot{\bar{\mathbf{H}}}_B + \dot{\bar{\mathbf{H}}}_W \right)_B + \bar{\boldsymbol{\omega}} \times (\bar{\mathbf{H}}_B + \bar{\mathbf{H}}_W) \\ &= \bar{\boldsymbol{\tau}}_{EXT} \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

ただし、 $\left(\dot{\bar{\mathbf{H}}} \right)_B$ は $\{\bar{\mathbf{b}}_B\}$ 系における時間微分を表す。 $\bar{\boldsymbol{\omega}} = \{\bar{\mathbf{b}}_B\}^T \boldsymbol{\omega}$ は慣性空間に対する衛星全体の角速度、 $\bar{\boldsymbol{\tau}}_{EXT} = \{\bar{\mathbf{b}}_B\}^T \boldsymbol{\tau}_{EXT}$ は衛星に作用する自然外乱トルクおよびスラスト噴射などによる姿勢制御トルクなどの和を表す。 $\{\bar{\mathbf{b}}_B\}$ 系を衛星の慣性主軸に一致するようにとり、ロール軸・ピッチ軸・ヨー軸まわりの慣性モーメントをそれぞれ I_x, I_y, I_z とすると、衛星の角運動量ベクトル $\bar{\mathbf{H}}_B$ は以下のように表される。

$$\bar{\mathbf{H}}_B = \{\bar{\mathbf{b}}_B\}^T \begin{bmatrix} H_{Bx} \\ H_{By} \\ H_{Bz} \end{bmatrix} = \{\bar{\mathbf{b}}_B\}^T \begin{bmatrix} I_x \omega_x \\ I_y \omega_y \\ I_z \omega_z \end{bmatrix} = \{\bar{\mathbf{b}}_B\}^T \mathbf{I}_B \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (5.1.4)$$

また、衛星に対するホイールの角運動量ベクトル $\bar{\mathbf{H}}_W$ が $\{\bar{\mathbf{b}}_B\}$ 系について表されるとき、

$$\bar{\mathbf{H}}_W = \{\bar{\mathbf{b}}_B\}^T \begin{bmatrix} H_{Wx} \\ H_{Wy} \\ H_{Wz} \end{bmatrix} = \{\bar{\mathbf{b}}_B\}^T \mathbf{H}_W \quad (5.1.5)$$

式 (5.1.4) (5.1.5) をオイラーの方程式 (5.1.3) に代入すると、ホイールを搭載した衛星の運動方程式は $\{\bar{\mathbf{b}}_B\}$ 系で以下のように行列表示できる。

$$\mathbf{I}_B \dot{\boldsymbol{\omega}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{I}_B \boldsymbol{\omega} + \dot{\mathbf{H}}_W + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{H}_W = \boldsymbol{\tau}_{EXT} \quad (5.1.6)$$

したがって、ホイールを搭載した衛星の運動方程式は衛星単体（単一剛体）の運動方程式にホイールが寄与する項 $\dot{\mathbf{H}}_W + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{H}_W$ を追加した形として表される。ホイールは回転軸まわりの回転数（角運動量）を変化させることにより発生するトルク $\dot{\mathbf{H}}_W$ とともに、ホイールの回転軸に直交する軸まわりにジャイロトルク $\tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{H}_W$ を衛星に与えていることが分かる。ホイールが発生するこれらのトルクを $-\boldsymbol{\tau}_W$ とおくと、衛星の姿勢運動とホイールの運動方程式は、それぞれ以下のように表せる。

$$\mathbf{I}_B \dot{\boldsymbol{\omega}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{I}_B \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\tau}_W + \boldsymbol{\tau}_{EXT} \quad (5.1.7)$$

右辺第1項のトルク $\boldsymbol{\tau}_W$ は衛星全体（衛星本体+ホイール）の角運動量を変化させないが、第2項のトルク $\boldsymbol{\tau}_{EXT}$ は衛星全体の角運動量を変化させるため、 $\boldsymbol{\tau}_W$ を内部トルク、 $\boldsymbol{\tau}_{EXT}$ を外部（外乱）トルクと呼び区別する場合がある。また、内部トルクを発生するホイールなどを内力アクチュエータ、外部トルクを発生するスラストなどを外力アクチュエータと呼ぶ。運動方程式 (5.1.6) を式 (5.1.4) (5.1.5) を用いてさらに各軸ごとに成分表示すると、

以下のようになる.

$$\begin{bmatrix} I_x \dot{\omega}_x \\ I_y \dot{\omega}_y \\ I_z \dot{\omega}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_y I_z \omega_z - \omega_z I_y \omega_y \\ \omega_z I_x \omega_x - \omega_x I_z \omega_z \\ \omega_x I_y \omega_y - \omega_y I_x \omega_x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{H}_{Wx} \\ \dot{H}_{Wy} \\ \dot{H}_{Wz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_y H_{Wz} - \omega_z H_{Wy} \\ \omega_z H_{Wx} - \omega_x H_{Wz} \\ \omega_x H_{Wy} - \omega_y H_{Wx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{EXTx} \\ \tau_{EXTy} \\ \tau_{EXTz} \end{bmatrix} \quad (5.1.8)$$

以上で、ホイールを搭載した衛星の運動方程式が導かれた.

運動方程式の線形化

運動方程式 (5.1.8) は非線形であるが、姿勢制御系の安定性や設計検討をするためには線形化しておくことと便利である. ここでは、衛星の姿勢変動が微小であるとして、線形化された運動方程式を導く.

地球周回軌道上にある衛星の全角速度ベクトル (絶対角速度) $\vec{\omega}$ は、 $\{\vec{b}_I\}$ 系に対する $\{\vec{b}_O\}$ 系の角速度ベクトル $\vec{\omega}_{OI}$ (軌道角速度) と、 $\{\vec{b}_O\}$ 系に対する $\{\vec{b}_B\}$ 系の角速度ベクトル $\vec{\omega}_{BO}$ (機体角速度) の和で表される (角速度の連鎖法則).

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_{OI} + \vec{\omega}_{BO} \quad (5.1.9)$$

$\{\vec{b}_O\}$ 系に対する $\{\vec{b}_B\}$ 系の姿勢変動が微小 (衛星は定常制御状態にあり $\varphi, \theta, \psi \approx 0$ と仮定) のとき、方向余弦行列 (5.1.1) と機体角速度 $\vec{\omega}_{BO}$ は以下のように近似できる [5.1].

$$C_B^O \approx \begin{bmatrix} 1 & \psi & -\theta \\ -\psi & 1 & \varphi \\ \theta & -\varphi & 1 \end{bmatrix} \quad (5.1.10-a)$$

$$\vec{\omega}_{BO} = \{\vec{b}_B\}^T \begin{bmatrix} \omega_{Bx} \\ \omega_{By} \\ \omega_{Bz} \end{bmatrix} \approx \{\vec{b}_B\}^T \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (5.1.10-b)$$

また、地球周回軌道を軌道半径 R の円軌道、地心重力定数を μ とすると、軌道角速度の大きさは $\omega_0 = \sqrt{\mu/R^3}$ であるので $\vec{\omega}_{OI}$ は $\{\vec{b}_O\}$ 系で以下のように表せる.

$$\vec{\omega}_{OI} = \{\vec{b}_O\}^T \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \{\vec{b}_O\}^T \begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{\mu/R^3} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.1.11)$$

したがって、式 (5.1.9) に式 (5.1.10) (5.1.11) を代入すれば衛星の絶対角速度 $\vec{\omega}$ は以下のように成分表示される.

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \{\vec{b}_B\}^T \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \{\vec{b}_O\}^T \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega_0 \\ 0 \end{bmatrix} + \{\vec{b}_B\}^T \begin{bmatrix} \omega_{Bx} \\ \omega_{By} \\ \omega_{Bz} \end{bmatrix} \approx \{\vec{b}_B\}^T \left(\begin{bmatrix} 1 & \psi & -\theta \\ -\psi & 1 & \varphi \\ \theta & -\varphi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega_0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \right) \\ &= \{\vec{b}_B\}^T \begin{bmatrix} \dot{\varphi} - \omega_0 \psi \\ \dot{\theta} - \omega_0 \\ \dot{\psi} + \omega_0 \varphi \end{bmatrix} \quad (5.1.12) \end{aligned}$$

次に、内力アクチュエータとしてモーメントホイールやリアクションホイールを搭載した一般的な衛星を考える. ピッチ軸まわりのホイール角運動量 H_{Wy} をバイアス成分 h_{wb} (一定値) と変動成分 h_{wy} , ロール軸・ヨー軸まわりのホイール角運動量 H_{Wx}, H_{Wz} を変動成分 h_{wx}, h_{wz} で定義すると、式 (5.1.5) は以下のように表される.

$$\bar{\mathbf{H}}_W = \{\bar{\mathbf{b}}_B\}^T \begin{bmatrix} H_{Wx} \\ H_{Wy} \\ H_{Wz} \end{bmatrix} = \{\bar{\mathbf{b}}_B\}^T \begin{bmatrix} h_{Wx} \\ h_{Wb} + h_{Wy} \\ h_{Wz} \end{bmatrix} \quad (5.1.13)$$

一般には、ホイール故障に対する冗長化などを考慮してホイールをスキュー配置することが多いが、ここでは式 (5.1.13) のように各ホイールの角運動量が 3 軸に配分されているとする。

また、5.4 節の説明のため、外乱トルク $\bar{\boldsymbol{\tau}}_{\text{EXT}}$ を重力傾斜トルク $\bar{\boldsymbol{\tau}}_{\text{GG}}$ とその他の外乱トルク $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ に分けて表しておく ($\bar{\boldsymbol{\tau}}_{\text{EXT}} = \bar{\boldsymbol{\tau}}_{\text{GG}} + \bar{\boldsymbol{\tau}}$)。重力傾斜トルクは、衛星上のそれぞれの位置と地球中心からの距離が異なることから、作用する重力に差が生じることにより発生する。 $\{\bar{\mathbf{b}}_B\}$ 系が慣性主軸に一致していることおよび姿勢変化が微小 ($\varphi, \theta, \psi \approx 0$) であることから、ロール角 φ とピッチ角 θ に比例したトルクとして以下のように表せる^[5.1]。

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}_{\text{GG}} \approx \{\bar{\mathbf{b}}_B\}^T \begin{bmatrix} -3\omega_0^2 (I_y - I_z) \varphi \\ -3\omega_0^2 (I_x - I_z) \theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.1.14)$$

以上より、式 (5.1.12) (5.1.13) (5.1.14) を運動方程式 (5.1.8) に代入し、 $\varphi, \theta, \psi, \dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$ および h_{Wx}, h_{Wy}, h_{Wz} は微小量であるとしてこれらの 2 乗項を無視すると、以下の線形化された運動方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I_x \ddot{\varphi} \\ I_y \ddot{\theta} \\ I_z \ddot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_0^2 (I_y - I_z) \varphi \\ 0 \\ \omega_0^2 (I_y - I_x) \psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_0 (I_y - I_z - I_x) \dot{\psi} \\ 0 \\ \omega_0 (I_z + I_x - I_y) \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(h_{Wb} \dot{\psi} + \omega_0 h_{Wb} \varphi) \\ 0 \\ h_{Wb} \dot{\varphi} - \omega_0 h_{Wb} \psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{h}_{Wx} - \omega_0 h_{Wz} \\ \dot{h}_{Wy} \\ \dot{h}_{Wz} + \omega_0 h_{Wx} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} -3\omega_0^2 (I_y - I_z) \varphi \\ -3\omega_0^2 (I_x - I_z) \theta \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.1.15\text{-a})$$

式 (5.1.15-a) が、 $\{\bar{\mathbf{b}}_O\}$ 系を基準とした衛星の姿勢変動を表す運動方程式であり、3 軸姿勢制御されていて姿勢変動が少ない場合の衛星のダイナミクスを表す。ただし、左辺第 1 項は慣性トルク、第 2 項は軌道運動で発生する遠心力によるトルク、第 3 項は軌道運動で発生するカップリングトルク、第 4 項はホイールのバイアス角運動量 h_{Wb} により発生する姿勢制御トルク、第 5 項はホイールの角運動量変動成分 h_{Wx}, h_{Wy}, h_{Wz} により発生する姿勢制御トルクを表す。一般に、軌道高度が高くなると ω_0 を含む項は小さくなる。

運動方程式 (5.1.15-a) は衛星の軌道運動 ($\{\bar{\mathbf{b}}_I\}$ 系に対する $\{\bar{\mathbf{b}}_O\}$ 系の回転運動) を含んだ式であるが、簡単化のため、軌道運動により発生する項 (ω_0 を含む項) を無視すると、以下のように衛星の姿勢変動 ($\{\bar{\mathbf{b}}_O\}$ 系に対する $\{\bar{\mathbf{b}}_B\}$ 系の変動) のみ考慮した運動方程式が得られる。

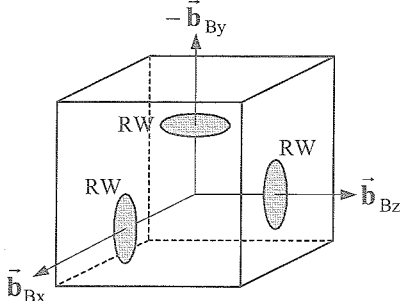
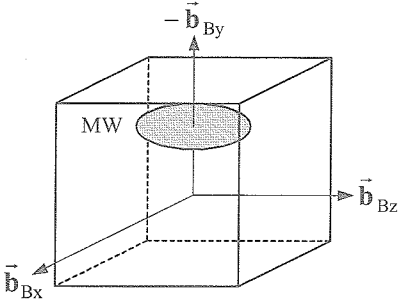
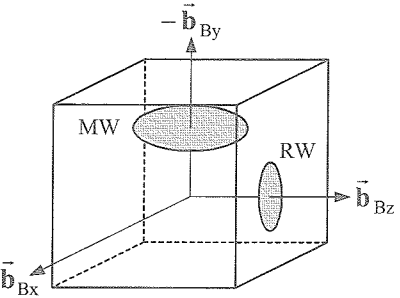
$$\begin{bmatrix} I_x \ddot{\varphi} \\ I_y \ddot{\theta} \\ I_z \ddot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -h_{Wb} \dot{\psi} \\ 0 \\ h_{Wb} \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{h}_{Wx} \\ \dot{h}_{Wy} \\ \dot{h}_{Wz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} \quad (5.1.15\text{-b})$$

式 (5.1.15) から、ロール軸とヨー軸はカップリングしているが、ピッチ軸はロール軸およびヨー軸とはカップリングしていないことが分かる。

5.2 3 軸姿勢制御方式の分類と特徴

本節では、線形化された衛星姿勢の運動方程式 (5.1.15) からそれぞれの姿勢制御方式（ゼロモーメント方式およびバイアスモーメント方式）における特徴を説明する．表 5.2.1 に 3 軸姿勢制御方式とホイール配置の分類を示す．

表 5.2.1 3 軸姿勢制御方式とホイール配置の分類

| 姿勢制御方式 | ホイール配置の例 | 特徴 |
|------------------------|--|--|
| (a) ゼロモーメント方式 | <ul style="list-style-type: none">・ 3 RW (角運動量自由度 3)・ ダイナミクス特性：式 (5.2.1)  | <ul style="list-style-type: none">・ 各軸に RW を配置.・ 各軸の姿勢制御は各軸の RW の回転数を増減することで独立に行われる.・ 各軸の姿勢検出が必要.・ 一般に (b) (c) よりも姿勢制御精度は高い. |
| (b) バイアスモーメント方式 | <ul style="list-style-type: none">・ 1 MW (角運動量自由度 1)・ ダイナミクス特性：式 (5.2.2)  | <ul style="list-style-type: none">・ ピッチ軸に MW を配置.・ ピッチ軸の姿勢制御は MW の回転数を増減することによって行われる. ピッチ軸はロール軸およびヨー軸とは独立に扱える.・ ロール軸とヨー軸は MW によるジャイロ剛性で安定化.・ ロール軸とヨー軸の姿勢変動は短周期振動 (ニューテーション運動) と長周期振動 (軌道運動) が重ね合わさった振動.・ ヨー軸の姿勢検出は不要.・ 一般に姿勢制御精度は低い. |
| (c) コントロール・バイアスモーメント方式 | <ul style="list-style-type: none">・ 1 MW + 1 RW (角運動量自由度 2)・ ダイナミクス特性：式 (5.2.3)  | <ul style="list-style-type: none">・ ピッチ軸に MW, ロール軸あるいはヨー軸に RW を配置.・ ピッチ軸の姿勢制御は MW の回転数を増減することによって行われる. ピッチ軸はロール軸およびヨー軸とは独立に扱える.・ ロール軸とヨー軸は MW によるジャイロ剛性で安定化されるとともに, RW で制御される.・ ロール軸とヨー軸のカップリングを利用して短周期振動 (ニューテーション運動) と長周期振動 (軌道運動) を減衰させることが可能.・ ヨー軸の姿勢検出は不要.・ 一般に姿勢制御精度は (b) より高い. |

5.2.1 ゼロモーメント方式

ロール軸・ピッチ軸・ヨー軸の角運動量を能動的に変化させる ($h_{wx}, h_{wy}, h_{wz} \neq 0$) リアクションホイールを配置した衛星を考える. 運動方程式 (5.1.15-a) でピッチ軸まわりのバイアス角運動量がない ($h_{wb} = 0$) ので, リアクションホイールを 3 軸に配置した (3 RW) 衛星の運動方程式は, 以下のようになる.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I_x \ddot{\phi} \\ I_y \ddot{\theta} \\ I_z \ddot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_0^2 (I_y - I_z) \phi \\ 0 \\ \omega_0^2 (I_y - I_x) \psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_0 (I_y - I_z - I_x) \dot{\psi} \\ 0 \\ \omega_0 (I_z + I_x - I_y) \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{h}_{wx} - \omega_0 h_{wz} \\ \dot{h}_{wy} \\ \dot{h}_{wz} + \omega_0 h_{wx} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} -3\omega_0^2 (I_y - I_z) \phi \\ -3\omega_0^2 (I_x - I_z) \theta \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.2.1-a)$$

さらに, 軌道運動を無視すると以下ようになる.

$$\begin{bmatrix} I_x \ddot{\phi} \\ I_y \ddot{\theta} \\ I_z \ddot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{h}_{wx} \\ \dot{h}_{wy} \\ \dot{h}_{wz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} \quad (5.2.1-b)$$

本方式は, ゼロモーメント方式 (zero momentum) と呼ばれる (表 5.2.1 (a)). ゼロモーメント方式の衛星では, リアクションホイールによりロール軸・ピッチ軸・ヨー軸まわりに相当する角運動量を変化させることにより姿勢制御トルク $\dot{h}_{wx}, \dot{h}_{wy}, \dot{h}_{wz}$ が作用し, 姿勢制御をしていることが分かる. リアクションホイールは, 次節のバイアスモーメント方式のように基本的にバイアス角運動量はなくゼロに近い状態で姿勢制御トルクを発生している (ゼロクロス避けるためバイアスを持たせることもある). そのため, ロール軸とヨー軸のカップリングが弱く各軸の姿勢運動がほぼ独立に扱えるが, 姿勢変動を独立に検出し, 制御する必要がある. また, バイアスモーメント方式のようにバイアス角運動量によるジャイロ剛性がないので姿勢の安定性は姿勢制御系に大きく依存するため, もし姿勢制御系の故障が発生した場合には姿勢喪失をしやすい. 一方で, ホイールを 3 軸まわりに配置しているので高精度な姿勢制御ができる.

5.2.2 バイアスモーメント方式

バイアスモーメント方式

ピッチ軸にバイアス角運動量を持つ ($h_{wb} \neq 0$) モーメントホイールを配置した衛星を考える. 運動方程式 (5.1.15-a) でロール軸とヨー軸の角運動量変動成分がない ($h_{wx} = h_{wz} = 0$) ので, モーメントホイールをピッチ軸に配置した (1 MW) 衛星の運動方程式は, 以下のようになる.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I_x \ddot{\phi} \\ I_y \ddot{\theta} \\ I_z \ddot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_0^2 (I_y - I_z) \phi \\ 0 \\ \omega_0^2 (I_y - I_x) \psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_0 (I_y - I_z - I_x) \dot{\psi} \\ 0 \\ \omega_0 (I_z + I_x - I_y) \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(h_{wb} \dot{\psi} + \omega_0 h_{wb} \phi) \\ 0 \\ h_{wb} \dot{\phi} - \omega_0 h_{wb} \psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{h}_{wy} \\ 0 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} -3\omega_0^2 (I_y - I_z) \phi \\ -3\omega_0^2 (I_x - I_z) \theta \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.2.2-a)$$

さらに, 軌道運動を無視すると以下ようになる.

$$\begin{bmatrix} I_x \ddot{\phi} \\ I_y \ddot{\theta} \\ I_z \ddot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -h_{wb} \dot{\psi} \\ 0 \\ h_{wb} \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{h}_{wy} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} \quad (5.2.2-b)$$

本方式は、バイアスモーメント方式 (bias momentum) と呼ばれる (表 5.2.1 (b)). バイアスモーメント方式の衛星では、ロール軸およびヨー軸にはバイアス角運動量 h_{wb} によるジャイロトルクが作用し、ピッチ軸にはモーメントホイールの角運動量変化によるトルク \dot{h}_{wy} が作用することにより、姿勢を制御していることが分かる. バイアスモーメント方式では、ロール軸とヨー軸の姿勢変動がバイアス角運動量 h_{wb} によって強くカップリングしており、ピッチ軸のバイアス角運動量によるジャイロ剛性 (h_{wb} が大きいと衛星全体の角運動量の方向がほとんど不変) を利用して比較的受動的な姿勢安定が可能である. 一方で、ホイールを1軸まわりにしか配置していないので姿勢制御精度は劣る. バイアスモーメント方式を以下のコントロールド・バイアスモーメント方式と区別する場合は、特にピュア・バイアスモーメント方式と呼ぶことがある.

コントロールド・バイアスモーメント方式

ここでは、例としてピッチ軸にバイアス角運動量を持つ ($h_{wb} \neq 0$) モーメントホイールを、ヨー軸にのみリアクションホイールを配置した ($h_{wx} = 0$) 衛星を考える. 運動方程式 (5.1.15-a) でロール軸の角運動量変動成分がない ($h_{wx} = 0$) ので、ピッチ軸にモーメントホイールを、ヨー軸にリアクションホイールを配置した (1 MW + 1 RW) 衛星の運動方程式は、以下のようになる.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I_x \ddot{\phi} \\ I_y \ddot{\theta} \\ I_z \ddot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_0^2 (I_y - I_z) \phi \\ 0 \\ \omega_0^2 (I_y - I_x) \psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_0 (I_y - I_z - I_x) \dot{\psi} \\ 0 \\ \omega_0 (I_z + I_x - I_y) \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(h_{wb} \dot{\psi} + \omega_0 h_{wb} \phi) \\ 0 \\ h_{wb} \dot{\phi} - \omega_0 h_{wb} \psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\omega_0 h_{wz} \\ \dot{h}_{wy} \\ \dot{h}_{wz} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} -3\omega_0^2 (I_y - I_z) \phi \\ -3\omega_0^2 (I_x - I_z) \theta \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.2.3-a)$$

さらに、軌道運動を無視すると以下のようになる.

$$\begin{bmatrix} I_x \ddot{\phi} \\ I_y \ddot{\theta} \\ I_z \ddot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -h_{wb} \dot{\psi} \\ 0 \\ h_{wb} \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{h}_{wy} \\ \dot{h}_{wz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} \quad (5.2.3-b)$$

一般に、バイアスモーメント方式の中で、ロール軸あるいはヨー軸にリアクションホイールを追加した方式をコントロールド・バイアスモーメント方式 (controlled bias momentum) と呼ぶ (表 5.2.1 (c)). コントロールド・バイアスモーメント方式では、ロール軸とヨー軸の姿勢変動がバイアス角運動量 h_{wb} によって強くカップリングしていることを利用することで、ロール軸およびヨー軸ともにリアクションホイールで能動的に制御可能となる. 式 (5.2.3) の場合、ロール軸はヨー軸に取り付けられたリアクションホイールによって間接的に制御される. ホイールを配置する自由度が増えたのでピュア・バイアスモーメント方式に比べて姿勢制御精度は高い.

5.3 各姿勢制御方式の制御特性

本節では、各姿勢制御方式に対するダイナミクス・制御特性を簡単に説明する.

5.3.1 ゼロモーメント方式の制御特性

ゼロモーメント方式 (5.2.1-b) において、ピッチ軸の運動方程式は以下のようであった。

$$I_y \ddot{\theta} + \dot{h}_{wy} = \tau_y \quad (5.3.1)$$

ゼロモーメント方式では、ロール軸とヨー軸も一般に式 (5.3.1) のように表された。また、バイアスモーメント方式においてもピッチ軸の姿勢運動は、線形化された運動方程式 (5.2.2-b) (5.2.3-b) で考えれば、ロール軸とヨー軸とのカップリングがなく各姿勢制御方式とも同一の運動方程式で表された。したがって、各姿勢制御方式にかかわらずピッチ制御系の設計は同一の考え方が可能となる。そこで、まず式 (5.3.1) を基に姿勢制御系設計について簡単に説明する。

伝達関数

ピッチ制御系のブロック線図を図 5.3.1 に示す。姿勢制御系 (ACS : Attitude Control System) は、衛星姿勢角を姿勢センサで検出し制御器を介してアクチュエータ (ホイール) を駆動する。運動方程式 (5.3.1) における衛星ダイナミクスは剛体の回転運動のみであるので、伝達関数 $P(s)$ は、

$$P(s) = \frac{1}{I_y s^2} \quad (5.3.2)$$

式 (5.3.2) では、衛星ダイナミクス自体にダンピング要素はなく外乱トルクが加われば剛体モード ($s=0$) で姿勢が変化する。一方、運動方程式 (5.3.1) から姿勢制御のために入力できるのはホイールの角運動量変化 \dot{h}_{wy} のみである。そこで、所望の姿勢変動となるようなホイールへの入力信号を制御器で設定しなければならない。ホイールは以下のように簡単な PD 制御則により駆動されるとすると、制御器 $C(s)$ は、

$$C(s) = k_d s + k_p \quad (5.3.3)$$

ただし、 k_p は比例ゲイン、 k_d は微分ゲインを表す。これらのゲインを適当に選ぶことにより、所望の姿勢制御系を構成できる (本来の制御器は積分フィルタや柔構造特性を考慮した各種フィルタなどを含んでいるが、ここでは簡略化し PD 制御則のみとする)。ここでは、定常制御時 (衛星に作用する外乱トルクに対して、姿勢変動を常に定められた姿勢制御精度以内に抑える) を考えるため、外乱トルク τ_y から姿勢角 θ への閉ループ伝達関数を表すと、以下のように 2 次の標準形になる。

$$\begin{aligned} \frac{\theta(s)}{\tau_y(s)} &= \frac{P(s)}{1 + P(s)C(s)} \\ &= \frac{1}{I_y s^2 + k_d s + k_p} = \frac{1}{I_y (s^2 + 2\xi_p \Omega_p s + \Omega_p^2)} = \frac{\Omega_p^2}{k_p (s^2 + 2\xi_p \Omega_p s + \Omega_p^2)} \end{aligned} \quad (5.3.4)$$

ただし、 Ω_p は固有角振動数、 ξ_p は減衰比を表し、

$$\Omega_p = \sqrt{\frac{k_p}{I_y}}, \quad \xi_p = \frac{k_d}{2I_y \Omega_p} \quad (5.3.5)$$

とおいた。式 (5.3.4) のようにダンピング要素が含まれ剛体モードが安定化される。ここで、姿勢変動の過渡振動を抑えた姿勢制御系を構成することを考えると、クリティカルダンピング ($\xi_p = 1$) に設定すればいいので、外乱トルク τ_y に対するピッチ角 θ への伝達関数は以下のようになる。

$$\theta(s) = \frac{\Omega_p^2}{k_p (s + \Omega_p)^2} \tau_y(s) \quad (5.3.6)$$

また、ホイールの制御則 (5.3.3) をラプラス変換し (5.3.6) を代入すると、外乱トルク τ_y に対するホイール角運動量 h_{wy} の伝達関数は以下のように表せる。

$$h_{wy}(s) = \frac{k_d s + k_p}{s} \cdot \theta(s) = \frac{k_d s + k_p}{s} \cdot \frac{\Omega_p^2}{k_p (s + \Omega_p)^2} \cdot \tau_y(s) \quad (5.3.7)$$

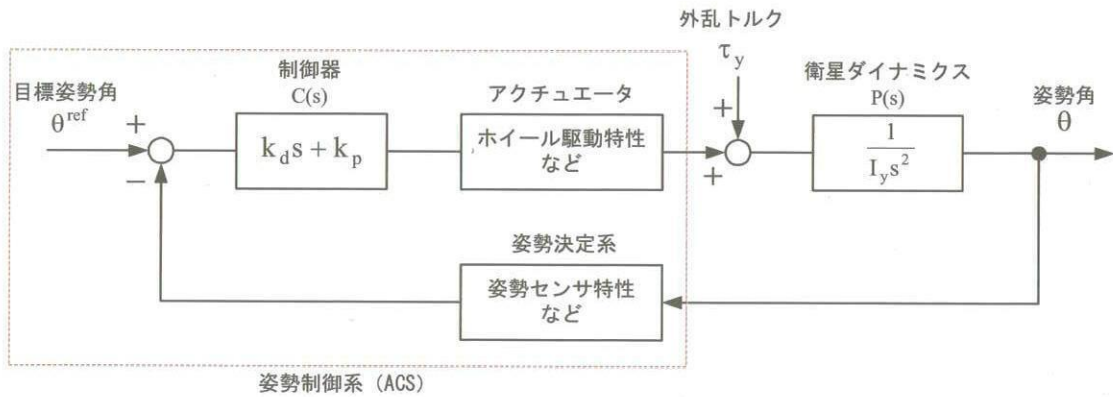


図 5.3.1 ピッチ制御系のブロック線図

外乱トルクに対する衛星姿勢とホイールの定常応答

一般には、衛星に作用する外乱トルクは外乱の種類、軌道高度、衛星の形状、姿勢角などによって異なるが、以下では、一定の外乱トルクが衛星に作用し続ける場合について衛星姿勢とホイールの定常応答を考える。大きさ τ_y のステップ状外乱トルクのラプラス変換値

$$\tau_y(s) = \frac{\tau_y}{s} \quad (5.3.8)$$

を式 (5.3.6)・(5.3.7) に代入して最終値の定理を適用すると、

$$\theta^s = \lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \theta(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\Omega_p^2}{k_p (s + \Omega_p)^2} \cdot \frac{\tau_y}{s} = \frac{\tau_y}{k_p} = \frac{\tau_y}{I_y \Omega_p^2} \quad (5.3.9-a)$$

$$h_{wy}^s = \lim_{t \rightarrow \infty} h_{wy}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s h_{wy}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{k_d s + k_p}{s} \cdot \frac{\Omega_p^2}{k_p (s + \Omega_p)^2} \cdot \frac{\tau_y}{s} \right) = \infty \quad (5.3.9-b)$$

したがって、定常状態におけるピッチ角の姿勢誤差 θ^s は外乱トルク τ_y の大きさに比例し、比例ゲイン k_p （または衛星の慣性モーメント I_y ，固有角振動数 Ω_p の 2 乗）の大きさに反比例する。比例ゲインを大きな値に設定すれば定常姿勢誤差を小さくすることができる。

以上の定常応答の結果を利用して、定常姿勢誤差 θ^s を姿勢制御精度 θ^{\lim} 以内に抑えるような姿勢制御系を設計することを考えると、必要な比例ゲイン k_p の大きさは式 (5.3.9-a) から以下のように決定できる。

$$k_p \geq \frac{|\tau_y|}{|\theta^{\lim}|} \quad (5.3.10)$$

すなわち、外乱トルクの大きさが分かればよい。一方、制御則 (5.3.3) の微分ゲインは、式 (5.3.5) から減衰比 ξ_p を適当に設定することにより決定できる。

また、一定の外乱トルクが衛星に作用し続けると、ホイールはそれを吸収するための姿勢制御トルクを発生し続けなければならないため、式 (5.3.9-b) のようにホイールの角運動量 (回転数) は増大し続けることになる。しかし、ホイールが発生できる角運動量には上限があるため、限界に達した角運動量を低減させるような操作をしなければならない。ホイール角運動量を低減させる方向に一時的に外部トルクを加えると、姿勢制御系がその外乱トルクに反応してホイール回転数を低下させることができる。この操作をホイールのアンローディング (unloading) という。衛星に加える外部トルクとしてはスラスタによる方法や地磁気を利用した方法などがある。なお、アンローディングはモーメンタムホイールとリアクションホイールともに必要な操作である。

【例題 5-1】 ゼロモーメンタム方式における姿勢応答

表 5.3.1 のようなパラメータが与えられているとする。衛星にステップ状外乱トルク τ_y が作用したときに発生する定常姿勢誤差を姿勢制御精度 θ^{lim} 以内に抑えるような姿勢制御系を設計し、衛星姿勢とホイールの応答を評価する。

式 (5.3.10) から、定常姿勢誤差がちょうど姿勢制御精度 θ^{lim} となるのに必要な比例ゲイン k_p を以下のように設定する。

$$k_p = \frac{|\tau_y|}{|\theta^{\text{lim}}|} = 0.2865 \text{ Nm/rad} \quad (5.3.11)$$

減衰比を $\xi_p = 1$ とすると、式 (5.3.5) から微分ゲイン k_d は、以下ようになる。

$$k_d = 2\sqrt{I_y k_p} = 33.85 \text{ Nms/rad} \quad (5.3.12)$$

以上の制御系パラメータ k_p, k_d を用いて衛星姿勢とホイールの応答を計算した結果を図 5.3.2 に示す。各図は、(a) ステップ状外乱トルク、(b) ピッチ角、(c) ピッチ角速度、(d) ホイールによる姿勢制御トルク、(e) ホイール角運動量を表す。定常姿勢誤差は姿勢制御精度 $\pm 0.01 \text{ deg}$ 以内に抑えられているが、ホイールは定常状態で外乱トルクと同じ大きさの姿勢制御トルク τ_y を発生し、ホイール角運動量は増大し続けている。

表 5.3.1 ピッチ軸のパラメータ

| パラメータ | 記号 [単位] | 値 |
|---------|-----------------------------|----------------------|
| 慣性モーメント | I_y [kgm ²] | 1000 |
| 姿勢制御精度 | θ^{lim} [deg] | ± 0.01 |
| 減衰比 | ξ_p [—] | 1 |
| 外乱トルク | τ_y [Nm] | 5.0×10^{-5} |

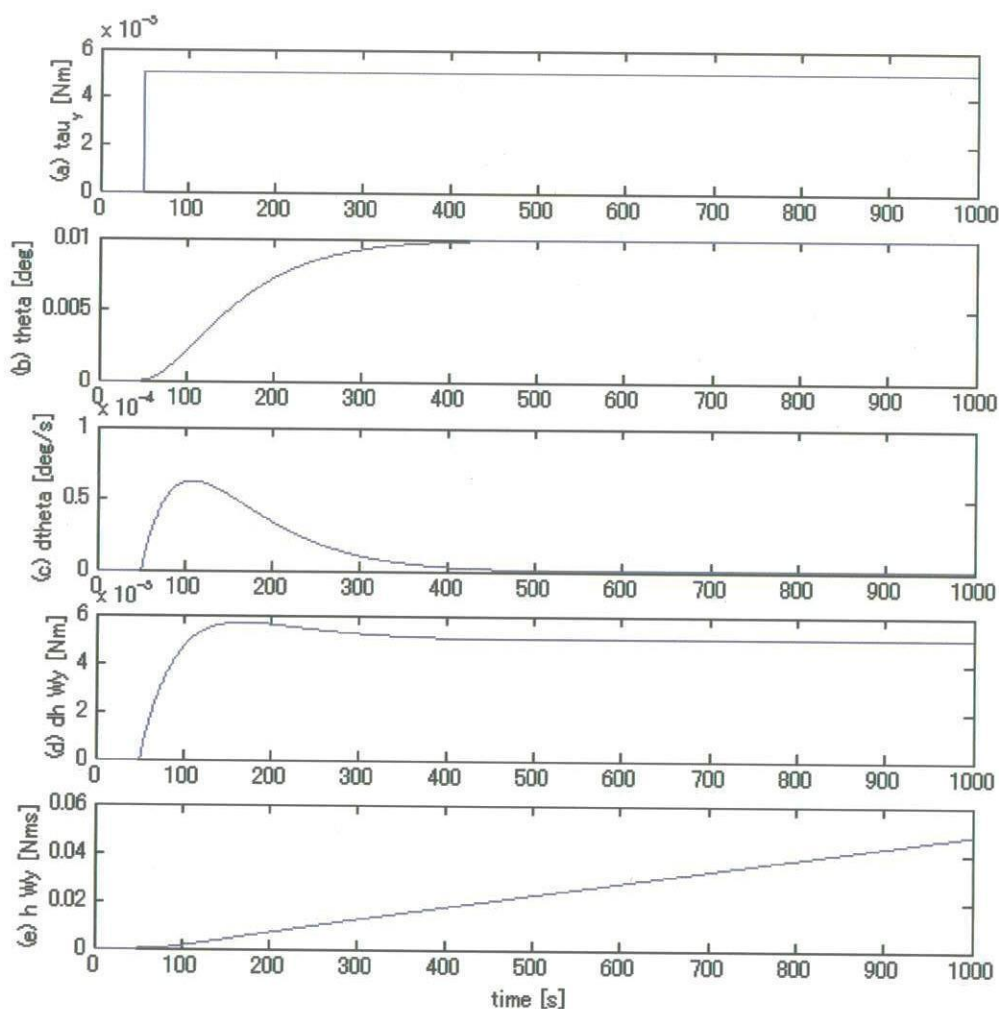


図 5.3.2 ピッチ軸の姿勢応答（ゼロモーメントム方式）

5.3.2 バイアスモーメントム方式の制御特性

次に、バイアスモーメントム方式においてロール軸とヨー軸のダイナミクス・制御特性に注目する。

軌道運動を無視した場合のロール軸・ヨー軸まわりの伝達関数

まず、軌道運動を無視した場合について姿勢運動の特徴を説明する。バイアスモーメントム方式においてロール軸・ヨー軸の運動方程式 (5.2.2-b) は、以下のものであった。

$$I_x \ddot{\phi} - h_{wb} \dot{\psi} = \tau_x \quad (5.3.13-a)$$

$$I_z \ddot{\psi} + h_{wb} \dot{\phi} = \tau_z \quad (5.3.13-b)$$

(i) 軸対称衛星の場合

運動方程式 (5.3.13) において、仮に衛星が軸対称 ($I_x = I_z \equiv I_T$) で、ホイールのスピン軸まわりの慣性モーメントを I_w 、角速度を σ_w とおくと、ホイール角運動量 $h_{wb} = I_w \sigma_w$ であるので、外乱トルク τ_x, τ_z に対するロール角 ϕ ・ヨー角 ψ への伝達関数は以下のように

なる。

$$\begin{bmatrix} \varphi(s) \\ \psi(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta(s)} \begin{bmatrix} I_T s^2 & I_W \sigma_W s \\ -I_W \sigma_W s & I_T s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_x(s) \\ \tau_z(s) \end{bmatrix} \quad (5.3.14-a)$$

ただし，特性方程式は

$$\Delta(s) = s^2 \{ I_T^2 s^2 + (I_W \sigma_W)^2 \} = 0 \quad (5.3.14-b)$$

伝達関数 (5.3.14) の極は $\Delta(s) = 0$ より，

$$s = 0, \quad s = \pm j \cdot \frac{I_W}{I_T} \sigma_W \equiv \pm j \cdot \Omega_N \quad (5.3.15)$$

極 $j \cdot \Omega_N$ による姿勢運動は，ホイール角運動量 $h_{wb} = I_W \sigma_W$ によるロール軸とヨー軸のカップリングによるものでこれをニューテーション運動 (nutational motion) と呼ぶ。

$\Omega_N = \frac{I_W}{I_T} \sigma_W$ は，ニューテーション角速度 (nutation frequency) と呼ばれる。これは，スピンの軸まわりの慣性モーメント I_W ，スピン軸と直交する軸まわりの慣性モーメント I_T (軸対象)，スピン角速度 σ_W でスピン角運動量 $I_W \sigma_W$ を持つスピン衛星のニューテーション角速度と同じ形をしている (デュアルスピン衛星の場合も同じ形)。スピン衛星では衛星本体をスピンさせることにより，スピン角運動量によるジャイロ剛性で姿勢を受動的に安定化させていた (同様にデュアルスピン衛星ではロータ部のジャイロ剛性で安定化)。一方，バイアスモーメントム方式では衛星本体をスピンさせるのではなく，衛星内部のモーメントムホイールのみを回転部分としてスピンさせることによりバイアス角運動量 $h_{wb} = I_W \sigma_W$ を保有し，そのジャイロ剛性で姿勢を安定化させていると言える。

(ii) 非軸対象衛星の場合

一方，衛星が非軸対称 ($I_x \neq I_z$) のとき，外乱トルク τ_x, τ_z に対するロール角 φ ・ ヨー角 ψ への伝達関数は以下ようになる。

$$\begin{bmatrix} \varphi(s) \\ \psi(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta(s)} \begin{bmatrix} I_z s^2 & h_{wb} s \\ -h_{wb} s & I_x s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_x(s) \\ \tau_z(s) \end{bmatrix} \quad (5.3.16-a)$$

ただし，特性方程式は

$$\Delta(s) = s^2 \{ I_x I_z s^2 + h_{wb}^2 \} = 0 \quad (5.3.16-b)$$

伝達関数 (5.3.16) の極は $\Delta(s) = 0$ より，

$$s = 0, \quad s = \pm j \cdot \frac{h_{wb}}{\sqrt{I_x I_z}} \equiv \pm j \cdot \Omega_N \quad (5.3.17)$$

(i) の場合と同様に，極 $j \cdot \Omega_N$ による姿勢運動は式 (5.3.13) の左辺第 2 項のカップリングによるニューテーション運動を表す。 $\Omega_N = \frac{h_{wb}}{\sqrt{I_x I_z}}$ が，バイアスモーメントム方式における非軸対象衛星のニューテーション角速度を表す。

【例題 5-2】 バイアスモーメントム方式における姿勢応答 (その 1)

表 5.3.2 のようなパラメータが与えられているとする。大きさ τ_z のステップ状外乱トルクが作用するとき，衛星の姿勢応答を評価する。

結果を図 5.3 に示す。各図は (a) ステップ状外乱トルク，(b) ローラ角，(c) ヨー角，(d) ローラ角速度，(e) ヨー角速度を表す。式 (5.3.17) からニューテーション角速度は，

$$\Omega_N = \frac{|h_{wb}|}{\sqrt{I_x I_z}} = 0.056 \text{ rad/s } (=0.0089 \text{ Hz}) \quad (5.3.18)$$

であり，周期約 112 秒の姿勢変動があることが確認できる．また，大きさ τ_z のステップ状外乱トルクが作用するとき，伝達関数 (5.3.16) をロール角 φ ・ヨー角 ψ について解くと，

$$\varphi(s) = \frac{\tau_z}{h_{wb}} \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{\Omega_N} \cdot \frac{\Omega_N}{s^2 + \Omega_N^2} \right) \quad (5.3.19\text{-a})$$

$$\psi(s) = \frac{I_x \tau_z}{h_{wb}^2} \cdot \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \Omega_N^2} \right) \quad (5.3.19\text{-b})$$

これらを逆ラプラス変換すると，ロール角とヨー角の姿勢応答は以下のようになる．

$$\varphi(t) = \frac{\tau_z}{h_{wb}} \left(t - \frac{1}{\Omega_N} \sin \Omega_N t \right) \quad (5.3.20\text{-a})$$

$$\psi(t) = \frac{I_x \tau_z}{h_{wb}^2} (1 - \cos \Omega_N t) \quad (5.3.20\text{-b})$$

図 5.3.3 の振幅は式 (5.3.20) の振幅と一致することが確認できる．また，式 (5.3.20-a) から分かるように，外乱トルク τ_z によってロール角 φ の大きさが時間とともに増大する方向にプリセッションしていく．式 (5.3.20) を位相平面 φ - ψ で表すとサイクロイドと呼ばれる曲線となる．

表 5.3.2 ロール軸・ヨー軸のパラメータ

| パラメータ | 記号 [単位] | 値 |
|----------|--|----------------------|
| 慣性モーメント | I_x [kgm ²] | 800 |
| | I_z [kgm ²] | 1000 |
| バイアス角運動量 | h_{wb} [Nms] | - 50 |
| 外乱トルク | τ_x [Nm] | 0 |
| | τ_z [Nm] | 5.0×10^{-6} |
| 初期値 | $\varphi_0, \psi_0, \dot{\varphi}_0, \dot{\psi}_0$ | 全て 0 |

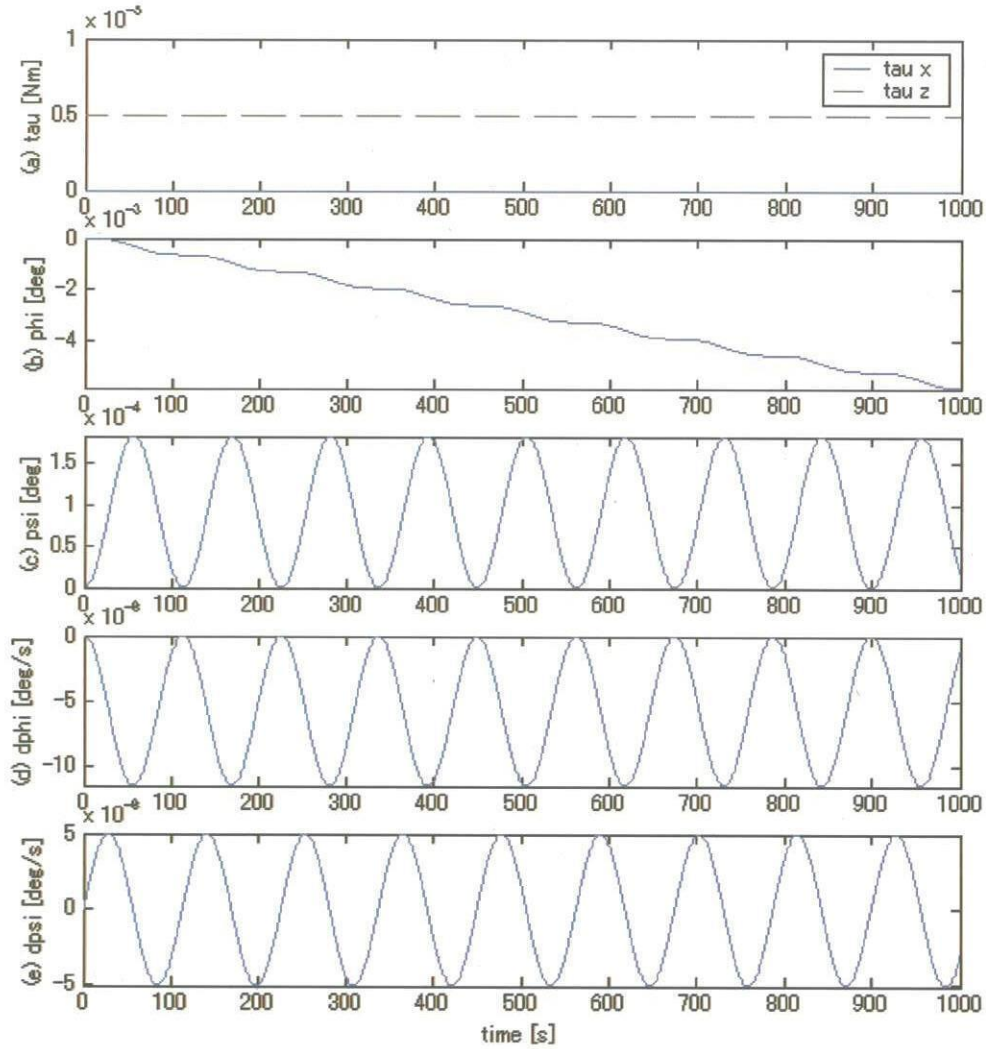


図 5.3.3 ロール軸・ヨー軸の姿勢応答 (バイアスモーメント方式)

軌道運動を考慮した場合のロール軸・ヨー軸まわりの伝達関数

次に、軌道運動を考慮した場合について姿勢運動の特徴を説明する。ピッチ軸まわりのバイアス角運動量 h_{wb} が大きいので、以下の近似が成り立つと考えてよい（衛星の軌道が静止軌道の場合、よい近似となる）。

$$h_{wb} \gg \max(\omega_0 I_x, \omega_0 I_y, \omega_0 I_z) \quad (5.3.21)$$

したがって、バイアスモーメント方式の運動方程式 (5.2.2-a) において重力傾斜トルクの項を無視し近似 (5.3.21) を考慮すると、ロール軸・ヨー軸まわりの運動方程式は以下のように簡略化される。

$$I_x \ddot{\phi} - (h_{wb} \dot{\psi} + \omega_0 h_{wb} \phi) = \tau_x \quad (5.3.22-a)$$

$$I_z \ddot{\psi} + (h_{wb} \dot{\phi} - \omega_0 h_{wb} \psi) = \tau_z \quad (5.3.22-b)$$

運動方程式 (5.3.13) と比較すると軌道運動に依存する左辺第3項が追加されている。外乱トルク τ_x, τ_z に対するロール角 ϕ ・ヨー角 ψ への伝達関数は以下になる。

$$\begin{bmatrix} \varphi(s) \\ \psi(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta(s)} \begin{bmatrix} I_z s^2 - \omega_0 h_{wb} & h_{wb} s \\ -h_{wb} s & I_x s^2 - \omega_0 h_{wb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_x(s) \\ \tau_z(s) \end{bmatrix} \quad (5.3.23-a)$$

ただし、特性方程式は

$$\Delta(s) = (I_x s^2 - \omega_0 h_{wb})(I_z s^2 - \omega_0 h_{wb}) + h_{wb}^2 s^2 = 0 \quad (5.3.23-b)$$

ここで、近似 (5.3.21) を考慮すると、

$$\begin{aligned} \Delta(s) &= I_x I_z s^4 + \{-(I_x + I_z)\omega_0 + h_{wb}\} h_{wb} s^2 + \omega_0^2 h_{wb}^2 \\ &\approx I_x I_z s^4 + h_{wb}^2 s^2 + \omega_0^2 h_{wb}^2 \\ &\approx I_x I_z s^4 + (h_{wb}^2 + I_x \omega_0 \cdot I_z \omega_0) s^2 + \omega_0^2 h_{wb}^2 \\ &= (I_x I_z s^2 + h_{wb}^2)(s^2 + \omega_0^2) = 0 \end{aligned} \quad (5.3.23-c)$$

伝達関数 (5.3.23) の極は $\Delta(s) = 0$ より、

$$s = \pm j \cdot \omega_0, \quad s = \pm j \cdot \frac{h_{wb}}{\sqrt{I_x I_z}} = \pm j \cdot \Omega_N \quad (5.3.24)$$

近似 (5.3.21) から、これらの極の間には $\Omega_N \gg \omega_0$ が成り立つ。したがって、式 (5.3.17) と比較すると、短周期振動（ニュートーション運動） Ω_N と長周期振動（軌道運動） ω_0 である 2 つの振動が重ね合わさった姿勢運動となっている。長周期振動は運動方程式 (5.3.22) の左辺第 3 項に起因する。

例として、大きさ τ_z のステップ状外乱トルクのみが作用するとき、伝達関数 (5.3.23) をヨー角 ψ について解くと、

$$\begin{aligned} \psi(s) &= \frac{I_x s^2 - \omega_0 h_{wb}}{(I_x I_z s^2 + h_{wb}^2)(s^2 + \omega_0^2)} \cdot \frac{\tau_z}{s} \\ &= \frac{1}{h_{wb}} \left(-\frac{1}{\omega_0} \cdot \frac{\omega_0^2}{s^2 + \omega_0^2} + \frac{I_x}{h_{wb}} \cdot \frac{\Omega_N^2}{s^2 + \Omega_N^2} \right) \cdot \frac{\tau_z}{s} \\ &= \frac{1}{h_{wb}} \left\{ -\frac{1}{\omega_0} \cdot \left(1 - \frac{s^2}{s^2 + \omega_0^2} \right) + \frac{I_x}{h_{wb}} \cdot \left(1 - \frac{s^2}{s^2 + \Omega_N^2} \right) \right\} \cdot \frac{\tau_z}{s} \\ &= \frac{\tau_z}{h_{wb}} \left\{ -\frac{1}{\omega_0} \cdot \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \right) + \frac{I_x}{h_{wb}} \cdot \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \Omega_N^2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (5.3.25)$$

式 (5.3.25) を逆ラプラス変換すると、ヨー角の姿勢応答は以下ようになる。

$$\psi(t) = -\frac{\tau_z}{\omega_0 h_{wb}} (1 - \cos \omega_0 t) + \frac{I_x \tau_z}{h_{wb}^2} (1 - \cos \Omega_N t) \quad (5.3.26)$$

第 1 項の振幅は第 2 項の振幅に比べてかなり大きいので、定常状態におけるヨー角の姿勢誤差は以下のように表せる。

$$\psi^s = \frac{|\tau_z|}{\omega_0 |h_{wb}|} \quad (5.3.27)$$

すなわち、外乱トルク τ_z の大きさに比例し、軌道角速度 ω_0 およびバイアス角運動量 h_{wb} の大きさに反比例する。これから、ヨー角の定常姿勢誤差 ψ^s を姿勢制御精度 ψ^{\lim} 以内に抑えるような姿勢制御系を設計する場合、モーメントムホイールに必要なバイアス角運動量 h_{wb} は式 (5.3.27) から以下のように決定できる。

$$h_{wb} \geq \frac{|\tau_z|}{\omega_0 |\psi^{\lim}|} \quad (5.3.28)$$

すなわち、外乱トルクと軌道角速度の大きさが分かればよい。ロール角 φ についても同様となる。

【例題 5-3】 バイアスモーメント方式における姿勢応答（その 2）

表 5.3.3 に示すようなパラメータが与えられているとする。衛星にステップ状外乱トルク τ_z のみが作用したときに発生するヨー角の定常姿勢誤差を ψ^{lim} 以内に抑えるような姿勢制御系を設計し、衛星の姿勢応答を評価する。

式 (5.3.28) から必要なバイアス角運動量を以下のように設定する。

$$h_{wb} = \frac{|\tau_z|}{\omega_0 |\psi^{\text{lim}}|} = 39.2 \text{ Nms} < 50 \text{ Nms} \quad (5.3.29)$$

以上のロール軸・ヨー軸のパラメータを用いて応答を計算した結果を図 5.3.4 に示す。各図は (a) ステップ状外乱トルク、(b) ロール角、(c) ヨー角、(d) ロール角速度、(e) ヨー角速度を表す。式 (5.3.26) に示すように、ヨー角の振幅中心および振幅は

$$\frac{|\tau_z|}{\omega_0 h_{wb}} = 0.079 \text{ deg} \quad (5.3.30)$$

の振動となっており、姿勢制御精度 $\pm 0.1 \text{ deg}$ の範囲内となっている。

また、1/4 軌道周期 (90deg の位相差) ごとにロール角とヨー角の大きさが交互に入れ替わっているのが分かる。これは軌道運動により $\{\mathbf{b}_1\}$ 系に対して $\{\mathbf{b}_0\}$ 系が軌道角速度で回転しているために観測されるものであり、ロール・ヨーの交換 (momentum exchange mode) と呼ばれる。この長周期振動 (軌道運動) は大きな振幅となって現れるが、短周期振動 (ニューテーション運動) の振幅は小さいため、図 (b) (c) からは分かりにくい。短周期振動による姿勢変動は、図 (d) (e) から分かる。

表 5.3.3 ロール軸・ヨー軸のパラメータ

| パラメータ | 記号 [単位] | 値 |
|---------|---------------------------|-----------------------------|
| 慣性モーメント | I_x [kgm ²] | 800 |
| | I_z [kgm ²] | 1000 |
| 軌道角速度 | ω_0 [rad/s] | 7.3×10^{-5} (静止軌道) |
| 外乱トルク | τ_x [Nm] | 0 |
| | τ_z [Nm] | 5.0×10^{-6} |
| 姿勢制御精度 | ψ^{lim} [deg] | ± 0.1 |

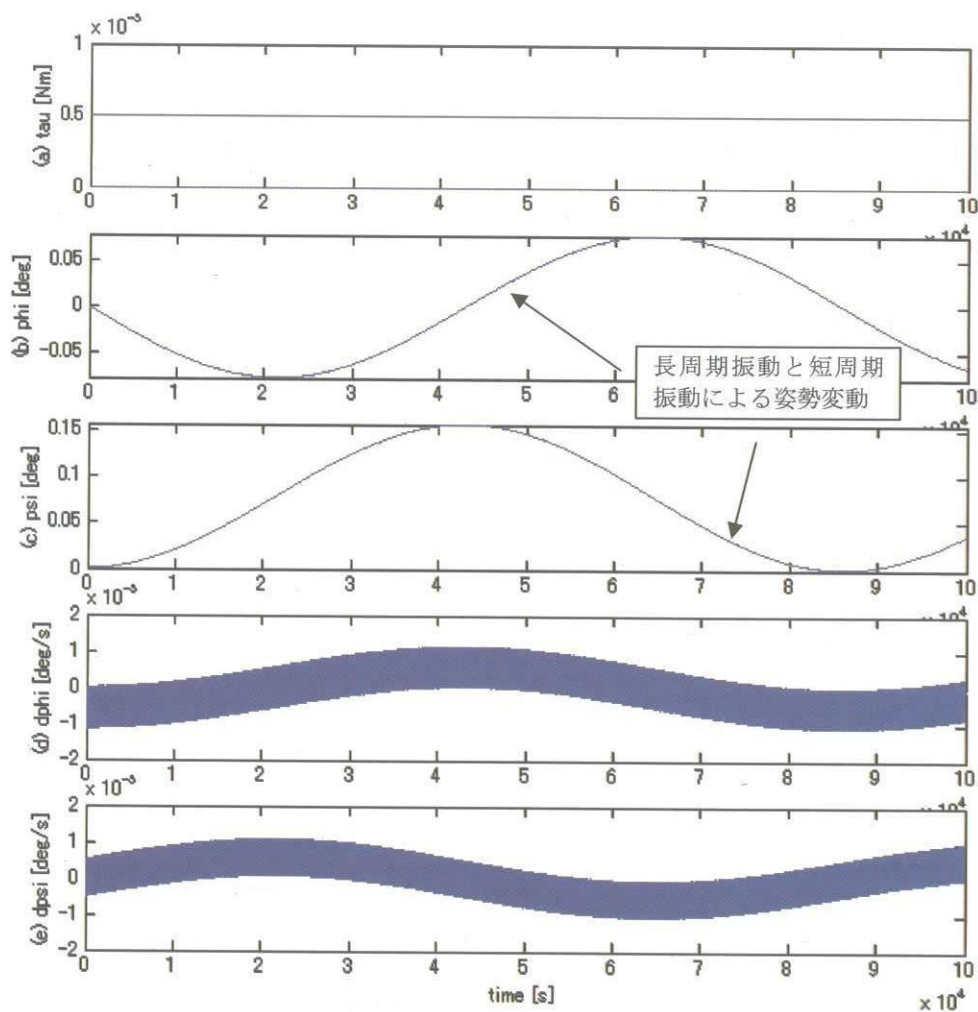


図 5.3.4 ロール軸・ヨー軸の姿勢応答 (バイアスモーメント方式)

5.3.3 コントロールド・バイアスモーメント方式の制御特性

5.3.2 節のバイアスモーメント方式の場合、ロール軸とヨー軸の姿勢制御は基本的にモーメントホイールのジャイロ剛性に依存していたため、姿勢変動（長周期振動および短周期振動）を能動的に減衰させることができない。本節では、姿勢変動を能動的に減衰できる機器（リアクションホイール、スラスタなど）を併用した場合についてダイナミクス・制御特性を説明する。

代表的な例としてコントロールド・バイアスモーメント方式では、ピッチ軸のモーメントホイールの他にロール軸あるいはヨー軸にリアクションホイールを追加し、これによってロール軸とヨー軸の能動的な姿勢制御をする。軌道運動している衛星ではロール・ヨーの交換が行われること、ロール軸・ヨー軸の姿勢運動がジャイロ剛性で強くカップリングしていることを利用すれば、ロール軸まわりの姿勢検出・制御のみによってヨー軸まわりの姿勢制御が可能となる。この特徴を利用して、コントロールド・バイアスモーメント方式ではロール角およびピッチ角の姿勢検出が可能な地球センサなど用いた姿勢制御系を構成できる。ゼロモーメント方式では、3 軸の姿勢を独立に検出・制御しなければ

らないが、本方式の長所としてロール角とピッチ角の姿勢検出だけで3軸の姿勢制御ができる点が挙げられる。

運動方程式 (5.2.15-a) の重力傾斜トルクの項を無視し近似 (5.3.21) を考慮すると、コントロールド・バイアスモーメンタム方式におけるロール軸・ヨー軸まわりの運動方程式は以下のように簡略化される。

$$I_x \ddot{\phi} - (h_{wb} \dot{\psi} + \omega_0 h_{wb} \phi) = -\dot{h}_{wx} + \tau_x \quad (5.3.31-a)$$

$$I_z \ddot{\psi} + (h_{wb} \dot{\phi} - \omega_0 h_{wb} \psi) = -\dot{h}_{wz} + \tau_z \quad (5.3.31-b)$$

ピュア・バイアスモーメンタム方式の場合 (5.3.22) と比べると、ロール軸とヨー軸に配置されたリアクションホイールが発生する姿勢制御トルク $\dot{h}_{wx}, \dot{h}_{wz}$ の項が右辺に追加されている。ここでは、地球センサなどによるロール角の検出値 ϕ をフィードバックして、ロール軸のリアクションホイールのみを能動的に制御することを考える。ゼロモーメンタム方式で述べた場合と同様に、ロール軸に PD 制御 (5.3.3) を適用すると、

$$\dot{h}_{wx} = k_d \dot{\phi} + k_p \phi \quad (5.3.32-a)$$

$$\dot{h}_{wz} = 0 \quad (5.3.32-b)$$

これらを運動方程式 (5.3.31) に代入すると、外乱トルク τ_x, τ_z に対するロール角 ϕ ・ヨー角 ψ への伝達関数は以下ようになる。

$$\begin{bmatrix} \phi(s) \\ \psi(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta(s)} \begin{bmatrix} I_z s^2 - \omega_0 h_{wb} & h_{wb} s \\ -h_{wb} s & I_x s^2 + k_d s - \omega_0 h_{wb} + k_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_x(s) \\ \tau_z(s) \end{bmatrix} \quad (5.3.33-a)$$

ただし、特性方程式は

$$\begin{aligned} \Delta(s) &= (I_x s^2 + k_d s - \omega_0 h_{wb} + k_p)(I_z s^2 - \omega_0 h_{wb}) + h_{wb}^2 s^2 \\ &= I_x I_z s^4 + I_z k_d s^3 + \left\{ -(I_x + I_z) \omega_0 h_{wb} + I_z k_p + h_{wb}^2 \right\} s^2 \\ &\quad - \omega_0 h_{wb} k_d s + (\omega_0^2 h_{wb}^2 - \omega_0 h_{wb} k_p) = 0 \end{aligned} \quad (5.3.33-b)$$

ここで、系が漸近安定であるためには、特性方程式 (5.3.33-b) の係数が正であればよいので、

$$h_{wb} = -h < 0 \quad (5.3.34)$$

とおく。これは、ピッチ軸の負の方向にモーメンタムホイールをスピンさせることを意味する。これから、特性方程式 (5.3.33-b) は、以下のように表せる。

$$\Delta(s) = I_x I_z s^4 + I_z k_d s^3 + \left\{ (I_x + I_z) \omega_0 h + I_z k_p + h^2 \right\} s^2 + \omega_0 h k_d s + (\omega_0^2 h^2 + \omega_0 h k_p) \quad (5.3.33-c)$$

ここで、ロール軸とヨー軸にそれぞれ大きさ τ_x, τ_z のステップ状外乱トルクが作用するとき、ロール角 $\phi(s)$ 、ヨー角 $\psi(s)$ に最終値の定理を適用すると、

$$\phi^s = \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \phi(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{I_z s^2 + \omega_0 h}{\Delta(s)} \cdot \frac{\tau_x}{s} + \frac{-hs}{\Delta(s)} \cdot \frac{\tau_z}{s} \right) = \frac{\tau_x}{\omega_0 h + k_p} \quad (5.3.35-a)$$

$$\psi^s = \lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \psi(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{hs}{\Delta(s)} \cdot \frac{\tau_x}{s} + \frac{I_x s^2 + k_d s + \omega_0 h + k_p}{\Delta(s)} \cdot \frac{\tau_z}{s} \right) = \frac{\tau_z}{\omega_0 h} \quad (5.3.35-b)$$

これらの式で、比例ゲイン k_p が比較的大きく $\omega_0 h \ll k_p$ と仮定すると、式 (5.3.35-a) は以下のように近似される。

$$\phi^s \approx \frac{\tau_x}{k_p} \quad (5.3.36)$$

したがって、ロール軸の定常姿勢誤差 (5.3.36) はゼロモーメンタム方式の場合 (5.3.9-a)

と同様に表せ、ヨー軸の定常姿勢誤差 (5.3.35-b) はバイアスモーメント方式の場合 (5.3.27) と同様に表せる。すなわち、ロール軸の定常姿勢誤差は比例ゲインを大きくすれば小さくなり、ヨー軸の定常姿勢誤差はピッチ軸のバイアス角運動量を大きくすれば小さくなる。

【例題 5-4】 コントロール・バイアスモーメント方式における姿勢応答

表 5.3.4 に示すようなパラメータが与えられているとする。ロール軸とヨー軸にステップ状外乱トルク τ_x, τ_z が作用したときに発生する定常姿勢誤差を姿勢制御精度 ϕ^{\lim}, ψ^{\lim} 以内に抑えるような姿勢制御系を設計し、衛星の姿勢応答を評価する。

簡単化のため、比例ゲインおよびバイアス角運動量の設定にそれぞれ式 (5.3.36) (5.3.35-b) を用いる。式 (5.3.36) からロール軸の姿勢制御精度 ϕ^{\lim} を達成するために必要な比例ゲイン k_p を以下のように設定する。

$$k_p = \frac{|\tau_x|}{|\phi^{\lim}|} = 0.029 \text{ Nm/rad} \quad (5.3.37\text{-a})$$

減衰比 $\xi_p = 1$ とすると、式 (5.3.5) から微分ゲイン k_d は、

$$k_d = 2\sqrt{I_x k_p} = 9.567 \text{ Nms/rad} \quad (5.3.37\text{-b})$$

また、式 (5.3.35-b) からヨー軸の姿勢制御精度 ψ^{\lim} を達成するために必要なバイアス角運動量 h_{wb} を以下のように設定する。

$$h = \frac{|\tau_z|}{\omega_0 |\psi^{\lim}|} = 39.2 \text{ Nms} < 50 \text{ Nms} \quad (5.3.38)$$

したがって、式 (5.3.34) より $h_{wb} = -50 \text{ Nms}$ となる。

以上のロール軸・ヨー軸のパラメータを用いて応答を計算した結果を図 5.3.5 に示す。各図は (a) ステップ状外乱トルク、(b) ロール角、(c) ヨー角、(d) ロール角速度、(e) ヨー角速度、さらに (d+) (e+) はそれぞれ (d) (e) の 10000 秒までの拡大図を表す。図 (b) (c) (d) (e) から、長周期振動 (軌道運動) はロール軸のリアクションホイールによりロール・ヨーの交換を利用してヨー角も減衰されており、それぞれの姿勢制御精度 $\phi^{\lim} = \pm 0.01 \text{ deg}$, $\psi^{\lim} = \pm 0.1 \text{ deg}$ 以内に抑えられている。また、図 (d+) (e+) から短周期振動 (ニューテーション運動) もロール軸とヨー軸のカップリングにより減衰していることが分かる。

表 5.3.4 ロール軸・ヨー軸のパラメータ

| パラメータ | 記号 [単位] | 値 |
|---------|---------------------------|-----------------------------|
| 慣性モーメント | I_x [kgm ²] | 800 |
| | I_z [kgm ²] | 1000 |
| 軌道角速度 | ω_0 [rad/s] | 7.3×10^{-5} (静止軌道) |
| 外乱トルク | τ_x [Nm] | 5.0×10^{-6} |
| | τ_z [Nm] | 5.0×10^{-6} |
| 姿勢制御精度 | ϕ^{\lim} [deg] | ± 0.01 |
| | ψ^{\lim} [deg] | ± 0.1 |
| 減衰比 | ξ_x [-] | 1 |

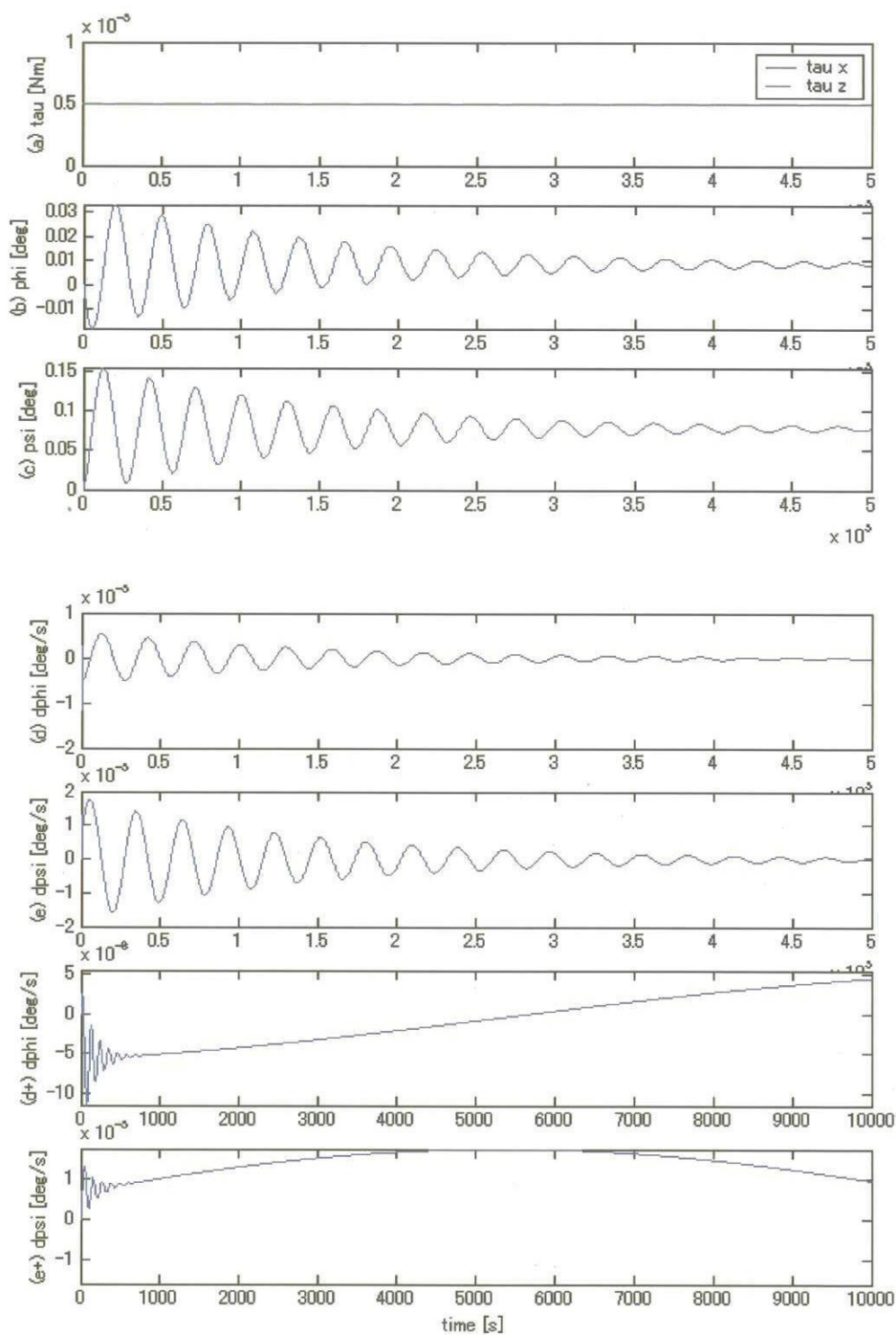


図 5.3.5 ロール軸・ヨー軸の姿勢応答 (コントロールド・バイアスモーメント方式)

5.4 重力傾斜安定方式

式 (5.2.14) に示したように、重力傾斜トルクは近似的にロール角とピッチ角に比例した

トルクとして衛星に作用する．このトルクを利用すると衛星の姿勢を安定に保つことができる場合がある．このような受動的な姿勢安定方式を重力傾斜安定方式 (gravity gradient stabilization) という．本節では，重力傾斜安定となるための安定条件と重力傾斜トルクが作用する衛星の姿勢応答について説明する．

重力傾斜トルクによる姿勢運動

式 (5.1.15-a) から，外乱トルクとして重力傾斜トルクとそれ以外の外乱トルク τ_x, τ_y, τ_z が作用している衛星の運動方程式は，以下のように表された．

$$\begin{bmatrix} I_x \ddot{\phi} \\ I_y \ddot{\theta} \\ I_z \ddot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_0^2 (I_y - I_z) \phi \\ 0 \\ \omega_0^2 (I_y - I_x) \psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_0 (I_y - I_z - I_x) \dot{\psi} \\ 0 \\ \omega_0 (I_z + I_x - I_y) \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3\omega_0^2 (I_y - I_z) \phi \\ -3\omega_0^2 (I_x - I_z) \theta \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} \quad (5.4.1)$$

ただし，ここではホイールによる姿勢制御トルクは作用していないと仮定し，左辺第 4 項および第 5 項を無視した．ここで，

$$\kappa_x = \frac{I_y - I_z}{I_x}, \quad \kappa_y = \frac{I_x - I_z}{I_y}, \quad \kappa_z = \frac{I_y - I_x}{I_z} \quad (5.4.2-a)$$

$$\tau'_x = \frac{\tau_x}{I_x}, \quad \tau'_y = \frac{\tau_y}{I_y}, \quad \tau'_z = \frac{\tau_z}{I_z} \quad (5.4.2-b)$$

と整理すると，運動方程式 (5.4.1) は以下のように表される．

$$\ddot{\phi} + 4\omega_0^2 \kappa_x \phi - \omega_0 (1 - \kappa_x) \dot{\psi} = \tau'_x \quad (5.4.3-a)$$

$$\ddot{\theta} + 3\omega_0^2 \kappa_y \theta = \tau'_y \quad (5.4.3-b)$$

$$\ddot{\psi} + \omega_0^2 \kappa_z \psi + \omega_0 (1 - \kappa_z) \dot{\phi} = \tau'_z \quad (5.4.3-c)$$

左辺第 2 項に各軸の姿勢角に比例するトルクとして，ロール軸には遠心力によるトルクと重力傾斜トルクの和 $4\omega_0^2 \kappa_x \phi$ ，ピッチ軸には重力傾斜トルク $3\omega_0^2 \kappa_y \theta$ ，ヨー軸には遠心力によるトルク $\omega_0^2 \kappa_z \psi$ が作用している．式 (5.4.2-a) から分かるように各軸の慣性モーメントの大きさを適当に選ぶことにより，これらを復元トルクとして利用できれば姿勢を安定に保つことができる．ただし，衛星ダイナミクス自体にダンピング要素はなく非減衰振動となっているため，漸近安定とするためには能動制御機器を併用する必要がある．また，ホイールによる能動制御の場合と同様にロール軸とヨー軸は互いにカップリングしているが，ピッチ軸はロール軸およびヨー軸とのカップリングはない．

安定条件

まず，ピッチ軸の安定条件は運動方程式 (5.4.3-b) において， $\kappa_y > 0$ より以下のようになる．

$$I_x > I_z \quad (5.4.4)$$

一方，ロール軸・ヨー軸まわりの運動方程式 (5.4.3-a) (5.4.3-c) において，外乱トルク τ'_x, τ'_z に対するロール角 ϕ ・ヨー角 ψ への伝達関数は以下のようになる．ここでは後の説明のため，初期条件 $\phi(0) = \phi_0, \dot{\phi}(0) = \dot{\phi}_0, \psi(0) = \psi_0, \dot{\psi}(0) = \dot{\psi}_0$ を考慮しておく．

$$\begin{bmatrix} \phi(s) \\ \psi(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta(s)} \begin{bmatrix} s^2 + \omega_0^2 \kappa_z & \omega_0 (1 - \kappa_x) s \\ -\omega_0 (1 - \kappa_z) s & s^2 + 4\omega_0^2 \kappa_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau'_x + s\phi_0 + \dot{\phi}_0 - \omega_0 (1 - \kappa_x) \psi_0 \\ \tau'_z + s\psi_0 + \dot{\psi}_0 + \omega_0 (1 - \kappa_z) \phi_0 \end{bmatrix} \quad (5.4.5-a)$$

ただし，特性方程式は

$$\Delta(s) = s^4 + \omega_0^2 (1 + 3\kappa_x + \kappa_x \kappa_z) s^2 + 4\omega_0^4 \kappa_x \kappa_z = 0 \quad (5.4.5-b)$$

したがって，ロール軸・ヨー軸の安定条件は特性方程式 (5.4.5-b) の係数から以下のように

になる.

$$\kappa_x \kappa_z > 0 \quad (5.4.6-a)$$

$$1 + 3\kappa_x + \kappa_x \kappa_z > 4\sqrt{\kappa_x \kappa_z} \quad (5.4.6-b)$$

式 (5.4.6-a) から

$$\kappa_x > 0, \kappa_z > 0 \quad \text{または} \quad \kappa_x < 0, \kappa_z < 0 \quad (5.4.7-a)$$

したがって,

$$I_y > I_z, I_y > I_x \quad \text{または} \quad I_y < I_z, I_y < I_x \quad (5.4.7-b)$$

式 (5.4.4) および式 (5.4.7-b) を考慮すると, ロール軸・ピッチ軸・ヨー軸の各軸が安定となるためには慣性モーメントの大きさが以下のような関係でなければならない.

$$I_y > I_x > I_z \quad (5.4.8-a)$$

または

$$I_x > I_z > I_y \quad (5.4.8-b)$$

すなわち, 常にピッチ軸は最大慣性モーメント軸か最小慣性モーメント軸であり, ロール軸の慣性モーメントはヨー軸の慣性モーメントよりも大きくななければならない. 安定条件 (5.4.8-b) では, 式 (5.4.3-a) (5.4.3-c) の左辺第2項自体は不安定トルクとなるが, 第3項の軌道運動によるカップリングトルクがあるために安定となる. 安定条件 (5.4.6) を, κ_x を横軸, κ_z を縦軸にとった平面に示すと, 重力傾斜安定方式における安定領域は図 5.4.1 のようになる.

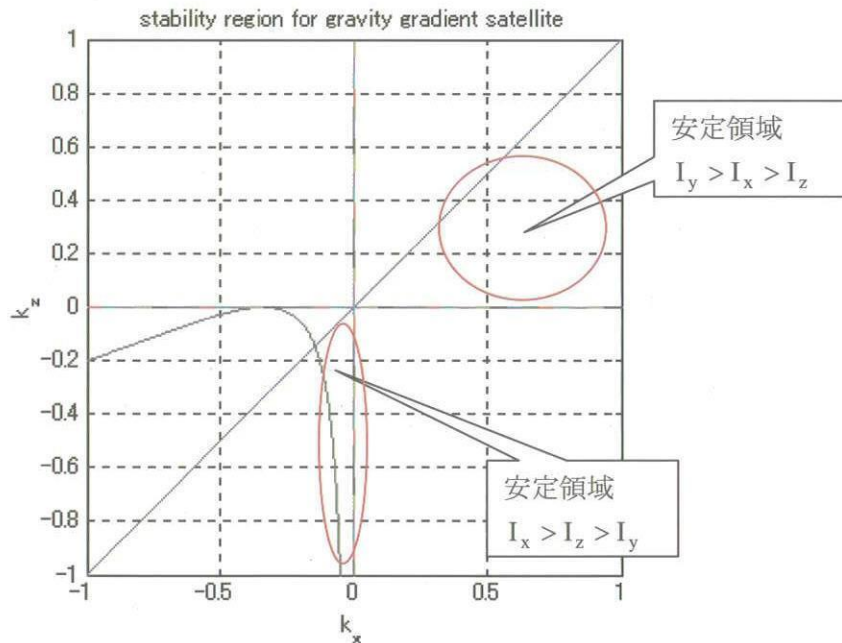


図 5.4.1 重力傾斜安定方式における安定領域

姿勢応答

ここでは, 重力傾斜安定方式における衛星の姿勢応答の例を解析的に求める. ピッチ軸まわりの運動方程式 (5.4.3-b) を初期条件 $\theta(0) = \theta_0, \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$ を考慮してラプラス変換すると, 以下のようになる.

$$\theta(s) = \frac{\tau_y}{s^2 + 3\omega_0^2 \kappa_y} + \frac{s\theta_0 + \dot{\theta}_0}{s^2 + 3\omega_0^2 \kappa_y} \quad (5.4.9)$$

例として、外乱トルク τ_y と初期姿勢角速度 $\dot{\theta}_0$ が 0 の場合に式 (5.4.9) を逆ラプラス変換すると、姿勢応答は以下ようになる。

$$\theta(t) = \theta_0 \cdot \cos(\sqrt{3\kappa_y} \omega_0 t) \quad (5.4.10)$$

したがって、ピッチ軸まわりは振幅 θ_0 で固有角振動数 $\sqrt{3\kappa_y} \omega_0$ の姿勢変動となる。

次に、ロール軸とヨー軸については、伝達関数 (5.4.5-a) で表された。特性方程式は 4 次方程式であるため、2つの固有角振動数 Ω_1, Ω_2 を用いて以下のようにおける。

$$\Delta(s) = s^4 + \omega_0^2 (1 + 3\kappa_x + \kappa_x \kappa_z) s^2 + 4\omega_0^4 \kappa_x \kappa_z = (s^2 + \Omega_1^2)(s^2 + \Omega_2^2) = 0 \quad (5.4.5-c)$$

例として、外乱トルク τ'_x, τ'_z と初期姿勢角 φ_0 および初期姿勢角速度 $\dot{\varphi}_0, \dot{\psi}_0$ が 0 の場合に式 (5.4.5-a) を逆ラプラス変換すると、姿勢応答は以下ようになる。

$$\varphi(t) = \psi_0 \cdot \frac{-\omega_0^3 \kappa_z (1 - \kappa_x)}{\Omega_2^2 - \Omega_1^2} \cdot \left(\frac{1}{\Omega_1} \cdot \sin \Omega_1 t - \frac{1}{\Omega_2} \cdot \sin \Omega_2 t \right) \quad (5.4.11-a)$$

$$\begin{aligned} \psi(t) = & \frac{\psi_0}{\Omega_2^2 - \Omega_1^2} \cdot \left\{ \omega_0^2 (1 + \kappa_x \kappa_z + 3\kappa_x - \kappa_z) - \Omega_1^2 \right\} \cdot \cos \Omega_1 t \\ & - \frac{\psi_0}{\Omega_2^2 - \Omega_1^2} \cdot \left\{ \omega_0^2 (1 + \kappa_x \kappa_z + 3\kappa_x - \kappa_z) - \Omega_2^2 \right\} \cdot \cos \Omega_2 t \end{aligned} \quad (5.4.11-b)$$

したがって、ロール軸およびヨー軸は2つの振動が重ね合わさった姿勢運動で表される。

【例題 5-5】 重力傾斜安定方式における姿勢応答

表 5.4.1 のようなパラメータが与えられているとする。衛星の慣性モーメントの大きさは安定条件 (5.4.8-a) となっており重力傾斜安定が可能である。このとき、衛星の初期姿勢角があり、重力傾斜トルクが作用する衛星の姿勢応答の大きさを評価する。

図 5.4.2 に結果を示す。各図は (a) ロール角, (b) ピッチ角, (c) ヨー角, (d) ロール角速度, (e) ピッチ角速度, (f) ヨー角速度を表す。これらの姿勢応答は解析解 (5.4.10) (5.4.11-a) (5.4.11-b) と一致する。

表 5.4.1 ロール軸・ピッチ軸・ヨー軸のパラメータ

| パラメータ | 記号 [単位] | 値 |
|---------|---|-----------------------------|
| 慣性モーメント | I_x [kgm ²] | 4000 |
| | I_y [kgm ²] | 5000 |
| | I_z [kgm ²] | 3000 |
| 軌道角速度 | ω_0 [rad/s] | 1.04×10^{-3} (低軌道) |
| 初期値 | φ_0 [deg] | 0.0 |
| | θ_0 [deg] | 1.0 |
| | ψ_0 [deg] | 1.0 |
| | $\dot{\varphi}_0, \dot{\theta}_0, \dot{\psi}_0$ [deg/s] | 全て 0 |

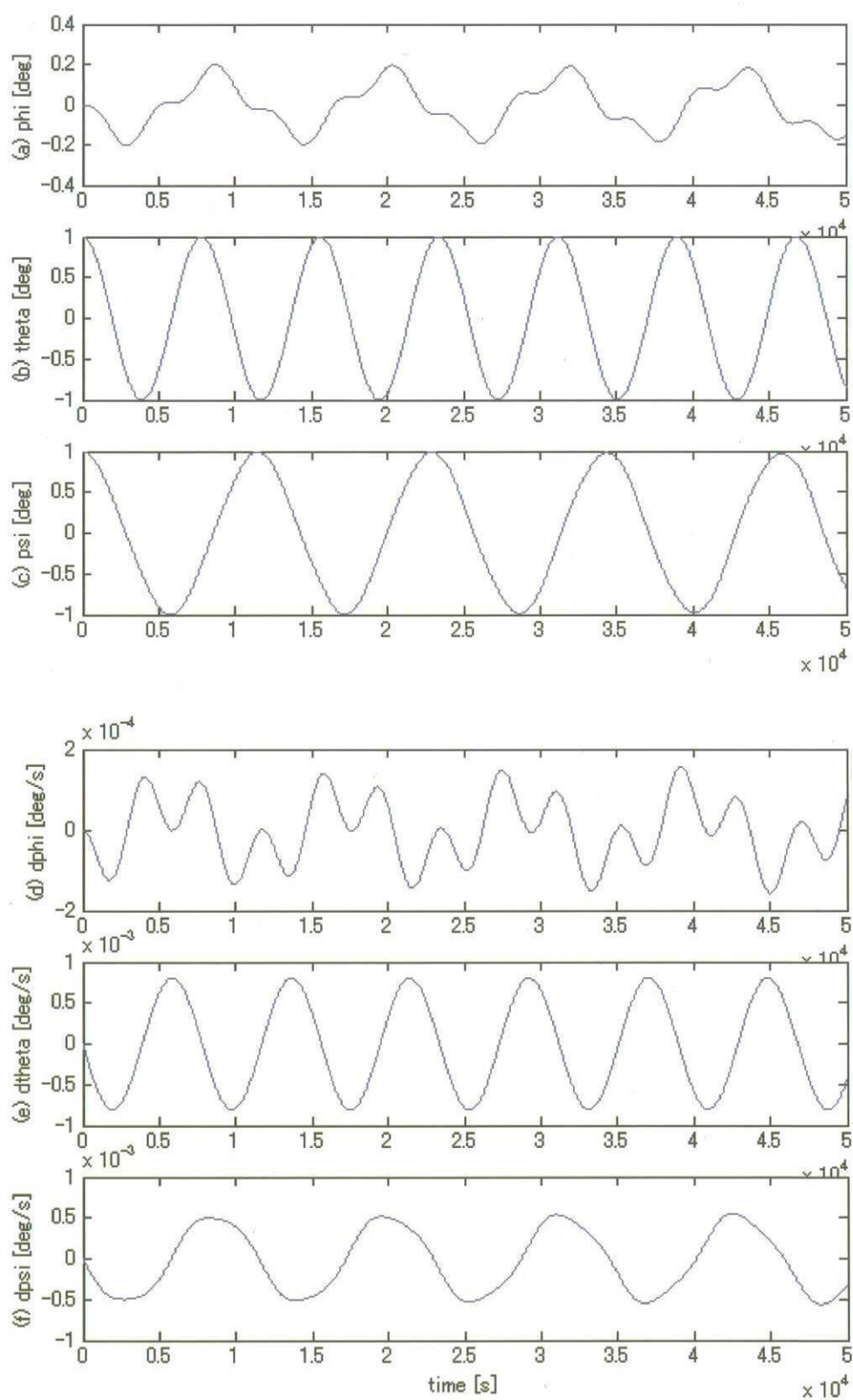


図 5.4.2 ロール軸・ピッチ軸・ヨー軸の姿勢応答（重力傾斜安定方式）

第6章 柔軟付着物を有する衛星の力学と制御

太陽電池パドルや大型アンテナなどの柔軟付着物を有する衛星の姿勢制御系設計・解析を行うためには、衛星の振動特性を把握しておかなければならない。本章では、衛星の姿勢制御系設計・解析の際に必要な柔構造解析に関する基礎事項として、柔軟付着物を有する衛星のモデリングと運動方程式の記述方法、モード解析の適用方法、周波数領域におけるダイナミクスの評価などについて説明する。また、簡単な衛星モデルに対しての数値計算例も示す。

6.1 柔軟付着物を有する衛星のモデリング

座標系・記号の定義

本節では、モデリングの準備として、本章で使用する座標系と主な記号を以下のように定義する。

O : 慣性座標系原点

B : 衛星本体の質量中心位置

A : 柔軟付着物の質量中心位置

S : 衛星全体の質量中心位置

H : 衛星本体に対する柔軟付着物の取り付け位置

$\{b_O\}$: 慣性座標系

$\{b_B\}$: B を原点とする衛星本体固定座標系

$\{b_A\}$: A を原点とする柔軟付着物固定座標系

$\{b_S\}$: S を原点とする座標系

$\{b_H\}$: H を原点とする衛星本体固定座標系

n_0 : 剛体モード次数 [-]

n : 弾性モード次数 [-]

$\{\theta\}$: 衛星全体の姿勢角 (ロール・ピッチ・ヨー) $\in \mathbb{R}^{n_0}$ [rad]

$\{q\}$: 柔軟付着物のモード座標 $\in \mathbb{R}^n$ [$m \cdot \sqrt{kg}$]

m_B : 衛星本体の質量 [kg]

m_A : 柔軟付着物の質量 [kg]

$[I_B]$: B を基準とした衛星本体の慣性行列 $\in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ [$kg \cdot m^2$]

$[I_A]$: A を基準とした柔軟付着物の慣性行列 $\in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ [$kg \cdot m^2$]

ω_i : 柔軟付着物の第 i 次振動モード固有角振動数 [rad/s]

(拘束モードモデルにおける固有角振動数)

ξ_i : 柔軟付着物の第 i 次振動モード減衰比 [-]

(拘束モードモデルにおける減衰比)

σ_i : 衛星全体の第 i 次振動モード固有角振動数 [rad/s]

(非拘束モードモデルにおける固有角振動数)

ζ_i : 衛星全体の第 i 次振動モード減衰比 [-]

(非拘束モードモデルにおける減衰比)

$[\delta^0]$: 0 次結合係数 $\in \mathbb{R}^{n_0 \times n}$ [\sqrt{kg}]

$[\delta^1]$: 1 次結合係数 $\in \mathbb{R}^{n_0 \times n}$ [$m \cdot \sqrt{kg}$]

$[\Gamma]$: カップリング行列 $\in \mathbb{R}^{n_0 \times n}$ $[\text{m} \cdot \sqrt{\text{kg}}]$

$\{t\}$: 外乱, 姿勢制御などにより衛星本体に作用するトルク $\in \mathbb{R}^{n_0}$ $[\text{Nm}]$

\mathbf{r}_{ba} : 点 a から点 b への位置ベクトル $\in \mathbb{R}^3$ $[\text{m}]$

φ : 柔軟付着物の衛星本体に対する回転角 $[\text{rad}]$

$[C_{b_b}^{b_a}]$: $\{\mathbf{b}_b\} = [C_{b_b}^{b_a}]\{\mathbf{b}_a\}$ で定義される方向余弦行列 $\in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ $[-]$

$[U_{kk}]$: k 行 k 列の単位行列 $\in \mathbb{R}^{k \times k}$

$[O_{kk}]$: k 行 k 列の零行列 $\in \mathbb{R}^{k \times k}$

\sim : 歪み対称行列演算子 $\{\mathbf{r}\} = \begin{Bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{Bmatrix}$ に対して $[\tilde{\mathbf{r}}] = \begin{bmatrix} 0 & -r_z & r_y \\ r_z & 0 & -r_x \\ -r_y & r_x & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$

s : ラプラス演算子

解析モデル

本章では, 図 6.1.1 のような解析モデルを考える. 比較的剛性が高く剛体とみなせる衛星本体 (中心剛体) のヒンジ位置 H に, 太陽電池パドルや大型アンテナのように剛性が低く柔軟性が無視できない構造物 (柔軟付着物) が結合している. この柔軟付着物は n 次の振動モードを有するとする.

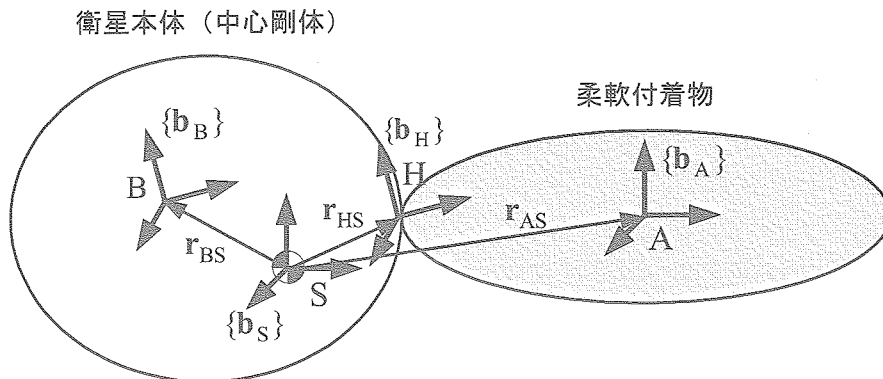


図 6.1.1 柔軟付着物を有する衛星の解析モデル

6.2 柔軟付着物を有する衛星の運動方程式

本章では, 柔軟付着物を有する衛星の運動を記述する方法として, Likins のハイブリッド座標法^[6.1]を扱う. これは, 線形な運動方程式で表されており姿勢制御系設計・解析に適しやすく広く用いられている. 本モデルでは, 以下を仮定している.

- (1) 衛星全体の姿勢運動は微小である.
- (2) 柔軟付着物の弾性振動も微小である.
- (3) 衛星全体のジャイロ効果はない.

図 6.1.1 のような柔軟付着物を有する衛星の運動方程式を衛星全体の質量中心座標系 $\{\mathbf{b}_S\}$ で表記すると, 式 (6.2.1) のように表せる. ここでは, 結果のみを示し詳細は文献^{[6.1] ~ [6.8]}に譲る. また, 衛星全体の姿勢運動のみ考慮し並進運動は扱わない.

$$[\mathbf{I}]\{\ddot{\boldsymbol{\theta}}\} + [\Gamma]\{\ddot{\mathbf{q}}\} = \{\mathbf{t}\} \quad (6.2.1-a)$$

$$\{\ddot{\mathbf{q}}\} + [2\xi_i\omega_i]\{\dot{\mathbf{q}}\} + [\omega_i^2]\{\mathbf{q}\} + [\Gamma]^T\{\ddot{\boldsymbol{\theta}}\} = \{\mathbf{O}_n\} \quad (6.2.1-b)$$

ただし,

$$[I] = [I_B] - m_B [\tilde{r}_{BS}] [\tilde{r}_{BS}]^T + [C_{b_A}^{b_S}]^T [I_A] [C_{b_A}^{b_S}] - m_A [\tilde{r}_{AS}] [\tilde{r}_{AS}]^T \in \mathbb{R}^{n_0 \times n_0} \quad (6.2.2-a)$$

$$[\Gamma] = [\tilde{r}_{HS}] [C_{b_A}^{b_S}]^T [\delta^0] + [C_{b_A}^{b_S}]^T [\delta^1] \in \mathbb{R}^{n_0 \times n} \quad (6.2.2-b)$$

式 (6.2.1-a) が衛星全体の姿勢運動 $\{\theta\}$ に関する運動方程式, 式 (6.2.1-b) が柔軟付着物の弾性振動 $\{q\}$ に関する運動方程式である. この記述は, 衛星全体の姿勢角である物理座標 $\{\theta\} \in \mathbb{R}^{n_0}$ と柔軟付着物の弾性振動をモード座標 $\{q\} \in \mathbb{R}^n$ で表したものが混在したものとなっているため, ハイブリッド座標法 (hybrid coordinate method) ^[6.1] と呼ばれる.

ここでは, 剛体モード次数は $n_0 = 3$ であり衛星全体の 3 軸姿勢運動 (ロール・ピッチ・ヨー) の自由度を表す. また, 運動方程式 (6.2.1-b) は, 衛星の姿勢運動が拘束されている場合 ($\{\ddot{\theta}\} = \{O_{n_0}\}$),

$$\{\ddot{q}\} + [2\xi_i \omega_i] \{\dot{q}\} + [\omega_i^2] \{q\} = \{O_n\} \quad (6.2.3)$$

であり, 正規モードを用いた多自由度系のモード座標での運動方程式と同様に表されている. 一般に, 柔軟付着物の振動モードは, 柔軟付着物を慣性空間に拘束した状態 (片持ちの境界条件) での有限要素解析や試験の結果から, n 次までの振動モードが得られていることを前提とする.

式 (6.2.2-a) の行列 $[I]$ は, 衛星本体の慣性行列 $[I_B]$ と柔軟付着物の慣性行列 $[I_A]$ からなる衛星全体の質量中心位置 S を基準とした慣性行列である.

式 (6.2.2-b) の行列 $[\Gamma]$ は, 衛星全体の剛体姿勢運動と柔軟付着物の弾性振動の干渉を表す行列である. 運動方程式 (6.2.1-a) と (6.2.1-b) はこの行列 $[\Gamma]$ で動的連成しており, これをカップリング行列 (coupling matrix) と呼ぶ. 運動方程式 (6.2.1-a) から, 衛星全体は柔軟付着物の振動により衛星全体の質量中心 S まわりに作用するトルク $-[\Gamma]\{\dot{q}\}$ を受け, 逆に, 運動方程式 (6.2.1-b) から, 柔軟付着物は衛星全体の姿勢運動によるトルク $-[\Gamma]^T\{\ddot{\theta}\}$ を受けることが分かる. このカップリング行列の中に現れる 0 次結合係数 $[\delta^0]$ および 1 次結合係数 $[\delta^1]$ は柔軟付着物の固有ベクトルに依存した量であり, これも有限要素解析の結果を利用して与えられる.

また, 方向余弦行列 $[C_{b_A}^{b_S}]$ は, 衛星本体に対する柔軟付着物の取り付け角度 φ が変化することによる座標変換を表している. 例えば, 太陽電池パドルが太陽指向のために回転を伴う場合などに考慮される. したがって, 角度 φ に依存して剛体姿勢運動と弾性振動の干渉の大きさが変化する. 例として, 柔軟付着物が衛星本体に対してピッチ軸まわりに角度 φ を伴うときを考えると, $[C_{b_A}^{b_S}]$ は以下のように表される.

$$[C_{b_A}^{b_S}] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (6.2.4)$$

衛星の姿勢制御系設計・解析の際には, 運動方程式 (6.2.1) (6.2.2) に現れる慣性パラメータ, 位置パラメータは衛星の設計情報として与えられる. また, 柔軟付着物のモーダルパラメータ (固有角振動数, 減衰比, 0 次結合係数, 1 次結合係数) などは, 柔軟付着物の有限要素解析や試験の結果から与えられる. なお, ここでは簡単化のため, 単一の柔軟付着物が衛星本体と結合した場合を扱ったが, 複数の柔軟付着物が結合した場合も運動方程式 (6.2.1) (6.2.2) と同様に表せる.

6.3 柔軟付着物を有する衛星のモード解析

衛星の姿勢制御系設計・解析のためのモード解析

姿勢制御系設計・解析のためには、まず柔軟付着物を含めた衛星全体の振動特性を把握しておく必要がある。そのため、6.2節で与えられた衛星モデルに対してモード解析を適用し衛星全体でのモーダルパラメータを求めておく。ここで注意すべきことは、運動方程式(6.2.1)で用いたモーダルパラメータは、柔軟付着物単体（あるいはいくつかに分解した要素）を慣性空間に固定した状態（片持ちの境界条件）での有限要素解析や試験の結果から得られたものであり、軌道上で衛星全体が剛体運動を伴うフリーフリーの境界条件とは本質的に異なる。したがって、軌道上での境界条件に応じたモーダルパラメータを求めておかなければならない。

柔軟付着物を有する衛星のモデリング方法には、拘束モードモデルと非拘束モードモデルの2種類がある。拘束モードモデル（constrained mode model）とは、物理座標で表された衛星の剛体運動とモード座標で表された柔軟付着物の弾性振動を一般化座標として合成したモデルであり、既に運動方程式(6.2.1)で与えられた。他方の非拘束モードモデル（unconstrained mode model）とは、柔軟付着物を含めた衛星全体を新たなモード座標で表したモデルである（図6.3.1）。一般に、まず、ある適当な振動モードまでのモーダルパラメータを用いて拘束モードモデル(6.2.1)が与えられる。この拘束モードモデルに固有値解析を適用することにより、非拘束モードモデル（柔軟付着物を有する衛星全体）でのモーダルパラメータを抽出する（図6.3.2）。そして、この非拘束モードモデルでのモーダルパラメータを用いて姿勢制御系設計・解析を行っていく。

本節からは、拘束モードモデルと非拘束モードモデルを用いてモード解析や伝達関数に関する基礎事項を説明し、これらの結果を簡単な衛星モデルに適用した場合も示す。

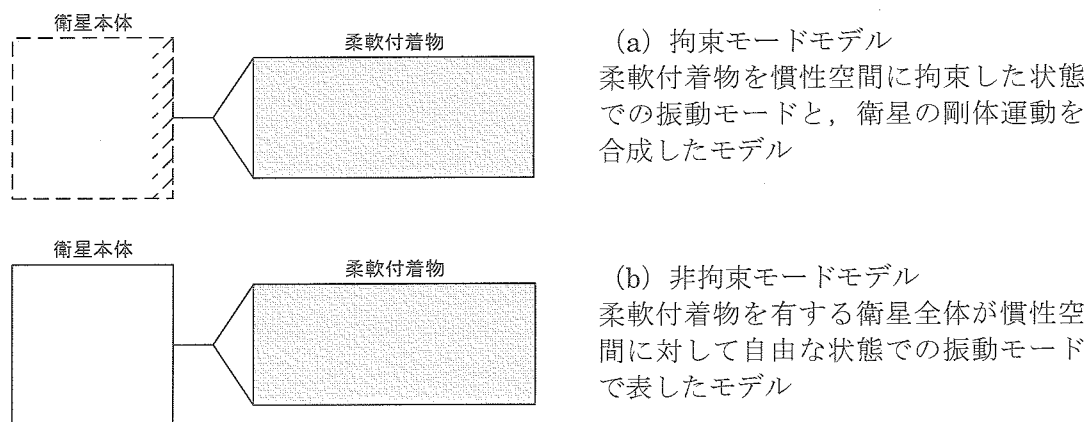


図 6.3.1 拘束モードモデルと非拘束モードモデルによる衛星のモデリング

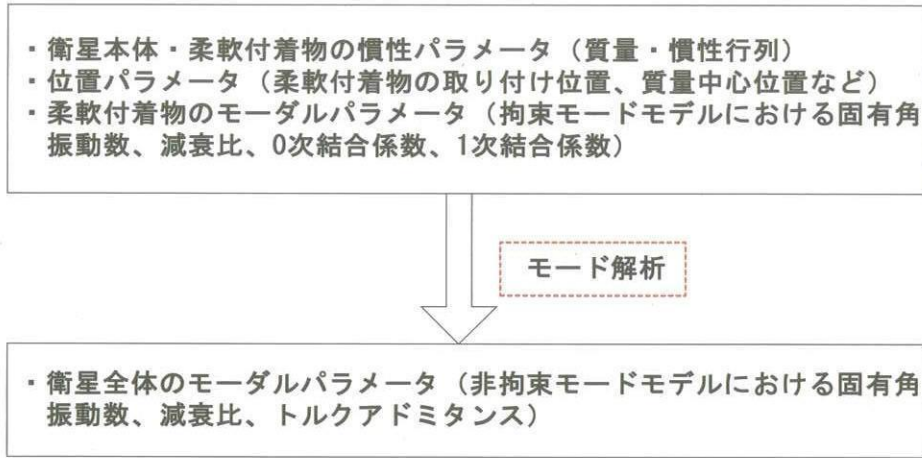


図 6.3.2 姿勢制御系設計・解析に必要な衛星全体のモーダルパラメータの抽出

拘束モードモデルと非拘束モードモデル

本節では、拘束モードモデルから非拘束モードモデルの記述方法を示す。運動方程式 (6.2.1) の減衰行列を省略して行列表示すると、一般のモード解析の場合と同様に質量行列・剛性行列からなる以下の運動方程式が得られる。

$$[M_s]\{\ddot{p}\} + [K_s]\{p\} = [L_s]\{t\} \quad (6.3.1)$$

ただし、

$$\{p\} = \begin{Bmatrix} \{\theta\} \\ \{q\} \end{Bmatrix} \in R^{n_0+n}, \quad [M_s] = \begin{bmatrix} [I] & [\Gamma] \\ [\Gamma]^T & [U_{nn}] \end{bmatrix} \in R^{(n_0+n) \times (n_0+n)} \quad (6.3.2-a)$$

$$[K_s] = \begin{bmatrix} [O_{n_0 n_0}] & [O_{n_0 n}] \\ [O_{nn_0}] & [\omega_i^2] \end{bmatrix} \in R^{(n_0+n) \times (n_0+n)}, \quad [L_s] = \begin{bmatrix} [U_{n_0 n_0}] \\ [O_{nn_0}] \end{bmatrix} \in R^{(n_0+n) \times n_0} \quad (6.3.2-b)$$

運動方程式 (6.3.1) は柔軟付着物を慣性空間に拘束した状態（片持ちの境界条件）での振動モードで表されているため、これを拘束モードモデル (constrained mode model) と呼ぶ (図 6.3.1 (a))。また、物理座標である衛星全体の姿勢角とモード座標である柔軟付着物の弾性振動を一般化座標 $\{p\}$ として用いているため、ハイブリッド座標モデル (hybrid coordinate model) とも呼ばれる。一般に、質量行列 $[M_s]$ は正定値であり、剛性行列 $[K_s]$ は剛体モード（衛星全体の剛体姿勢運動）を含むため半正定値である。

拘束モードモデル (6.3.1) は、衛星全体の剛体姿勢運動と柔軟付着物の弾性振動が動的連成したモデルとして表されているが、以下のようにモード解析を適用すれば、モード座標で表された非連成化したモデルが得られる (図 6.3.2)。運動方程式 (6.3.1) で、右辺にトルクが加わらない場合、

$$[M_s]\{\ddot{p}\} + [K_s]\{p\} = \{O_{n_0+n}\} \quad (6.3.3)$$

の一般化固有値問題を考える。第 6 章のモード解析と同様の手順により、

$$\sigma_i^2 [M_s]\{\psi_{si}^N\} = [K_s]\{\psi_{si}^N\} \quad (6.3.4)$$

を満たす $(n_0 + n)$ 個の固有値 σ_i と固有ベクトル $\{\psi_{si}^N\}$ が得られる。ただし、 $\{\psi_{si}^N\}$ は正規化された固有ベクトル（正規モードベクトル）を選んでおり、固有値に対応する正規モードベクトルを次数の低い方から左から順に並べた、以下の正規モード行列を構成する。

$$[\Psi_s^N] = [\{\psi_{s1}^N\} \quad \{\psi_{s2}^N\} \quad \cdots \quad \{\psi_{s(n_0+n)}^N\}] \in R^{(n_0+n) \times (n_0+n)} \quad (6.3.5)$$

式 (6.3.5) から、ハイブリッド座標 $\{p\} \in R^{n_0+n}$ から新しいモード座標 $\{\eta\} \in R^{n_0+n}$ への座標変換を以下のように定義する。

$$\{p\} = [\Psi_s^N] \{\eta\} \quad (6.3.6)$$

式 (6.3.6) を拘束モードモデルの運動方程式 (6.3.1) に代入し, $[\Psi_s^N]^T$ を掛けると, 以下のように新しいモード座標 $\{\eta\}$ で表された運動方程式が得られる.

$$\{\ddot{\eta}\} + [\sigma_i^2] \{\eta\} = [\Psi]^T \{t\} \quad (6.3.7)$$

ただし, 以下のようにおける.

$$[\Psi_s^N]^T [M_s] [\Psi_s^N] = [U_{(n_0+n)(n_0+n)}] \in R^{(n_0+n) \times (n_0+n)} \quad (6.3.8-a)$$

$$[\Psi_s^N]^T [K_s] [\Psi_s^N] = [\sigma_i^2] \in R^{(n_0+n) \times (n_0+n)} \quad (6.3.8-b)$$

$$[\Psi_s^N]^T [L_s] = [\Psi]^T \in R^{(n_0+n) \times n_0} \quad (6.3.8-c)$$

式 (6.3.7) (6.3.8) において, $[\sigma_i^2]$ は対角行列であるため衛星全体の剛体姿勢運動と柔軟付着物の弾性振動が非連成化されており, $(n_0 + n)$ 個の独立なモード座標 $\{\eta\}$ で表されている. 以上の結果から得られた固有角振動数 σ_i ($i=1,2,\dots,n_0+n$) は, 柔軟付着物を慣性空間に対する拘束から自由にした状態 (軌道上で衛星全体がフリーフリーとなる境界条件) に対応した固有角振動数である. そこで, 拘束モードモデル (6.3.1) に対して式 (6.3.7) は非拘束モードモデル (unconstrained mode model) と呼ばれる (図 6.3.1 (b)). 式 (6.3.2) で $[K_s]$ は半正定値であったため, 対角行列 $[\sigma_i^2]$ も半正定値であり $\sigma_i^2 = 0$ となる成分がある. これは, 柔軟付着物が弾性振動を伴わずに衛星全体が剛体姿勢運動をすることを表しており, これに対応する振動モードを剛体モード (rigid-body mode) と呼び, そのモード座標を $\{\eta_r\} \in R^{n_0}$ とおく. 他方, $\sigma_i^2 \neq 0$ である柔軟付着物の弾性振動を伴う振動モードを区別して弾性モード (elastic mode) と呼び, そのモード座標を $\{\eta_e\} \in R^n$ とおくことにする. また, 式 (6.3.8-c) の行列 $[\Psi] \in R^{n_0 \times (n_0+n)}$ は, 正規モードベクトルの計算結果から得られるものでありトルクアドミタンス (torque admittance) と呼ばれ, 衛星本体に作用するトルクから各振動モードへの応答振幅の比を表す.

実際には柔軟付着物の減衰効果が伴うので, モード減衰比 (modal damping ratio) ζ_i ($i=1,2,\dots,n_0+n$) を式 (6.3.7) に導入した以下の式が最終的な運動方程式である.

$$\{\ddot{\eta}\} + [2\zeta_i \sigma_i] \{\dot{\eta}\} + [\sigma_i^2] \{\eta\} = [\Psi]^T \{t\} \quad (6.3.9)$$

剛体モード $\{\eta_r\}$ に対応したモード減衰比 ζ_i ($i=1,\dots,n_0$) は 0 であるため, 減衰行列 $[2\zeta_i \sigma_i]$ も半正定値である. したがって, 運動方程式 (6.3.9) を剛体モード $\{\eta_r\}$ と弾性モード $\{\eta_e\}$ に分けて書けば, 以下のように表せる.

$$\begin{Bmatrix} \{\ddot{\eta}_r\} \\ \{\ddot{\eta}_e\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [O_{n_0 n_0}] & [O_{n_0 n}] \\ [O_{n n_0}] & [2\zeta_i \sigma_i] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{\eta}_r\} \\ \{\dot{\eta}_e\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [O_{n_0 n_0}] & [O_{n_0 n}] \\ [O_{n n_0}] & [\sigma_i^2] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\eta_r\} \\ \{\eta_e\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\Psi_r]^T \\ [\Psi_e]^T \end{bmatrix} \{t\} \quad (6.3.10)$$

さらに, 運動方程式 (6.3.10) を剛体モードと弾性モードの各成分 (各振動モード) に分けて書けば, 以下のように表せる.

$$\ddot{\eta}_{ri} = \{\psi_{ri}\}^T \{t\} \quad (i=1,\dots,n_0) : \text{剛体モード} \quad (6.3.11-a)$$

$$\ddot{\eta}_{ei} + 2\zeta_i \sigma_i \dot{\eta}_{ei} + \sigma_i^2 \eta_{ei} = \{\psi_{ei}\}^T \{t\} \quad (i=1,\dots,n) : \text{弾性モード} \quad (6.3.11-b)$$

ただし, 式 (6.3.10) (6.3.11) でトルクアドミタンス $[\Psi]$ の 1 行目から n_0 行目までに対応する剛体モード成分と, $(n_0 + 1)$ 行目から $(n_0 + n)$ 行目に対応する弾性モード成分に分けた. すなわち,

$$[\Psi]^T = \begin{bmatrix} [\Psi_r] & [\Psi_e] \end{bmatrix}^T \in R^{(n_0+n) \times n_0} \quad (6.3.12)$$

$[\Psi_r] \in R^{n_0 \times n_0}$ は剛体モードトルクアドミタンス (rigid-body mode torque admittance),

$[\Psi_e] \in R^{n_0 \times n}$ は弾性モードトルクアドミタンス (elastic mode torque admittance) と呼ばれる.

6.4 柔軟付着物を有する衛星の伝達関数

衛星の姿勢制御系設計・解析では、姿勢制御系の制御帯域や衛星に作用する外乱／内部擾乱（衛星搭載機器が振動源として発生する擾乱）による励振周波数など、注目すべき周波数帯域でのダイナミクスを把握しておく必要がある．そこで本節では、まず拘束モードモデルを周波数領域に変換し、柔軟付着物を有する衛星のダイナミクスについて周波数帯域で分類した評価を行う．また、拘束モードモデルと非拘束モードモデルでの伝達関数の記述方法についても説明する．

周波数領域におけるダイナミクス評価

拘束モードモデルの運動方程式 (6.2.1) をラプラス変換し衛星姿勢角 $\{\theta\}$ について整理すると、衛星本体に作用するトルク $\{t\}$ から衛星姿勢角 $\{\theta\}$ への伝達関数 $[G] \in \mathbb{R}^{n_0 \times n_0}$ は以下のように表される．

$$\{\theta(s)\} = \frac{1}{s^2} \left[[I] - s^2 [\Gamma] \cdot [E(s)] \cdot [\Gamma]^T \right]^{-1} \{t(s)\} \equiv [G(s)] \{t(s)\} \quad (6.4.1-a)$$

ここで、行列 $[E] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は柔軟付着物の固有角振動数 ω_i ($i=1,2,\dots,n$) とモード減衰比 ξ_i ($i=1,2,\dots,n$) に依存した、以下のような行列である．

$$[E(s)] = \left[s^2 + \left[2\xi_i \omega_i s + \omega_i^2 \right] \right]^{-1} \quad (6.4.1-b)$$

あるいは、 $[E(s)]$ が対角行列であることを考慮すると、式 (6.4.1-a) は以下のように弾性モード次数 n の重ね合わせで表せる．

$$\{\theta(s)\} = \frac{1}{s^2} \left[[I] - s^2 \sum_{i=1}^n \frac{\{\Gamma_i\} \{\Gamma_i\}^T}{s^2 + 2\xi_i \omega_i s + \omega_i^2} \right]^{-1} \{t(s)\} \equiv [G(s)] \{t(s)\} \quad (6.4.2)$$

ただし、 $\{\Gamma_i\} \in \mathbb{R}^{n_0}$ は $[\Gamma] \in \mathbb{R}^{n_0 \times n}$ の第 i 列目 ($i=1,2,\dots,n$) を表す．式 (6.4.1-a) あるいは式 (6.4.2) の逆行列の中は、慣性行列の次元 $[\text{kg} \cdot \text{m}^2]$ となっている．

ここで、衛星の単一軸まわりの剛体姿勢運動に対する伝達関数は、周波数の 2 乗に反比例し、慣性モーメントに反比例した ($\theta/t=1/Is^2$) ことを考慮すると、式 (6.4.1-a) は、柔軟付着物がダイナミクスに寄与する項として $-s^2 [\Gamma] \cdot [E(s)] \cdot [\Gamma]^T$ が付加された形となっている．このことは、柔軟付着物の任意の固有角振動数 ω_i ($i=1,2,\dots,n$) と、注目すべき任意の周波数 ω (伝達関数 $[G(s)]$ で $s=j\omega$ とおく) の大きさに依存して、伝達関数 $[G]$ に支配的なパラメータが異なることを意味する．例えば、励振周波数 ω のトルク $\{t\}$ で柔軟付着物を有する衛星が励振されているときを考えると、姿勢運動 $\{\theta\}$ に現れるダイナミクスは、以下の (Case 1) ～ (Case 3) のような分類ができる．

(Case 1) 励振周波数 ω が固有角振動数 ω_i の周波数帯域に比べて十分低い場合

伝達関数 $[G]$ で $s=j\omega \rightarrow 0$ とすると、 $-s^2 [\Gamma] \cdot [E(s)] \cdot [\Gamma]^T$ が伝達関数に寄与する効果が小さくなり、衛星の姿勢運動は近似的に以下のように表される．

$$\{\theta(s)\} \approx \frac{1}{s^2} [I]^{-1} \{t(s)\} \equiv [G^L(s)] \{t(s)\} \quad (6.4.3)$$

すなわち、この周波数帯域での伝達関数 $[G^L(s)]$ は柔軟付着物のモーダルパラメータに依存せず、柔軟付着物を剛体として扱った衛星全体の剛体姿勢運動と等価になる．したがって物理的には、励振周波数 ω のトルク $\{t\}$ が作用しても柔軟付着物による弾性振動は伴わずに、衛星全体の剛体姿勢運動を行うことになる．

(Case 2) 励振周波数 ω が固有角振動数 ω_i の周波数帯域に近い場合

励振周波数 ω が任意の固有角振動数 ω_i ($i=1,2,\dots,n$) に近いとき, $[E(s)]$ の i 番目の成分が極めて大きくなり, $-s^2[\Gamma] \cdot [E(s)] \cdot [\Gamma]^T$ が伝達関数に寄与する効果が支配的となる.

$$\{\theta(s)\} = \frac{1}{s^2} \left[[I] - s^2[\Gamma] \cdot [E(s)] \cdot [\Gamma]^T \right]^{-1} \{t(s)\} \equiv [G(s)] \{t(s)\} \quad (6.4.1-a)$$

すなわち, この周波数帯域での伝達関数 $[G(s)]$ は柔軟付着物のモーダルパラメータに大きく依存し, 衛星全体の剛体姿勢運動と柔軟付着物の弾性振動が相互に干渉しあう. もし, 衛星全体の固有角振動数に一致する励振周波数 ω のトルク $\{t\}$ が作用すると, 共振が起こり衛星全体の姿勢運動が大きな振幅となる.

(Case 3) 励振周波数 ω が固有角振動数 ω_i の周波数帯域に比べて十分高い場合

伝達関数 $[G]$ で $s = j\omega \rightarrow \infty$ とすると, $-s^2[\Gamma] \cdot [E(s)] \cdot [\Gamma]^T$ が伝達関数に寄与する効果が相対的に大きくなり, 衛星の姿勢運動は近似的に以下のように表される.

$$\{\theta(s)\} \approx \frac{1}{s^2} \left[[I] - [\Gamma] \cdot [\Gamma]^T \right]^{-1} \{t(s)\} \equiv [G^H(s)] \{t(s)\} \quad (6.4.4)$$

すなわち, この周波数帯域での伝達関数 $[G^H(s)]$ には, 衛星全体の慣性行列 $[I]$ からカップリング行列に関する $[\Gamma] \cdot [\Gamma]^T \in \mathbb{R}^{n_0 \times n_0}$ ($=$ 衛星全体の質量中心位置 S を基準とした柔軟付着物の慣性行列に相当する量) を除いた, 衛星本体のみの慣性行列が寄与する^[6.1]. したがって物理的には, 励振周波数 ω のトルク $\{t\}$ が作用しても柔軟付着物の剛性が十分低いいため衛星本体と柔軟付着物の干渉が現れず, 衛星本体のみの剛体姿勢運動を行うことになる.

拘束モードモデルでの伝達関数表記

まず, 拘束モードモデルでの伝達関数表記を示す. 衛星本体 3 軸 (ロール・ピッチ・ヨー) への制御トルク $\{t\}$ を操作量, 衛星姿勢角 $\{\theta\}$ を観測量とし, 減衰項も考慮して運動方程式 (6.3.1) を書き直すと, 拘束モードモデルにおける運動方程式と観測方程式の組は以下のようになる.

$$[M_s]\{\ddot{p}\} + [C_s]\{\dot{p}\} + [K_s]\{p\} = [L_s]\{t\} : \text{運動方程式} \quad (6.4.5-a)$$

$$\{\theta\} = [H_s]\{p\} : \text{観測方程式} \quad (6.4.5-b)$$

ただし, 式 (6.3.2) に加えて,

$$[H_s] = \begin{bmatrix} [U_{n_0 n_0}] & [O_{n_0 n}] \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_0 \times (n_0 + n)} \quad (6.4.6-a)$$

$$[C_s] = \begin{bmatrix} [O_{n_0 n_0}] & [O_{n_0 n}] \\ [O_{nn_0}] & [2\xi_i \omega_i] \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n_0 + n) \times (n_0 + n)} \quad (6.4.6-b)$$

であり, 式 (6.3.2) の行列 $[L_s]$ と比較すると,

$$[L_s] = [H_s]^T \quad (6.4.7)$$

となっている. これは物理的には, 衛星への操作量 $\{t\}$ と観測量 $\{\theta\}$ の数が同じで, かつ同一の自由度方向にあることを意味しており, 式 (6.4.7) が成り立つ系をコロケーション系 (collocation system) という. 実際の衛星では, 衛星本体上に搭載されたアクチュエータ (ホイール/スラスタなど) で 3 軸の姿勢制御トルクを与え, 衛星本体上に搭載されたセンサで 3 軸の姿勢角を検出することを意味している.

拘束モードモデル (6.4.5) をラプラス変換し衛星姿勢角 $\{\theta\}$ について整理すると, 衛星本体に作用するトルク $\{t\}$ から衛星姿勢角 $\{\theta\}$ への伝達関数 $[G^c] \in \mathbb{R}^{n_0 \times n_0}$ は, 以下のように表される.

$$\{\theta\} = [G^c(s)] \{t\} \quad (6.4.8-a)$$

$$[G^c(s)] = [H_s]([M_s]s^2 + [C_s]s + [K_s])^{-1}[L_s] \quad (6.4.8-b)$$

非拘束モードモデルでの伝達関数表記

次に、非拘束モードモデルでの伝達関数表記を示す。ここでもコロケーション系を仮定しているので、座標変換式 (6.3.6) を、拘束モードモデルの観測方程式 (6.4.5-b) に代入すると、

$$\{\theta\} = [H_s][\Psi_s^N]\{\eta\} = [\Psi]\{\eta\} \quad (6.4.9-a)$$

であるので、さらに剛体モードと弾性モードに対応する各成分行列に分けて変形すると、

$$\{\theta\} = \begin{bmatrix} [U_{n_0 n_0}] & [O_{n_0 n}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\Psi_{s11}^N] & [\Psi_{s12}^N] \\ [\Psi_{s21}^N] & [\Psi_{s22}^N] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\eta_r\} \\ \{\eta_e\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\Psi_{s11}^N] & [\Psi_{s12}^N] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\eta_r\} \\ \{\eta_e\} \end{Bmatrix}$$

式 (6.3.12) と比較すると、

$$= \begin{bmatrix} [\Psi_r] & [\Psi_e] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\eta_r\} \\ \{\eta_e\} \end{Bmatrix} = [\Psi_r]\{\eta_r\} + [\Psi_e]\{\eta_e\} \quad (6.4.9-b)$$

のように、観測量である衛星姿勢角 $\{\theta\}$ は剛体モード成分 $\{\eta_r\}$ と弾性モード成分 $\{\eta_e\}$ の重ね合わせで表せる。物理的には、衛星全体の剛体姿勢運動に柔軟付着物による弾性振動の影響が入り込んだ姿勢角を観測していることになる。以上より、非拘束モードモデルにおける運動方程式 (6.3.9) と観測方程式 (6.4.9-a) の組は以下ようになる。

$$\{\ddot{\eta}\} + [2\zeta_i \sigma_i] \{\dot{\eta}\} + [\sigma_i^2] \{\eta\} = [\Psi]^T \{t\} : \text{運動方程式} \quad (6.4.10-a)$$

$$\{\theta\} = [\Psi] \{\eta\} : \text{観測方程式} \quad (6.4.10-b)$$

非拘束モードモデル (6.4.10) をラプラス変換し衛星姿勢角 $\{\theta\}$ について整理すると、衛星本体に作用するトルク $\{t\}$ から衛星姿勢角 $\{\theta\}$ への伝達関数 $[G^u] \in \mathbb{R}^{n_0 \times n_0}$ は、以下のように表される。

$$\{\theta\} = [G^u(s)] \{t\} \quad (6.4.11-a)$$

$$[G^u(s)] = [\Psi](s^2 + [2\zeta_i \sigma_i]s + [\sigma_i^2])^{-1}[\Psi]^T \quad (6.4.11-b)$$

さらにここでは、次節のために1入力1出力系の場合を考える。すなわち、衛星本体3軸のうちのいずれか1軸 k にトルク t_k ($k=1, \text{or}, 2, \text{or}, 3$) が作用し、その軸に対応する姿勢角 θ_k ($k=1, \text{or}, 2, \text{or}, 3$) が観測されるとき、非拘束モードモデル (6.4.10) は以下のようになる。

$$\{\ddot{\eta}\} + [2\zeta_i \sigma_i] \{\dot{\eta}\} + [\sigma_i^2] \{\eta\} = \{\Psi_k\}^T t_k : \text{運動方程式} \quad (6.4.12-a)$$

$$\theta_k = \{\Psi_k\} \{\eta\} : \text{観測方程式} \quad (6.4.12-b)$$

ただし、 $\{\Psi_k\} \in \mathbb{R}^{1 \times (n_0+n)}$ は $[\Psi] \in \mathbb{R}^{n_0 \times (n_0+n)}$ の k 行目 ($k=1, \text{or}, 2, \text{or}, 3$) のみを抜き出した行列である。このとき、1入力1出力系の伝達関数 G_k^u ($k=1, \text{or}, 2, \text{or}, 3$) は、以下のように記述できる。

$$G_k^u(s) = \frac{\theta_k(s)}{t_k(s)} = \sum_{i=1}^{n_0+n} \frac{\{\Psi_k\} \{\Psi_k\}^T}{s^2 + 2\zeta_i \sigma_i s + \sigma_i^2} = \sum_{i=1}^{n_0+n} \frac{\Psi_{ki}^2}{s^2 + 2\zeta_i \sigma_i s + \sigma_i^2} \quad (6.4.13-a)$$

さらに、伝達関数 (6.4.13-a) で $i=1, 2, \dots, n_0$ が剛体モードに対応し、 $i=n_0+1, n_0+2, \dots, n_0+n$ が弾性モードに対応することを考慮すると、一般に、以下のように分けて書くことができる。

$$G_k^u(s) = \sum_{i=1}^{n_0} \frac{\Psi_{rki}^2}{s^2} + \sum_{i=1}^n \frac{\Psi_{eki}^2}{s^2 + 2\zeta_i \sigma_i s + \sigma_i^2} \quad (6.4.13-b)$$

伝達関数 (6.4.13-b) の右辺第1項が剛体モード、第2項が弾性モードに対応し、伝達関数もこれらの重ね合わせで表記できる。このように伝達関数が n 個の弾性モードの和として

表記できるため、解析対象の周波数帯域から大きく離れた固有角振動数に対応する弾性モードは省略し、より低次の弾性モードまでで近似することができる。

以上より、拘束モードモデルおよび非拘束モードモデルにおける伝達関数表記が導けた。この結果から、次節では柔軟付着物を有する衛星のダイナミクスについての簡単な例として、弾性モード次数 $n=1$ の場合を説明する。

6.5 1自由度マス・ダンパ・バネが付着した衛星の振動

本節では、柔軟付着物を1自由度振動系として表した簡易衛星モデルを考え、前節までに得られた結果を確認する。図6.5.1のように、質量が無視できる棒の先端に、一つの集中質量 m が衛星固定座標系 $\{b_B\}$ ($x_B - y_B - z_B$) の原点から x_B 方向 L の位置でバネ k 、ダンパ c で結合された簡易衛星モデル（以下、衛星－マス・ダンパ・バネ系と呼ぶ）を考える。集中質量 m は、並進 y_B 方向に微小な弾性変位 w をする。また、衛星本体には z_B 軸まわりのトルク t が作用する。衛星全体は、マス－ダンパ－バネの振動とトルクの影響を受けることにより、慣性座標系 $\{b_O\}$ ($x_O - y_O - z_O$) に対して単一 (z_O) 軸まわりの微小な姿勢運動を行い、このとき観測される衛星姿勢角を θ とする。したがって、本系は1入力1出力系でコロケーションが成り立つ系である。

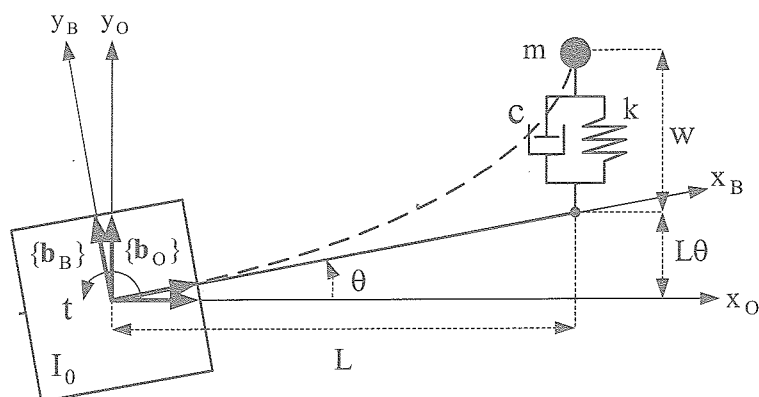


図 6.5.1 1自由度マス・ダンパ・バネが付着した簡易衛星モデル

運動方程式の導出

衛星－マス・ダンパ・バネ系の運動方程式は以下ようになる^[6.2]。

$$I\ddot{\theta} + \delta\ddot{w} = t \quad (6.5.1-a)$$

$$m\ddot{w} + c\dot{w} + kw + \delta\ddot{\theta} = 0 \quad (6.5.1-b)$$

ただし、以下のようにおいた。

$$I = I_0 + I_p = I_0 + mL^2 \quad [\text{kg} \cdot \text{m}^2] \quad (6.5.2-a)$$

$$\delta = mL \quad [\text{kg} \cdot \text{m}] \quad (6.5.2-b)$$

I_0 は衛星本体の z_B 軸まわりの慣性モーメント、 I_p は集中質量 m の z_B 軸まわりの慣性モーメント、 I は衛星全体の z_B 軸まわりの慣性モーメントであり、 δ は衛星全体の剛体姿勢運動 θ とマス・ダンパ・バネの弾性振動 w との動的連成を表すパラメータである。運動方程式 (6.5.1) は、多自由度系の場合の拘束モードモデルにおける運動方程式 (6.2.1) と同様の形をしていることが分かる（ただし、本節での w はモード座標ではなく単に弾性変位を表す）。前節までの記号に従えば、剛体モード次数 $n_0=1$ （衛星全体の単一軸まわりの姿勢運

動), 弾性モード次数 $n=1$ の場合に相当し, 連続体としての柔軟付着物の弾性振動を 1 次振動モードのみで近似した場合とも考えられる.

拘束モードモデルおよび非拘束モードモデルでの伝達関数表記

次に, 拘束モードモデルにおける伝達関数と非拘束モードモデルにおける伝達関数を導く. 運動方程式 (6.5.1) をラプラス変換し, トルク t から姿勢角 θ への伝達関数を導くと, 以下のようになる.

$$\frac{\theta(s)}{t(s)} = \frac{1}{Is^2} \cdot \frac{ms^2 + cs + k}{\left(m - \frac{\delta^2}{I}\right)s^2 + cs + k} = \frac{1}{Is^2} \cdot \frac{s^2 + 2\xi_1\omega_1s + \omega_1^2}{\left(1 - \frac{\delta^2}{mI}\right)s^2 + 2\xi_1\omega_1s + \omega_1^2} \equiv G^c(s) \quad (6.5.3)$$

ただし,

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad [\text{rad/s}], \quad \xi_1 = \frac{c}{2\sqrt{mk}} \quad [-] \quad (6.5.4)$$

とおいた. 式 (6.5.3) は拘束モードモデルでの運動方程式 (6.5.1) から導かれた伝達関数であり, 式 (6.5.4) の ω_1 と ξ_1 は, それぞれ拘束モードモデルでの 1 次の固有角振動数と減衰比を表す. 伝達関数 (6.5.3) の分母=0 を解けば極 (共振点) が得られ, 分子=0 を解けば零点 (反共振点) が得られる.

ここで, 伝達関数 (6.5.3) の分母で $1 - \frac{\delta^2}{mI} = \frac{I_0}{I}$ であることを考慮して分母・分子を衛星本体と衛星全体の慣性モーメント比 $\frac{I_0}{I}$ で割り, 新しい定数 σ_1, ζ_1 を以下のように定義する.

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{I}{I_0}} \cdot \omega_1 \quad [\text{rad/s}], \quad \zeta_1 = \sqrt{\frac{I}{I_0}} \cdot \xi_1 \quad [-] \quad (6.5.5)$$

伝達関数 (6.5.3) をこれら σ_1, ζ_1 の組で表記しなおすと, 以下のようになる.

$$\frac{\theta(s)}{t(s)} = \frac{1}{I_0Is^2} \cdot \frac{(I_0 + I_p)s^2 + 2I_0\zeta_1\sigma_1s + I_0\sigma_1^2}{s^2 + 2\zeta_1\sigma_1s + \sigma_1^2} = \frac{1}{Is^2} \cdot \frac{\left(1 + \frac{I_p}{I_0}\right)s^2 + 2\zeta_1\sigma_1s + \sigma_1^2}{s^2 + 2\zeta_1\sigma_1s + \sigma_1^2} \quad (6.5.6-a)$$

伝達関数 (6.5.6-a) の最右辺はただちに部分分数に分けることができ, 以下のようにも表記できる.

$$\frac{\theta(s)}{t(s)} = \frac{1}{Is^2} + \frac{I_p}{I_0I} \cdot \frac{1}{s^2 + 2\zeta_1\sigma_1s + \sigma_1^2} = \frac{\psi_r^2}{s^2} + \frac{\psi_e^2}{s^2 + 2\zeta_1\sigma_1s + \sigma_1^2} \equiv G^u(s) \quad (6.5.6-b)$$

ただし,

$$\psi_r^2 = \frac{1}{I} \quad [\text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}] \quad (6.5.7-a)$$

$$\psi_e^2 = \frac{I_p}{I_0I} \quad [\text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}] \quad (6.5.7-b)$$

とおいた. 伝達関数 (6.5.6-b) は, 第 1 項の剛体モードと第 2 項の弾性モードの重ね合わせで書くことができ, 多自由度系の場合に導かれた非拘束モードモデルにおける伝達関数 (6.4.13-b) と比較すると, σ_1 と ζ_1 はそれぞれ非拘束モードモデルでの 1 次の固有角振動数と減衰比に対応することが分かる. 拘束モードモデルでの 1 次の固有角振動数 ω_1 が衛星全体の姿勢運動を拘束したときの集中質量とバネによる固有角振動数 (6.5.4) であったのに対して, σ_1 は衛星全体の姿勢運動を自由にしたときの衛星-マス・ダンパ・バネ系全体の固有角振動数であり, 式 (6.5.5) のように衛星の慣性モーメントに依存する. 伝達関数

(6.5.6-a) の分母=0 を解けば極（共振点）が得られ、分子=0 を解けば零点（反共振点）が得られる。また、式 (6.5.7) の ψ_r は剛体モードトルクアドミタンス、 ψ_e は弾性モードトルクアドミタンスに対応し、これらのトルクアドミタンスは衛星に加わるトルクから剛体モードおよび弾性モード1次への応答振幅の比を表している。

次に、拘束モードモデルと非拘束モードモデルで用いたモーダルパラメータ間の関係を導いておく。拘束モードモデルにおける伝達関数 G^c と非拘束モードモデルにおける伝達関数 G^u は、衛星－マス・ダンパ・バネ系の伝達関数の異なる表記方法であり、これらは本質的に等しいものである。そこで、式 (6.5.3) の分母・分子を $1 - \frac{\delta^2}{mI}$ で割ったものと、式 (6.5.6-a)

の分母・分子を $1 + \frac{I_p}{I_0} = 1 + I\psi_e^2$ で割ったものを比較すると、

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{\delta^2}{mI}\right) I s^2} \cdot \frac{s^2 + 2\xi_1 \omega_1 s + \omega_1^2}{s^2 + \frac{2\xi_1 \omega_1}{1 - \frac{\delta^2}{mI}} s + \frac{\omega_1^2}{1 - \frac{\delta^2}{mI}}} = \frac{1 + I\psi_e^2}{I s^2} \cdot \frac{s^2 + \frac{2\xi_1 \sigma_1}{1 + I\psi_e^2} s + \frac{\sigma_1^2}{1 + I\psi_e^2}}{s^2 + 2\xi_1 \sigma_1 s + \sigma_1^2} \quad (6.5.8)$$

であるから、各パラメータ間には以下の関係があることが分かる。すなわち、拘束モードモデルにおける固有角振動数 ω_1 と非拘束モードモデルにおける固有角振動数 σ_1 の間には、

$$\omega_1 = \frac{\sigma_1}{\sqrt{1 + I\psi_e^2}} = \sqrt{\frac{I_0}{I}} \cdot \sigma_1 \quad [\text{rad/s}], \quad \sigma_1 = \frac{\omega_1}{\sqrt{1 - \frac{\delta^2}{mI}}} = \sqrt{\frac{I}{I_0}} \cdot \omega_1 \quad [\text{rad/s}] \quad (6.5.9)$$

拘束モードモデルにおける減衰比 ξ_1 と非拘束モードモデルにおける減衰比 ζ_1 の間には、

$$\xi_1 = \frac{\zeta_1}{\sqrt{1 + I\psi_e^2}} = \sqrt{\frac{I_0}{I}} \cdot \zeta_1 \quad [-], \quad \zeta_1 = \frac{\xi_1}{\sqrt{1 - \frac{\delta^2}{mI}}} = \sqrt{\frac{I}{I_0}} \cdot \xi_1 \quad [-] \quad (6.5.10)$$

カップリングパラメータ δ と弾性モードトルクアドミタンス ψ_e の間には、

$$\delta = \frac{\sqrt{m} \cdot I\psi_e}{\sqrt{1 + I\psi_e^2}} \quad [\text{kg} \cdot \text{m}], \quad \psi_e = \frac{\delta}{\sqrt{I \cdot (mI - \delta^2)}} \quad [\text{kg}^{-\frac{1}{2}} \cdot \text{m}^{-1}] \quad (6.5.11)$$

式 (6.5.9) から、一般に $I > I_0$ であるので、非拘束モードモデルにおける固有角振動数 σ_1 が、拘束モードモデルにおける固有角振動数 ω_1 よりも大きい。衛星の剛体姿勢運動とマス・ダンパ・バネによる弾性振動の干渉がない場合 ($\delta = 0$)、これらは等しい ($\sigma_1 = \omega_1$)。

周波数領域におけるダイナミクス評価

次に、6.2 節と同様に各周波数帯域で衛星－マス・ダンパ・バネ系に現れる姿勢運動のダイナミクスについて評価する。式 (6.5.3) で、励振周波数を ω とし $s = j\omega$ とおく。まず、励振周波数が集中質量とバネによる固有角振動数よりも十分低い ($\omega \ll \omega_1$) 周波数帯域では、伝達関数 G^c の大きさは近似的に以下ようになる。

$$|G^c| \approx \frac{1}{I\omega^2} \quad (6.5.12)$$

すなわち、この周波数帯域のダイナミクスは衛星全体の剛体姿勢運動と等価である。

一方、励振周波数が集中質量とバネによる固有角振動数よりも十分高い帯域 ($\omega \gg \omega_1$) では、

$$|G^c| \approx \frac{1}{\left(I - \frac{\delta^2}{m}\right)\omega^2} = \frac{1}{I_0\omega^2} \quad (6.5.13)$$

すなわち、この周波数帯域のダイナミクスは衛星本体のみの剛体姿勢運動と等価である。

以上 6.5 節で述べた衛星ーマス・ダンパ・バネ系に対して、例題 6-1～例題 6-3 で具体的な数値計算例を示す。

【例題 6-1】衛星ーマス・ダンパ・バネ系の固有値解析

まず、衛星ーマス・ダンパ・バネ系の振動特性を把握するため、運動方程式 (6.5.1) に対して MATLAB による固有値解析を適用する。ただし、各パラメータは表 6.5.1 の値を使用する。

運動方程式 (6.5.1) の減衰項を無視して、行列形式 (6.3.3) のように表記すると以下のようになる。

$$\begin{bmatrix} I & \delta \\ \delta & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{w} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.5.14)$$

これに、MATLAB による固有値解析を適用し数値的に固有値を求めると、表 6.5.2 のように非拘束モードモデルにおける 2 つの固有角振動数 σ_0 と σ_1 が得られる。

また、表 6.5.2 の非拘束モードモデルにおける 1 次の固有振動数 f_1 は、式 (6.5.9) の関係から解析的に求めることもできて、

$$f_1 = \frac{\lambda_1}{\sqrt{1 - \frac{\delta^2}{mI}}} = \sqrt{\frac{I}{I_0}} \cdot \lambda_1 = 2.345 \cdot \lambda_1 = 0.117 \text{Hz} \quad (6.5.15)$$

となり、 $f_1 > \lambda_1$ であることが確認された。

表 6.5.1 衛星ーマス・ダンパ・バネ系の設定パラメータ

| | |
|---|---|
| 衛星本体の慣性モーメント | $I_0 = 5000 \text{kgm}^2$ |
| 集中質量の取り付け位置 | $L = 15 \text{m}$ |
| 集中質量の質量 | $m = 100 \text{kg}$ |
| 衛星本体質量中心位置に対する集中質量の慣性モーメント | $I_p = mL^2 = 22500 \text{kgm}^2$ |
| 衛星ーマス・ダンパ・バネ系の慣性モーメント | $I = I_0 + I_p = 27500 \text{kgm}^2$ |
| 集中質量とバネによる固有振動数 | $\lambda_1 = 0.05 \text{Hz}$ |
| 集中質量とバネによる固有角振動数 (拘束モードモデルによる固有角振動数) | $\omega_1 = 2\pi\lambda_1 = 0.314 \text{rad/s}$ |
| バネ定数 | $k = \omega_1^2 m = 9.870 \text{N/m}$ |
| 減衰比 (拘束モードモデルによる減衰比) | $\xi_1 = 0.001$ |
| 減衰係数 | $c = 2\sqrt{mk}\xi_1 = 0.063 \text{N/m/s}$ |
| カップリングパラメータ | $\delta = mL = 1500 \text{kgm}$ |

表 6.5.2 衛星－マス・ダンパ・バネ系の固有値解析結果

| 振動モード | 固有角振動数 [rad/s] | 固有振動数 [Hz] |
|-----------|--------------------|---------------|
| 剛体モード | $\sigma_0 = 0.0$ | $f_0 = 0.0$ |
| 弾性モード 1 次 | $\sigma_1 = 0.737$ | $f_1 = 0.117$ |

【例題 6-2】衛星－マス・ダンパ・バネ系の周波数応答

次に、表 6.5.1 のパラメータを用いて、衛星－マス・ダンパ・バネ系の周波数応答を MATLAB で確認する。拘束モードモデルにおける伝達関数 (6.5.3)、あるいは非拘束モードモデルにおける伝達関数 (6.5.6-b) から周波数応答 (ボード線図) を描くと、図 6.5.2 のようになる。図 6.5.2 の共振点 (= 非拘束モードモデルにおける 1 次の固有振動数) は $f_1 = 0.117\text{Hz}$ であり、軌道上の衛星に対する姿勢制御系設計・解析の際に注意すべき周波数である。一方、反共振点 (= 拘束モードモデルにおける 1 次の固有振動数) は $\lambda_1 = 0.05\text{Hz}$ であり、剛体モードと弾性モード 1 次が互いに逆相で打ち消しあっているため、周波数応答の大きさは零になる。一般に、柔軟付着物の弾性モード次数が n の場合、反共振点と共振点が交互に n 個現れる。

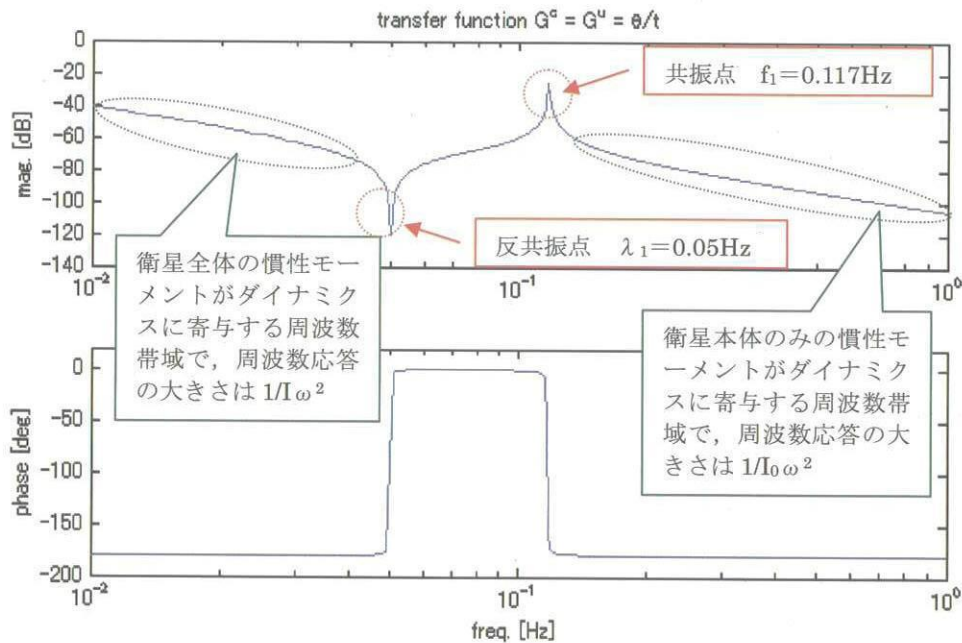


図 6.5.2 衛星－マス・ダンパ・バネ系の周波数応答

【例題 6-3】衛星－マス・ダンパ・バネ系の時刻歴応答シミュレーション

最後に、拘束モードモデルにおける伝達関数 (6.5.3) と非拘束モードモデルにおける伝達関数 (6.5.6-b) のブロック線図表示を考え、これを利用して MATLAB/SIMULINK による時刻歴応答シミュレーションを行う。ここでは、以下の (1) ～ (4) の手順で考えていく。

- (1) 拘束モードモデルにおける伝達関数 (6.5.3) を変形すると、以下のように表せる。

$$\frac{\theta(s)}{t(s)} = \frac{G^r(s)}{1 - G^r(s) \cdot G^{cc}(s)} \equiv G^c(s) \quad (6.5.16)$$

ただし、

$$G^r(s) = \frac{1}{Is^2} : \text{剛体モードを表す項} \quad (6.5.17-a)$$

$$G^e(s) = \frac{\delta^2 s^4}{m(s^2 + 2\xi_1 \omega_1 s + \omega_1^2)} : \text{弾性モードを表す項} \quad (6.5.17-b)$$

(2) 一方、非拘束モードモデルにおける伝達関数 (6.5.6-b) は、以下のように表せた。

$$\frac{\theta(s)}{t(s)} = G^r(s) + G^{ue}(s) \equiv G^u(s) \quad (6.5.18)$$

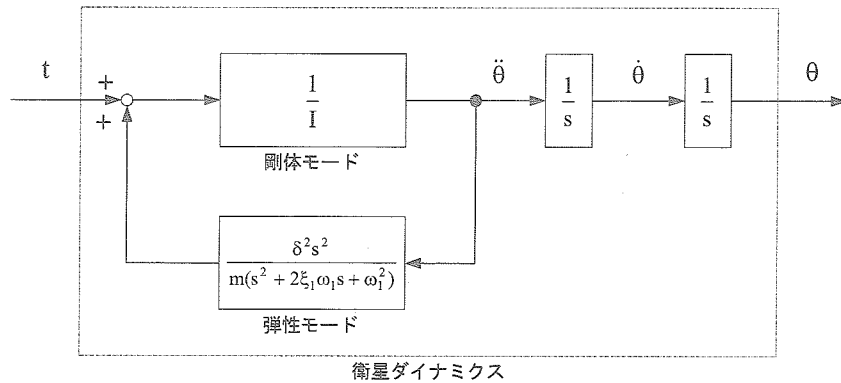
ただし、

$$G^r(s) = \frac{1}{Is^2} : \text{剛体モードを表す項} \quad (6.5.19-a)$$

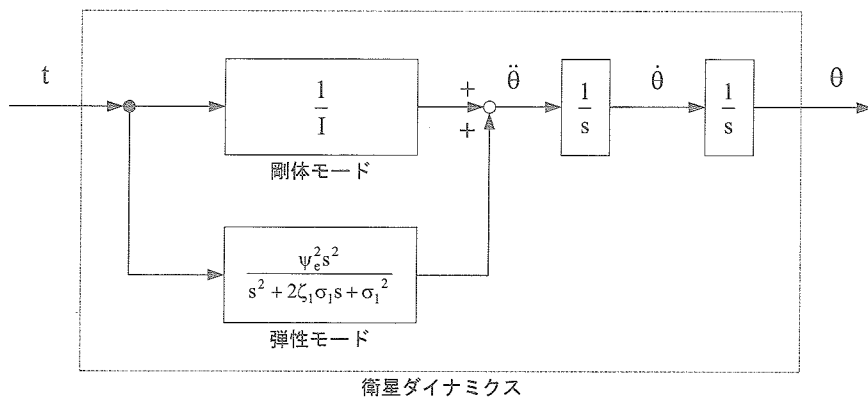
$$G^{ue}(s) = \frac{\psi_e^2}{s^2 + 2\xi_1 \sigma_1 s + \sigma_1^2} : \text{弾性モードを表す項} \quad (6.5.19-b)$$

(3) 拘束モードモデルにおける伝達関数 (6.5.16) (6.5.17) および非拘束モードモデルにおける伝達関数 (6.5.18) (6.5.19) は、それぞれ図 6.5.3 (a) (b) のように剛体モードと弾性モードのブロックに分解して表示することができる。

一般に多自由度系の場合の弾性モードは、それぞれ式 (6.4.2) および式 (6.4.13-b) のように全弾性モード次数 n の和として表せたので、図 6.5.3 (a) (b) にそれぞれ並列に加え合わせることで表せる。また、 $\theta, \dot{\theta}$ から t へ姿勢制御系のブロック (ゲイン, フィルタなど) を介してフィードバック制御系を構成すれば、 t を姿勢制御トルクとした姿勢制御系も考慮することができる。



(a) 拘束モードモデル



(b) 非拘束モードモデル

図 6.5.3 衛星—マス・ダンパ・バネ系のブロック線図表示

(4) 図 6.5.3 (a) あるいは (b) を MATLAB/SIMULINK で実装すれば、時刻歴応答シミュレーションを行うことができる。外乱トルク t の例として、図 6.5.4 (a) のように 10 秒後に大きさ 1Nm のインパルス状入力が作用するとする。このとき、衛星姿勢角 θ と姿勢レート $\dot{\theta}$ の時刻歴応答を求めると、それぞれ図 6.5.4 (b) (c) のようになる。衛星全体は剛体姿勢運動のために姿勢角 θ が増加するとともに、衛星全体の弾性モード 1 次の固有振動数 $f_1=0.117\text{Hz}$ で振動している。

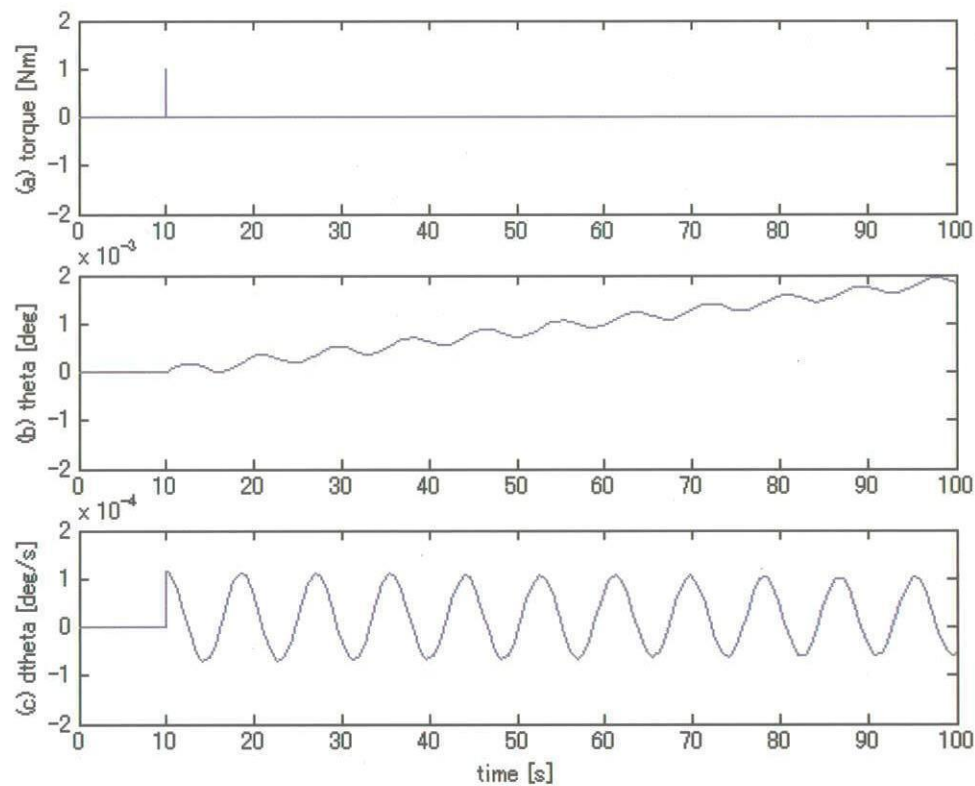


図 6.5.4 衛星－マス・ダンパ・バネ系の時刻歴応答シミュレーション結果

6.6 柔軟付着物を有する衛星の姿勢制御

宇宙機の姿勢制御系の特性で本質的なものは、目標姿勢への追従性、擾乱に対するロバスト性（頑健性）、姿勢安定性である。これらの概意と関連する設計仕様項目の例を表 6.6.1 に示す。ミッション達成のために必要とされる事項、すなわちミッション要求を、表 6.6.1 に示したような姿勢制御系が持つべき特性量として整理したものを姿勢制御系のシステム要求という。制御系設計者は、システム要求を満足させることを念頭に設計を進める。本節では、このような制御系設計の一項目である制御則の設計について述べる。

宇宙機の姿勢制御則設計は、古典制御理論における周波数整形の考えに基づいて行われるのが一般的である。これは、宇宙機のダイナミクスは 6.4 節で述べたように線形プラントとして近似できるため、ボード線図等を用いて周波数特性（ゲイン特性および位相特性）を表現でき、これに線形フィードバック補償器の周波数特性を重ね合わせることで、全体の周波数特性を希望する特性に整形するものである。線形フィードバック補償器を構成する要素としては、PD 制御器や各種線形フィルタがあり、これらを複数個組み合わせることで周波数整形が行われる。各補償要素の機能について、数値例を用いながら説明する。

表 6.6.1 制御性能の指標

| 項目 | 概意 | 設計仕様項目の例 |
|-------|--|--|
| 追従性 | 姿勢角や姿勢角速度で表される姿勢状態が、それらの時間プロファイルで与えられる目標値にいかにか精度よく追従できるか | <ul style="list-style-type: none">定常制御時の定常偏差姿勢マヌーバ時の収束性（収束時間） |
| ロバスト性 | 各種擾乱に抗して、所要の姿勢を維持できるか。 | <ul style="list-style-type: none">過渡的な擾乱に対する過渡応答特性 |
| 安定性 | 単位時間当たりの姿勢変動幅。 | <ul style="list-style-type: none">定常制御時の単位時間当たりの姿勢変動幅 |

(1) PD 補償：偏差を補償する方法として、まずは偏差のフィードバックを行うことが考えられる。さらに、過渡応答特性を改善することと併せて考えると、次式で記述される PD 補償が有効である。

$$G(s)=K_L\left(1+\frac{s}{\omega_1}\right) \tag{6.6.1}$$

式(6.5.6-b)からわかるように、宇宙機ダイナミクスの剛体モードは、複素平面上の原点に 2 次の極をもっており不安定である。制御則設計では、まずこの剛体モードにのみ着目する。剛体モードに式(6.6.1)のフィードバックを施したときの閉ループ系のクロスオーバー周波数（固有周波数） ω_c と減衰比 ζ_c は、次式のように書き表される。

$$\omega_c = \sqrt{\frac{K_L}{J}}, \quad \zeta_c = \frac{\omega_c}{2\omega_1} \quad (6.6.2)$$

減衰比は 1 前後の値に設定することが多い。たとえば，減衰比が 1 の場合，クロスオーバー周波数でのゲイン特性は定常ゲインの 1/2 (6dB 低下) となる。また，閉ループ系のゲインが定常ゲインの $1/\sqrt{2} \approx 0.707$ 倍 (3dB 低下) になる周波数をバンド幅 (帯域幅) といい，速応性の指標となる。

- (2) ローパスフィルタ：高周波数帯域のゲインを抑制するには，ローパスフィルタを用いる。次数が 1 次のものまたは 2 次のものがよく用いられる。1 次のローパスフィルタは一般に次式で記述される。

$$G(s) = \frac{1}{s/\omega_1 + 1}$$

また，2 次のローパスフィルタは次式で記述される。

$$G(s) = \frac{1}{(s/\omega_2)^2 + 2\zeta(s/\omega_2) + 1}$$

例題 6-2 で示したように宇宙機のダイナミクスは，構造の柔軟性により共振点をもつため，姿勢のフィードバック量には高い周波数成分が含まれる。このような振動モードと制御系との干渉を防ぐために，ローパスフィルタが有効である。

- (3) 積分補償：定常偏差を抑制するためには，次式で記述される積分補償が有効である。

$$G(s) = \frac{s/\omega_I + 1}{s}$$

主に自然外乱などの超低周波あるいは直流の擾乱トルクによって引き起こされる定常偏差を補償するために用いられる。

- (4) 位相遅れ補償：出力信号の位相が入力信号の位相より遅れるような要素を位相遅れ要素という。この伝達関数は

$$G(s) = \frac{T_a s + 1}{T_b s + 1} \quad (T_a < T_b)$$

である。高周波数のゲインを犠牲にして $\omega = \sqrt{T_a/T_b}$ (位相遅れが最大となる角周波数) 近傍の位相を遅らせようとするものである。すなわち，位相遅れ要素の付加により，ある周波数帯付近の位相を遅らせ低周波側に移すと，制御系の安定性が改善されることになる。

- (5) 位相進み補償：出力信号の位相が入力信号の位相より進むような要素を位相進み要素という。この伝達関数は

$$G(s) = \frac{T_a s + 1}{T_b s + 1} \quad (T_a > T_b)$$

である。低周波数のゲインを犠牲にして $\omega = \sqrt{T_a/T_b}$ (位相進みが最大となる角周波数) 近傍の位相を進めようとするものである。すなわち，位相進み要素の付加により，あ

る周波数帯付近の位相を進め高周波側に移すと、制御系の速応性が改善されることになる。

- (6) ノッチフィルタ：ある特定の狭い周波数帯域のゲインを小さくしたいとき、ノッチフィルタが用いられる。この伝達関数は

$$G(s) = \frac{(s/\omega)^2 + 2\zeta_z(s/\omega) + 1}{(s/\omega)^2 + 2\zeta_p(s/\omega) + 1} \quad (\zeta_z < \zeta_p)$$

である。宇宙機がたとえばある一定回転数で回るセンサを持っている場合、これによって引き起こされる外乱と制御系との干渉を抑制したい場合などに、ノッチフィルタが有効である。

【例題 6-4】一翼大型太陽電池パドルを有する衛星のダイナミクス

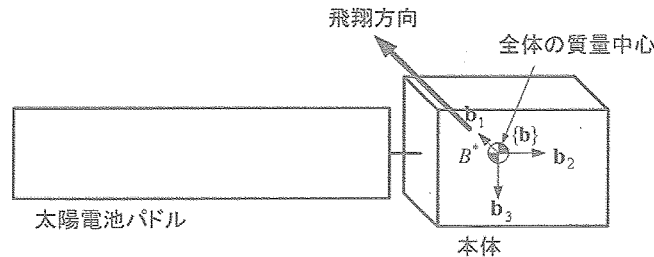


図 6.6.1 一翼大型太陽電池パドルを有する衛星

図 6.6.1 に示すような一翼の大型太陽電池パドルを有する衛星について考える。また、慣性モーメントの値は $J = 50000 \text{ [kgm}^2\text{]}$ 、柔構造特性は 8 次のモードまで考慮し表 6.6.2 のように与えられているものとする。このとき、プラントモデル $G(s)$ のボード線図は図 6.6.2 のようになる。

剛体モードのみ考慮した場合と比較してゲインが高くなる周波数では等価的に慣性モーメントが小さく、ゲインが小さくなる周波数では等価的に慣性モーメントが大きいものと解釈することができる。位相については、剛体モードのみ考慮した場合では一定であったが、柔軟性を持つ場合には周波数に依存して位相遅れが大きく変動することがわかる。

以下の仕様を満足するような制御系を設計する。

- (1) クロスオーバー周波数 0.0017 [Hz] 、減衰比 1.37 程度となるように比例ゲインおよび微分周波数を設定する。
- (2) 柔構造特性による低次のピークゲインに対し、ゲイン余裕を 15dB 以上確保する。
- (3) 重力傾度トルクによる定常偏差を抑制する。

PD 補償器、2 次ローパスフィルタ、積分器により制御器を構成し、各要素の周波数特性を

図 6.6.3, 設計パラメータを表 6.6.3 に示す. 宇宙機ダイナミクスと制御器を含む全系の開ループ周波数特性を図 6.6.4 に示す.

表 6.6.2 構造パラメータ (フリーフリー)

| | ω_i [Hz] | ζ_i | ϕ_i |
|---|-----------------|-----------|----------|
| 1 | 0.077 | 0.005 | -1.3e-4 |
| 2 | 0.116 | 0.005 | -6.4e-3 |
| 3 | 0.146 | 0.005 | 1.2e-3 |
| 4 | 0.147 | 0.005 | 6.8e-3 |
| 5 | 0.228 | 0.005 | -1.4e-3 |
| 6 | 0.320 | 0.005 | -2.4e-5 |
| 7 | 0.409 | 0.005 | -7.6e-6 |
| 8 | 0.482 | 0.005 | -1.5e-5 |

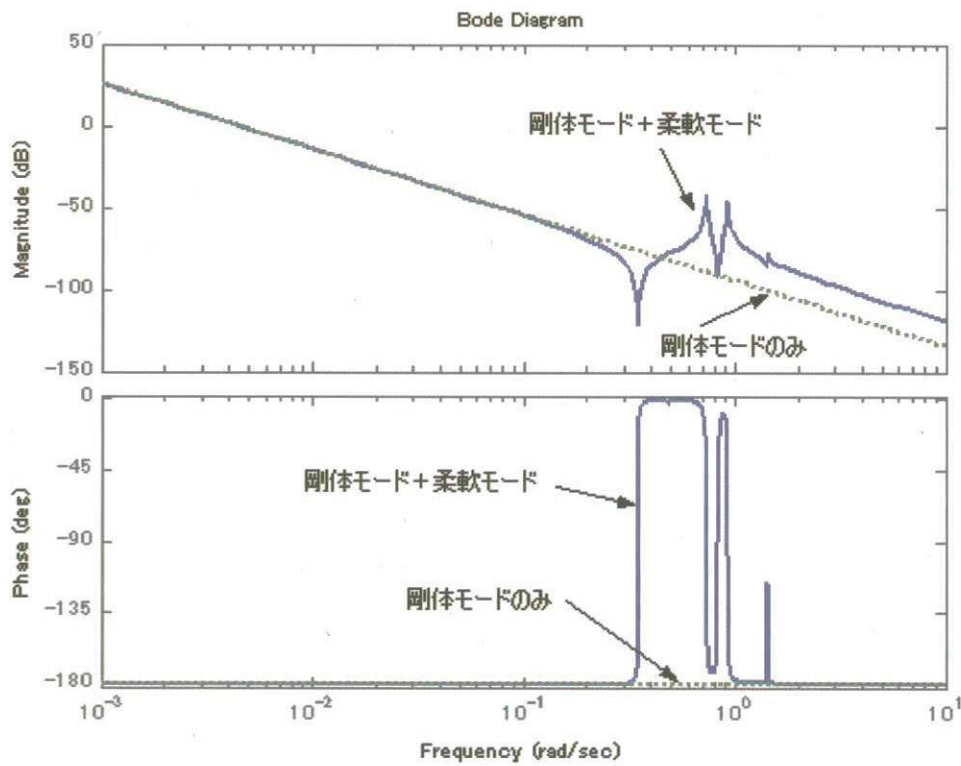


図 6.6.2 姿勢ダイナミクスの周波数特性

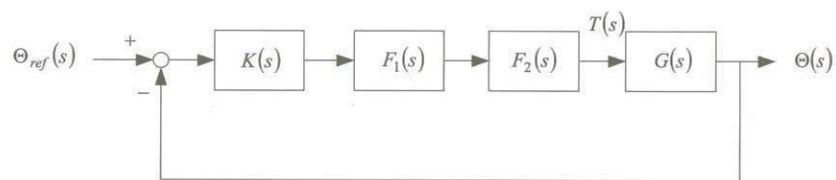


図 6.6.3 フィードバック補償

表 6.6.3 制御パラメータ

| 変数 | 設計値 |
|------------|-------|
| K_L | 6 |
| ω_1 | 0.004 |
| ω_2 | 0.1 |
| ζ | 0.7 |
| ω_I | 0.001 |

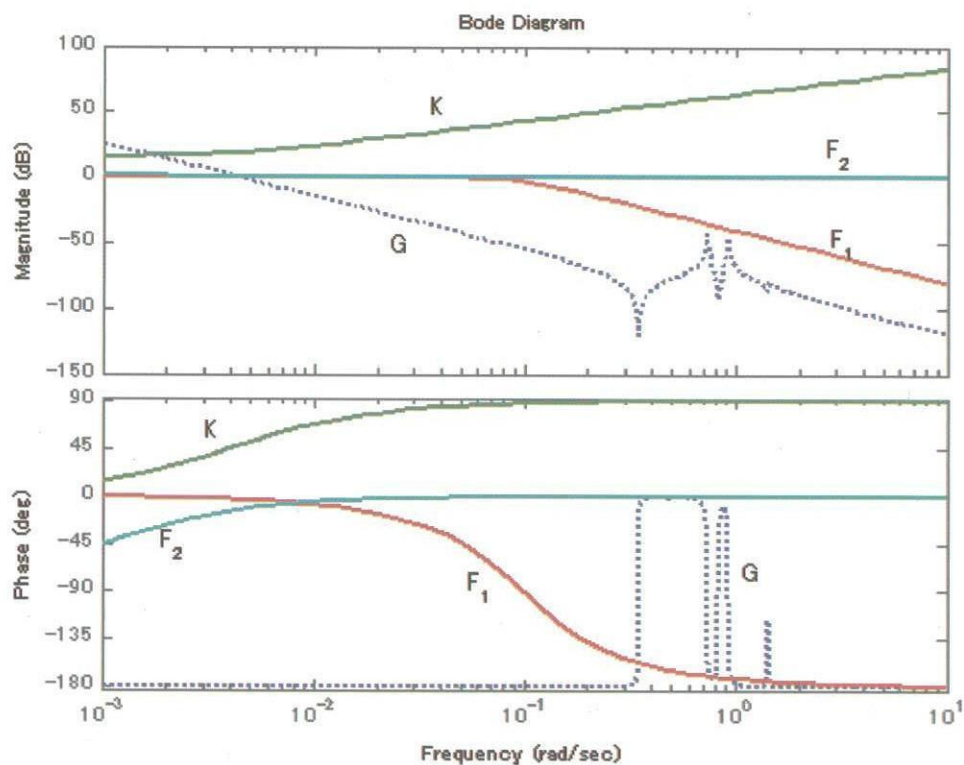


図 6.6.4 制御器の構成要素の周波数特性

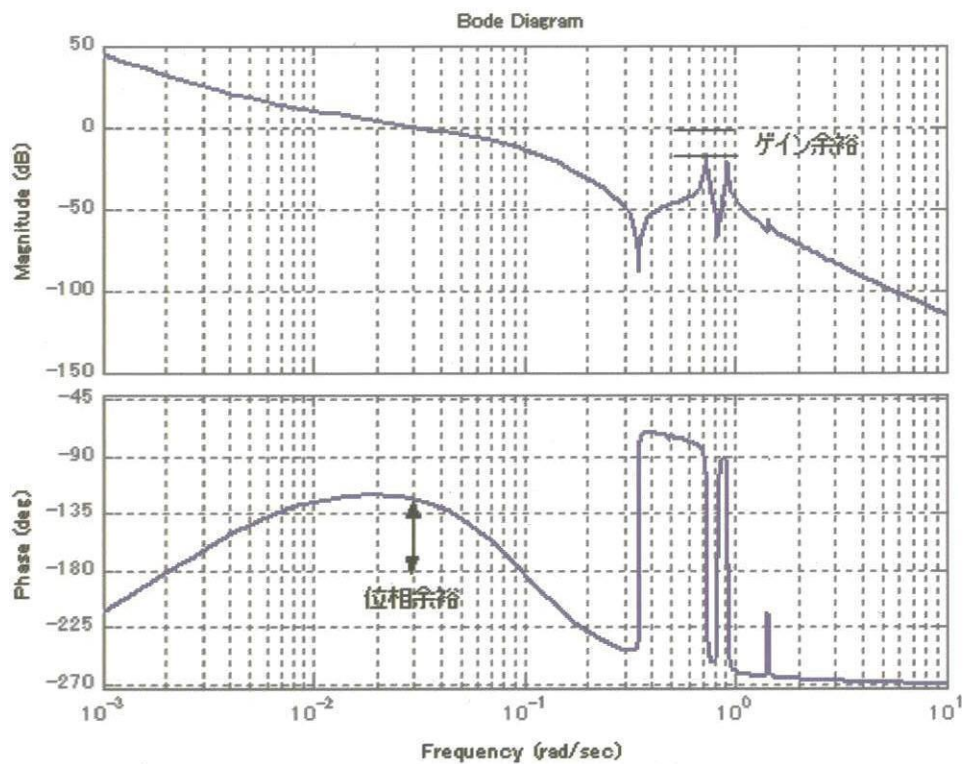


図 6.6.5 全系の開ループ周波数特性

第7章 姿勢決定フィルタ

3 軸姿勢制御衛星の姿勢検出には通常、地球センサや恒星センサなどある基準ベクトルを観測する姿勢センサとジャイロなど慣性系に対する衛星の姿勢角速度を得るためのセンサが併用される。このようなハードウェア構成によるオンライン姿勢決定系を3 軸ストラップダウン姿勢決定系という。3 軸ストラップダウン姿勢決定系に最もよく用いられるフィルタは拡張カルマンフィルタであり、本章では拡張カルマンフィルタを用いた3 軸ストラップダウン姿勢決定系について述べる。

7.1 発展経緯

カルマンフィルタは線形系の状態推定法のひとつとして Kalman が素を築き、1950 年代から 1960 年代初頭にかけて体系化されたが、その後アポロ計画での航法・誘導則における軌道推定のために、Schmidt らによって非線形系にも対応できるよう拡張された。また、Kalman 自身も非線形への拡張に貢献し、拡張カルマンフィルタとして体系化された。

衛星の姿勢決定系におけるカルマンフィルタの発展をたどると、プラントモデルを如何なるものとするかに紆余曲折が見られる。姿勢角速度と姿勢位置との関係は、運動学モデルとよばれる1 階の微分方程式として記述される。運動学モデルは、プラントのパラメータには依存しない関係式である。これに対し、トルクと角速度との関係も、動力学モデルと呼ばれる1 階の微分方程式として記述される。しかし、動力学モデルはプラントのパラメータに依存する。姿勢推定系の創世記には、プラントモデルには運動学モデル、動力学モデルが用いられたこともあったが、動力学モデルの不確定性が推定精度劣化の大きな要因となった。そこで、ジャイロによって検出される角速度を運動学モデルに対する角速度入力とし、動力学モデルは用いない手法が提案された。ただし、ジャイロにはバイアス誤差が生じるので、これをやはり1 階の微分方程式でモデル化することで、精度の高いものを得ることができ、本手法が現在の主流の一つである。

カルマンフィルタの状態変数として用いられる姿勢表記法としては、第1 章で述べた方向余弦行列、オイラー角、クォータニオンなどさまざまあるが、オイラー角はその物理的イメージの容易さなどの利点から、姿勢推定系の創世記から現在に至るまで一貫して用いられている。しかし、オイラー角は姿勢表記に必要な独立変数3 個で構成されるが、どのような3 変数による姿勢表記法にも特異点が存在するため、表現できる姿勢に制約が生じる。そこで、1970 年代から大域的に特異点をもたないクォータニオンを状態変数として用いる試みがなされた。クォータニオンは、1 つの拘束条件をもつ4 変数で構成される。当初、これら全てを状態変数とした推定系が試みられたが、拘束条件が保存されなかったり数値的に不安定になる問題があった。1981 年に Lifferts らが変数の個数を縮退させて推定系を構成する手法^[7.1]を提案し、本手法が現在頻繁に用いられている。

以上より、現在一般的に用いられる3 軸ストラップダウン推定系は、運動学モデルとジャイロドリフトモデルで状態方程式を構成し、姿勢表記法としてはオイラー角またはクォータニオンを用いるものである。また、オイラー角を用いる推定系の実例は、軌道座標系に対する機体座標系の関係を表現する場合が主であるが、クォータニオンを用いる推定系の実例は、慣性座標系に対する機体座標系の関係を表

現する場合が主である。本資料では、オイラー角を用いた推定系とクォータニオンを用いた推定系についてアルゴリズムの2種を示す。

7.2 3軸ストラップダウン姿勢決定系概要

7.2.1 プラントモデルの構成

衛星の姿勢運動は、運動学モデルと動力学モデルによって記述される。運動学は慣性空間内での位置や角度の関係を表すもので、通常は力やトルクを含まない微分方程式で記述される。一方、動力学は運動方程式に代表されるように、加速度、角加速度と力、トルクとの関係を表すものである。運動学モデルは衛星の質量特性などの物理的特性とは無関係であるが、動力学モデルは物理的特性や外部入力に関係する。したがって、動力学モデルをカルマンフィルタの伝搬モデルとして取り扱う場合、それを正確に記述することが推定精度を向上するために重要である。しかし、動力学モデルの正確な記述は、重力傾度トルク、空気力トルク、太陽輻射圧トルクなどの外部擾乱、燃料スロッシング、ホイール、センサ等の可動機器、柔構造振動等による内部擾乱のモデリングが必要となり、精度上問題が生じる。そこで、動力学モデルに代わりジャイロによる角速度計測値をカルマンフィルタ内部で利用することが考えられた。ジャイロの場合、動力学モデルの不確かさを考慮することなく直接的に姿勢運動を検出することができる。したがって、ジャイロを用いる3軸ストラップダウン姿勢決定系では、ジャイロで計測される角速度を運動学モデルに与えることで動力学モデルの代わりとし、不確かさに依存しないプラントモデルを導出している。ところが、ジャイロにはジャイロドリフトが存在するため、計測される角速度にはバイアス誤差が存在することになる。姿勢決定するためには、衛星の姿勢に加えこのバイアス誤差も同時に推定する必要がある。以上より、3軸ストラップダウン姿勢決定系におけるプラントモデルは、衛星の運動学モデルとジャイロドリフトモデルとから構成されることになる。また、ジャイロによって計測された角速度は観測方程式における観測量として取り扱うのではなく、状態方程式における入力として取り扱われる。さらに、ジャイロのバイアス誤差は観測ノイズとしてではなく、状態方程式におけるプロセスノイズとして取り扱われる。こうして得られるプラントモデルは非線形系であり、またセンサによる観測値が離散的であるため、姿勢決定系におけるカルマンフィルタには、離散系に対する拡張カルマンフィルタが適用される。

7.2.2 姿勢表記法

姿勢表記法の詳細は第1章で述べたが、本節ではカルマンフィルタを構成するうえで重要となる性質も含め、オイラー角とクォータニオンについて概説する。

オイラー角

任意の2つの座標系の関係は、方向余弦行列により表現できる。しかし、方向余弦行列の9つの成分は独立ではなく、3成分のみ独立である。また、方向余弦行列そのものから、回転の様子を物理的にイメージすることは難しい。方向余弦行列に代わって任意の2つの座標系の関係を表す変数として、オイラー角がある。これは、独立な3つのスカラー量の組として定義され、その物理的イメージも容易である。参照座標系 A に固定された基底ベクトルを $\{a\}$ 、物体座標系 B に固定された基底ベクトルを $\{b\}$ 、 A 系から B 系への方向余弦行列を ${}^B C^A$ ($\{b\} = {}^B C^A \{a\}$) とする。 $a_i = b_i$ ($i = 1, 2, 3$) の状態から、まず a_1 まわりに θ_1 、次に a_2 まわりに θ_2 、最後に a_3 まわりに θ_3 回転させることによって $\{b\}$ が決まる場合、

この $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ を空間固定 1-2-3 系でのオイラー角という。また、 b_1, b_2, b_3 まわりにこの順で $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 回転させたときに、 $a_i = b_i$ ($i = 1, 2, 3$) になるとき、 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ をボディ固定 1-2-3 系でのオイラー角という。ボディ固定 1-2-3 系のオイラー角 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ から方向余弦行列 C への変換は、次式のように得られる。

$$\begin{aligned} {}^A C^B &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & -s_1 \\ 0 & s_1 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_2 & 0 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c_2 c_3 & -c_2 s_3 & s_2 \\ s_1 s_2 c_3 + s_3 c_1 & -s_1 s_2 s_3 + c_3 c_1 & -s_1 c_2 \\ -c_1 s_2 c_3 + s_3 s_1 & c_1 s_2 s_3 + c_3 s_1 & c_1 c_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.1)$$

ただし、 $c_i = \cos \theta_i$, $s_i = \sin \theta_i$ ($i = 1, 2, 3$) である。同様に、任意の回転に関する方向余弦行列を単軸回転を組み合わせて表すことができる。

$$C(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = C^{r_3}(\theta_3) C^{r_2}(\theta_2) C^{r_1}(\theta_1) \quad (7.2)$$

ただし、 r_i ($i = 1, 2, 3$) はどの軸まわりの回転かを表す。最初の回転はどの軸まわりでもよく、2 番目、3 番目の回転はその直前の回転で用いていない軸まわりであればよい。したがって、回転軸の組み合わせは全部で 12 通りあることとなる。任意の 2 つの座標系に対し、このような連続する 3 つの回転を考えると軸の順序を与えれば、 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ が一意に決まる。オイラー角と方向余弦行列との対応関係を表 7.1 に示す。

逆に、方向余弦行列からオイラー角を求めることを考える。

$|C_{13}| \neq 1$ のとき、ボディ固定 1-2-3 系のオイラー角 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ は、以下の手順で一意に得られる。

$$\begin{aligned} \theta_2 &= \sin^{-1} C_{13} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \theta_2 < \frac{\pi}{2}\right) \\ \alpha &= \sin^{-1} \frac{-C_{23}}{c_2} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}\right) \\ \theta_1 &= \begin{cases} \alpha & (C_{33} \geq 0) \\ \pi - \alpha & (C_{33} < 0) \end{cases} \\ \beta &= \sin^{-1} \frac{-C_{12}}{c_2} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}\right) \\ \theta_3 &= \begin{cases} \beta & (C_{11} \geq 0) \\ \pi - \beta & (C_{11} < 0) \end{cases} \end{aligned}$$

ところが、 $|C_{13}| = 1$ のときは θ_1, θ_3 を一意に決めることが不可能になる。一般に、どのオイラー角を用いる場合でもこのような特異点が存在し、これがオイラー角を用いる場合の大きな欠点である。

表 7.1: 方向余弦行列

| 回転軸順序 | 方向余弦行列 |
|-------|---|
| 1-2-3 | $\begin{bmatrix} c_3 c_2 & c_3 w_2 s_1 + s_3 c_1 & -c_3 s_2 c_1 + s_3 s_1 \\ -s_3 c_2 & -s_3 s_2 s_1 + c_3 c_1 & s_3 s_2 c_1 + c_3 s_1 \\ s_2 & -c_2 s_1 & c_2 c_1 \end{bmatrix}^T$ |
| 1-3-2 | $\begin{bmatrix} c_3 c_2 & c_3 s_2 c_1 + s_3 s_1 & c_3 s_2 s_1 - s_3 c_1 \\ -s_2 & c_2 c_1 & c_2 s_1 \\ s_3 c_2 & s_3 s_2 c_1 - c_3 s_1 & s_3 s_2 s_1 + c_3 c_1 \end{bmatrix}^T$ |
| 2-3-1 | $\begin{bmatrix} c_2 c_1 & s_2 & -c_2 s_1 \\ -c_3 s_2 c_1 + s_3 s_1 & c_3 c_2 & c_3 s_2 s_1 + s_3 c_1 \\ s_3 s_2 c_1 + c_3 s_1 & -s_3 c_2 & -s_3 s_2 s_1 + c_3 c_1 \end{bmatrix}^T$ |
| 2-1-3 | $\begin{bmatrix} c_3 c_1 + s_3 s_2 s_1 & s_3 c_2 & -c_3 s_1 + s_3 s_2 c_1 \\ -s_3 c_1 + c_3 s_2 s_1 & c_3 c_2 & s_3 s_1 + c_3 s_2 c_1 \\ c_2 s_1 & -s_2 & c_2 c_1 \end{bmatrix}^T$ |
| 3-1-2 | $\begin{bmatrix} c_3 c_1 - s_3 s_2 s_1 & c_3 s_1 + s_3 s_2 c_1 & -s_3 c_2 \\ -c_2 s_1 & c_2 c_1 & s_2 \\ s_3 c_1 + c_3 s_2 s_1 & s_3 s_1 - c_3 s_2 c_1 & c_3 c_2 \end{bmatrix}^T$ |
| 3-2-1 | $\begin{bmatrix} c_2 c_1 & c_1 s_1 & -s_2 \\ -c_3 s_1 + s_3 s_2 c_1 & c_3 c_1 + s_3 s_2 s_1 & s_3 c_2 \\ s_3 s_1 + c_3 s_2 c_1 & -s_3 c_1 + c_3 s_2 s_1 & c_3 c_2 \end{bmatrix}^T$ |
| 1-2-1 | $\begin{bmatrix} c_2 & s_2 s_1 & -s_2 c_1 \\ s_3 s_2 & c_3 c_1 - s_3 c_2 s_1 & c_3 s_1 + s_3 c_2 c_1 \\ c_3 s_2 & -s_3 c_1 - c_3 c_2 s_1 & -s_3 s_1 + c_3 c_2 c_1 \end{bmatrix}^T$ |
| 1-3-1 | $\begin{bmatrix} c_2 & s_2 c_3 & s_2 s_1 \\ -c_3 s_2 & c_3 c_2 c_1 - s_3 s_1 & c_3 c_2 s_1 + s_3 c_1 \\ s_3 s_2 & -s_3 c_2 c_1 - c_3 s_1 & -s_3 c_2 s_1 + c_3 c_1 \end{bmatrix}^T$ |
| 2-1-2 | $\begin{bmatrix} c_3 c_2 - s_3 c_2 s_1 & s_3 s_2 & -c_3 w_1 - s_3 c_2 c_1 \\ s_2 s_1 & c_2 & s_2 c_1 \\ s_3 c_1 + c_3 c_2 s_1 & -c_3 s_2 & -s_3 s_1 + c_3 c_2 c_1 \end{bmatrix}^T$ |
| 2-3-2 | $\begin{bmatrix} c_3 c_2 c_1 - s_3 s_1 & c_3 s_1 & -c_3 c_2 s_1 - s_3 c_1 \\ -s_2 c_1 & c_2 & s_2 s_1 \\ s_3 c_2 c_1 + c_3 s_2 & -s_3 c_2 s_1 + c_3 c_1 & \end{bmatrix}^T$ |
| 3-1-3 | $\begin{bmatrix} c_3 c_2 - s_3 c_2 s_1 & c_3 s_1 + s_3 c_2 c_1 & s_3 s_2 \\ -s_3 c_1 - c_3 c_2 s_1 & -s_3 s_2 + c_3 c_2 c_1 & c_3 s_2 \\ s_2 s_1 & -s_2 c_1 & c_2 \end{bmatrix}^T$ |
| 3-2-3 | $\begin{bmatrix} c_3 c_2 c_1 - s_3 s_1 & c_3 c_2 s_1 + s_3 c_1 & -c_3 s_2 \\ -s_3 c_2 c_1 - c_3 s_1 & -s_3 c_2 s_1 + c_3 c_1 & s_3 s_2 \\ s_2 c_1 & s_2 s_1 & c_2 \end{bmatrix}^T$ |

クォータニオン

クォータニオンは、従属な 4 変数の組で表され、個々の物理的解釈は難しいが、次のような利点をもつ。

- ・ 大域的に特異点をもたない。

地球周回衛星の場合、衛星の姿勢は慣性座標系に対して常に大きく変動する。また、一般の衛星でも姿勢マヌーバ時、軌道投入時は大域的に任意の姿勢をとる可能性がある。したがって、このような状況下では、大域的に特異点をもたないクォータニオンを用いる利点が多い。

- ・ 方向余弦行列の要素とクォータニオンとは代数関係にある。

衛星の姿勢は、さまざまな座標系に対して定義することができ、目的に応じて座標変換される。座標変換に際しては、衛星の姿勢を方向余弦行列に書き直す必要があるため、方向余弦行列の要素

と代数関係にあるクォータニオンを用いることは、計算効率の点で好都合である。(その他の姿勢表記法としてオイラー角やロドリゲスパラメータなどがあるが、方向余弦行列への変換には三角関数の演算が必要とされる。)

- ・ 運動学方程式が線形となる。

クォータニオンを状態変数として運動学方程式を記述すると、オイラー角の場合と異なり線形近似することなく線形微分方程式が得られる。したがって、カルマンフィルタへ適用した場合に、運動学方程式に関しては線形近似にともなう誤差が発生しない。

クォータニオンを用いることで上記のような利点があるが、カルマンフィルタを構成する場合にオイラー角では発生しないクォータニオン固有の性質として以下を考慮する必要がある。

- ・ 従属性

クォータニオンは4変数で構成されるが、これらの間にはユークリッドノルムが1である拘束条件が成り立っている。このような従属変数をそのまま推定対象とすると、その誤差共分散行列に特異性が生じ、計算精度が劣化することが知られている。そこで、一端状態変数を縮退させ、独立変数と同じ数だけの変数を推定する手法がとられる。

- ・ 乗法的合成則

複数の座標変換を合成する場合、微小回転の仮定のもとではオイラー角の合成は加法的であった。しかし、クォータニオンの合成は、微小であるかどうかに関係なく、乗法的である。このような性質は、カルマンフィルタにおいて、状態変数が乗法的に伝播されることに繋がる。なお、乗法的合成の性質は、座標変換行列の合成と類似するものである。

7.3 オイラー角を用いた姿勢推定系

7.3.1 プラントモデル

運動学モデル

慣性座標系からみた機体の姿勢角速度を ω 、軌道座標系からみた機体のオイラー角を $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 、軌道周囲レートを ω_0 とする。軌道座標系と機体座標系とのズレが微小であるとき、運動学モデルは近似的に次式で書き表される。

$$\omega \approx \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 - \omega_0 \theta_3 \\ -\omega_0 + \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 + \omega_0 \theta_1 \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

この式から分かるように、ピッチの出力は、ロール・ヨーの姿勢変化の影響を受けず独立であるが、ロール・ヨーは相互に姿勢角が連成してジャイロ信号に表れる。そのための検出は、ピッチ系と、ロール・ヨー系の2つに分けて行われる。

ジャイロモデル

ジャイロは大きくメカニカルジャイロと光学的ジャイロに分類される。

メカニカルジャイロは内部に高速で回転するロータをもっており、姿勢変動に対するジャイロ剛性力から姿勢角速度を得るものである。メカニカルジャイロとして代表的なストラップダウン・トルクバランス・レート積分ジャイロの場合、姿勢変動によってロータスピン軸が傾くと、スピン軸および衛星

角速度方向と直交する方向にトルクが生じる。ロータはジンバル機構をもっているため、このトルクによってジンバル軸が回転しようとするが、ジンバル角をもとにこれをうち消すようなトルクを磁気力で発生させる。このときの電流が姿勢角速度と理想的には比例関係にあるため、姿勢角速度が検出される。

最近では、より高精度な角速度検出が必要とされる衛星に対しては、光学のジャイロも用いられるようになってきた。代表的なものとして、ファイバオプティカルジャイロやリングレーザジャイロと呼ばれるものがある。いずれも、光をある光路に閉じこめておき、姿勢変動によって生じる光路差を位相のずれから読み取り、姿勢角速度に換算するものである。

メカニカルジャイロ、光学のジャイロいずれも、程度の差はあれ測定誤差は避けられない問題である。誤差源として以下のようなものが挙げられる。

- ・ ミスアライメント、スケールファクタ誤差
- ・ 温度変化による特性の変化
- ・ 電圧特性、磁気特性の変動

これらの誤差は統計的にみて非常に簡単な数学モデルで表現することができる。これについて次に示す。

ジャイロによって検出される角速度には誤差が含まれ、この誤差はランダムドリフト成分とランダムウォークドリフト成分との和で近似的に表現される。したがって、真の角速度を $\omega \in R^{3 \times 1}$ 、ジャイロ出力を $u \in R^{3 \times 1}$ 、ランダムドリフト成分を $\eta_1 \in R^{3 \times 1}$ 、ランダムウォークドリフト成分を $b \in R^{3 \times 1}$ とすれば、次式が成り立つ。

$$\omega = u - b - \eta_1 \quad (7.4)$$

ここで、 η_1 はガウス性白色ノイズとして

$$E[\eta_1(t)] = 0 \quad (7.5)$$

$$E[\eta_1(t)\eta_1^T(t')] = Q_1(t)\delta(t-t') \quad (7.6)$$

ここで、 $E[\cdot]$ は平均値、 $Q_1(t) \in R^{3 \times 3}$ は η_1 のインテンシティである。また、 $b \in R^{3 \times 1}$ はガウス性白色ノイズの積分値として次式で与えられる。

$$\frac{d}{dt}b = \eta_2 \quad (7.7)$$

ただし

$$E[\eta_2(t)] = 0 \quad (7.8)$$

$$E[\eta_2(t)\eta_2^T(t')] = Q_2(t)\delta(t-t') \quad (7.9)$$

ここで、 $Q_2(t) \in R^{3 \times 3}$ は η_2 のインテンシティである。

さらに、 η_1 と η_2 は無相関、すなわち次式が成り立つものとする。

$$E[\eta_1(t)\eta_2^T(t')] = 0 \quad (7.10)$$

7.3.2 姿勢決定系

ピッチ姿勢推定系

ピッチを対象に姿勢の決定系を考える。式 (7.3),(7.4) の第 2 成分に着目すると、入力 $u_2 + \omega_0$ 、状態変数 θ_2, b_2 、ノイズを η_{12}, η_{22} とする次の状態方程式が得られる。

$$\dot{\theta}_2 = -b_2 + u_2 + \omega_0 - \eta_{12} \quad (7.11)$$

$$\dot{b}_2 = \eta_{22} \quad (7.12)$$

また、ピッチ姿勢角 θ_2 は地球センサで観測できるので、観測値を θ_{obs2} とすると

$$\theta_{obs2} = \theta_2 + v_2 \quad (7.13)$$

と書ける。ただし、 $v_2 \in R^{1 \times 1}$ は観測センサのランダムノイズである。式 (7.11)~(7.13) をまとめると、次式に書き換えられる。

$$\dot{x} = Fx + Gu + Lw \quad (7.14)$$

$$z = Hx + n \quad (7.15)$$

ただし

$$x = \begin{bmatrix} \theta_2 & b_2 \end{bmatrix}^T \quad (7.16)$$

$$u = \begin{bmatrix} u_2 + \omega_0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (7.17)$$

$$w = \begin{bmatrix} \eta_{12} & \eta_{22} \end{bmatrix}^T \quad (7.18)$$

$$z = \theta_{obs2} \quad (7.19)$$

$$n = v_2 \quad (7.20)$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.21)$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.22)$$

$$L = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.23)$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.24)$$

式 (7.14),(7.15) をカルマンフィルタの一般式に適用すると、次の推定則が得られる。

$$\hat{\dot{x}} = F\hat{x} + Gu + K_C(z - H\hat{x}) \quad (7.25)$$

式 (7.25) は、ピッチ角推定式とピッチレート推定式に分解して次のようにも書き換えられる。

$$\dot{\hat{\theta}}_2 = \hat{\omega}_2 + \omega_0 + k_2(\theta_{obs2} - \hat{\theta}_2) \quad (7.26)$$

$$\hat{\omega}_2 = -\hat{b}_2 + u_2 \quad (7.27)$$

$$\dot{\hat{b}}_2 = k_{d2}(\theta_{obs2} - \hat{\theta}_2) \quad (7.28)$$

ただし、 k_2, k_{d2} はゲイン行列 K_C の要素に対応する。図 7.1 に、ピッチ姿勢推定系のブロック線図を示す。

ロール・ヨー姿勢推定系

ロール・ヨーを対象に姿勢の決定系を考える。式 (7.3), (7.4) の第 1,3 成分に着目すると次の状態方程式が得られる。

$$\dot{\theta}_1 = \omega_0\theta_3 - b_1 + u_1 - \eta_{11} \quad (7.29)$$

$$\dot{\theta}_3 = -\omega_0\theta_1 - b_3 + u_3 - \eta_{13} \quad (7.30)$$

$$\dot{b}_1 = \eta_{21} \quad (7.31)$$

$$\dot{b}_3 = \eta_{23} \quad (7.32)$$

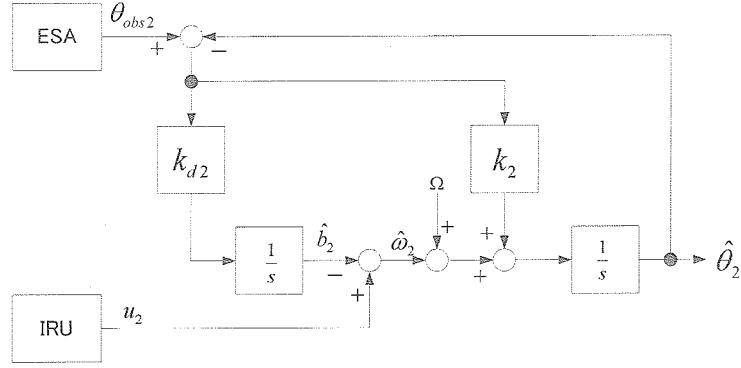


図 7.1: ピッチ姿勢推定系

また、ロール姿勢角 θ_1 は地球センサで観測できるので、観測値を θ_{obs1} とすると

$$\theta_{obs1} = \theta_1 + v_1 \quad (7.33)$$

と書ける。ただし、 $v_1 \in R^{1 \times 1}$ は観測センサのランダムノイズである。式 (7.29)~(7.33) をまとめると、次式に書き換えられる。

$$\dot{x} = Fx + Gu + Lw \quad (7.34)$$

$$z = Hx + n \quad (7.35)$$

ただし

$$x = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_3 & b_1 & b_3 \end{bmatrix}^T \quad (7.36)$$

$$u = \begin{bmatrix} u_1 & u_3 \end{bmatrix}^T \quad (7.37)$$

$$w = \begin{bmatrix} \eta_{11} & \eta_{13} & \eta_{21} & \eta_{23} \end{bmatrix}^T \quad (7.38)$$

$$z = \theta_{obs1} \quad (7.39)$$

$$n = v_1 \quad (7.40)$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & \omega_0 & -1 & 0 \\ -\omega_0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.41)$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.42)$$

$$L = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.43)$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.44)$$

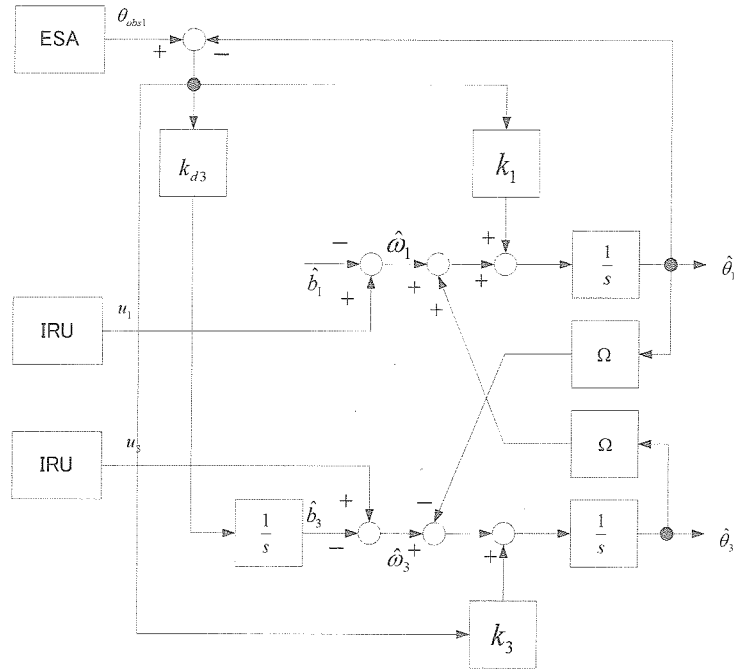


図 7.2: ロール・ヨー姿勢推定系

式 (7.34),(7.35) をカルマンフィルタの一般式に適用すると、次の推定則が得られる。

$$\dot{\hat{x}} = F\hat{x} + Gu + K_C(z - H\hat{x}) \quad (7.45)$$

通常、ロールレートの更新は、地球センサによって行われなことに注意して、式 (7.45) をロール・ヨー角推定式とヨーレート推定式に分解すると、次のように書き換えられる。

$$\dot{\hat{\theta}}_1 = \hat{\omega}_1 + \omega_0 \hat{\theta}_3 + k_1(\theta_{obs1} - \hat{\theta}_1) \quad (7.46)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_3 = \hat{\omega}_3 - \omega_0 \hat{\theta}_1 + k_3(\theta_{obs1} - \hat{\theta}_1) \quad (7.47)$$

$$\dot{\hat{\omega}}_1 = -\hat{b}_1 + u_1 \quad (7.48)$$

$$\dot{\hat{\omega}}_3 = -\hat{b}_3 + u_3 \quad (7.49)$$

$$\dot{\hat{b}}_3 = k_{d3}(\theta_{obs1} - \hat{\theta}_1) \quad (7.50)$$

ここで、推定 \hat{b}_1 はロールレートのランダムウォークドリフトの推定値であるが、これは上記推定アルゴリズムとは別途に、太陽センサによって行われ、更新周期はたとえば ADEOS-II の通常の姿勢決定系の場合、軌道上の 1 点でのみ実施される。図 7.2 に、ロール・ヨー姿勢推定系のブロック線図を示す。

7.3.3 軌道摂動の影響の補正

式 (7.26)~(7.28)，および式 (7.46)~(7.50) の姿勢推定アルゴリズムを用いるには、軌道周回レート ω_0 を知っておく必要がある。この値は、宇宙航空研究開発機構の従来の 3 軸姿勢制御衛星では地上系での軌道決定結果をもとに計算されるものである。

式 (7.26)~(7.28)，および式 (7.46)~(7.50) の姿勢推定アルゴリズムは、そもそも軌道摂動を無視したものであるが、厳密には軌道摂動による軌道座標系の変化率も誤差要因となる。ADEOS-II の姿勢制御系では、この補正アルゴリズムを加え、かつ、GPSR による軌道情報をもとに補正パラメータの計算を行うことをミッションの一つとしている。なお、ADEOS-II において、従来の方法を従来航法姿勢決定系というのに対し、軌道摂動の補正を行う手法を複合航法姿勢決定系という。

7.4 クォータニオンを用いた姿勢推定系

記号定義

N ; 慣性座標系
 B ; 機体座標系

$q \in R^{4 \times 1}$; N 系に対する B の姿勢を表すクォータニオンの真値
 $\hat{q} \in R^{4 \times 1}$; q の推定値
 $\omega \in R^{3 \times 1}$; N に対する B の角速度の真値
 $\hat{\omega} \in R^{3 \times 1}$; ω の推定値
 $\tau \in R^{3 \times 1}$; B に加わる外力トルクの既知成分
 $\eta_1 \in R^{3 \times 1}$; ω の観測ノイズのランダム成分
 $\eta_2 \in R^{3 \times 1}$; ω の観測ノイズのランダムウォーク項の駆動源

7.4.1 プラントモデル

本節では、拡張カルマンフィルタにおける推定値の時間伝搬に必要となるプラントモデルを導出する。

ジャイロモデル

ジャイロモデルは、オイラー角を用いた姿勢推定系と同様に式 (7.4),(7.7) で構成される。

運動学モデル

クォータニオンは次式で定義される。

$$q \triangleq \begin{bmatrix} q_{13} \\ q_4 \end{bmatrix} \quad (7.51)$$

ただし

$$q_{13} \triangleq \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix}^T \quad (7.52)$$

$$q_{13} \triangleq \lambda \sin \frac{\theta}{2}, \quad q_4 \triangleq \cos \frac{\theta}{2} \quad (7.53)$$

ここで、 $\lambda \in R^{3 \times 1}$ はオイラーの回転軸ベクトルの機体座標系および慣性座標系での成分である。クォータニオンの4つの要素は従属関係にあり、次の拘束条件をもつ。

$$q^T q = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = 1 \quad (7.54)$$

慣性系に対する姿勢角速度とクォータニオンとの関係は次式で与えられる。

$$\frac{d}{dt} q = \frac{1}{2} \Omega(\omega) q = \frac{1}{2} \Phi(q) \omega \quad (7.55)$$

ただし、任意の $\omega \triangleq [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^T$ および q に対し、演算子 $\Omega(\omega)$ および $\Phi(q)$ はそれぞれ次式で定義される.

$$\Omega(\omega) \triangleq \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 & \omega_2 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 & \omega_3 \\ -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.56)$$

$$\Phi(q) \triangleq \begin{bmatrix} q_4 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_4 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_4 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 \end{bmatrix} \quad (7.57)$$

したがって、式 (7.4),(7.55) より次式が得られる.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}q(t) &= \frac{1}{2}\Omega(u(t) - b(t) - \eta_1(t))q(t) \\ &= \frac{1}{2}\Omega(u(t) - b(t))q(t) - \frac{1}{2}\Phi(q(t))\eta_1(t) \end{aligned} \quad (7.58)$$

姿勢センサモデル

衛星姿勢の観測値は、次式で与えられるとする.

$$z = h(q) + v \quad (7.59)$$

ただし、 v はガウス性ホワイトノイズであり

$$E[v(t)] = O_{n \times 1} \quad (7.60)$$

$$E[v(t)v_1^T(t')] = R(t)\delta(t - t') \quad (7.61)$$

とする. z は例えば、地球センサによって得られる地心方向ベクトル、太陽センサによって得られる太陽方向ベクトル、恒星センサによって得られる恒星方向ベクトルのこともあれば、あるいはこれらのベクトルのいくつかを組み合わせる代数演算によってえられるプリミティブな姿勢決定値である. なお、このような代数演算による姿勢決定法として TRIAD や QUEST が知られている [7.2].

プラントモデルまとめ

式 (7.7),(7.58),(7.59) をまとめると、次の状態方程式および観測方程式が得られる.

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t), u(t)) + g(x(t))w(t) \quad (7.62)$$

$$z(t_k) = p(x(t_k), v(t_k)) \quad (7.63)$$

ただし、連続的な時刻を t で表すのと区別し、離散的な時刻を t_k で記す. また、以下の記号を定義する.

$$x \triangleq \begin{bmatrix} q \\ b \end{bmatrix} \quad (7.64)$$

$$w \triangleq \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} \quad (7.65)$$

$$f \triangleq \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\Omega(u(t) - b(t))q(t) \\ O_{3 \times 1} \end{bmatrix} \quad (7.66)$$

$$g \triangleq \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\Phi(q(t)) & O_{4 \times 3} \\ O_{3 \times 4} & U_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (7.67)$$

$$p \triangleq h(q) + v_1 \quad (7.68)$$

状態変数の伝搬には，式 (7.7),(7.58) のノイズ成分をすべて 0 に置き換えた次の非線形状態方程式が用いられる．

$$\frac{d}{dt}\hat{b} = O_{3 \times 1} \quad (7.69)$$

$$\frac{d}{dt}\hat{q} = \frac{1}{2}\Omega(u(t) - \hat{b}(t))\hat{q}(t) \quad (7.70)$$

あるいは等価的に

$$\frac{d}{dt}\hat{x}(t) = f(\hat{x}(t), u(t)) \quad (7.71)$$

のようにも記述される．ただし

$$\hat{x} \triangleq \begin{bmatrix} \hat{q} \\ \hat{b} \end{bmatrix} \quad (7.72)$$

7.4.2 誤差方程式

拡張カルマンフィルタには，時間伝搬誤差を観測値に基づいて補正する過程が含まれるが，この補正量は，誤差についての線形近似モデルをもとに決定される．本節では，この線形近似された誤差方程式を導出する．

式 (7.62),(7.63) で記述される非線形システムの状態変数を推定する必要があるが，4つのクォータニオンの間には式 (7.54) の拘束条件が成り立ち，4変数すべてを状態変数として取り扱うと，その誤差共分散行列の特異性により計算精度が劣化することが知られている．特異点回避のため，Lefferts らが文献 [7.1] において提案した手法の一つとして，状態変数を縮退させる方法について記述する．

縮退系の線形状態方程式

任意のクォータニオン $q \triangleq \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \end{bmatrix}^T$ に対してクォータニオンの逆数 q^{-1} を

$$q^{-1} \triangleq \begin{bmatrix} -q_1 & -q_2 & -q_3 & q_4 \end{bmatrix}^T \quad (7.73)$$

により定義する．これは，式 (7.53) において θ を $-\theta$ と置き換えたものに等しい．また，任意のクォータニオン q, q' に対し，演算子 \otimes を次式で定義する．

$$q \otimes q' \triangleq \begin{bmatrix} q_4 & q_3 & -q_2 & q_1 \\ -q_3 & q_4 & q_1 & q_2 \\ q_2 & -q_1 & q_4 & q_3 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 & q_4 \end{bmatrix} q' \quad (7.74)$$

ここで，クォータニオンの推定誤差を次式により定義する．

$$\delta q \triangleq q \otimes \hat{q}^{-1} \quad (7.75)$$

式 (7.75) のようにクォータニオン推定誤差を乗法的に取り扱うことで、カルマンフィルタの更新過程において式 (7.54) のノルム拘束条件が解析的に保存される利点がある。なお、数値計算誤差による拘束条件への反則は生じうるため、この補償のための正規化処理は実装上必要である。

さらに、ジャイロドリフトおよび姿勢角速度の推定誤差をそれぞれ次式により定義する。

$$\delta b \triangleq b - \hat{b} \quad (7.76)$$

$$\delta \omega \triangleq \omega - \hat{\omega} \quad (7.77)$$

このとき、式 (7.4),(7.76),(7.77) より、次式が得られる。

$$\delta \omega = -\delta b - \eta_1 \quad (7.78)$$

ここで、次の補助変数を定義しておく。

$$\bar{\omega} \triangleq \begin{bmatrix} \omega \\ 0 \end{bmatrix}, \hat{\omega} \triangleq \begin{bmatrix} \hat{\omega} \\ 0 \end{bmatrix}, \delta \bar{\omega} \triangleq \begin{bmatrix} \delta \omega \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.79)$$

このとき、式 (7.75) の導関数は次式のようにになる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta q &= \frac{d}{dt} q \otimes \hat{q}^{-1} + q \otimes \frac{d}{dt} (\hat{q}^{-1}) \\ &= \frac{1}{2} \bar{\omega} \otimes q \otimes \hat{q}^{-1} - \frac{1}{2} q \otimes \hat{q}^{-1} \otimes \hat{\omega} \\ &= \frac{1}{2} (\hat{\omega} + \delta \bar{\omega}) \otimes \delta q - \frac{1}{2} \delta q \otimes \hat{\omega} \\ &= \frac{1}{2} (\hat{\omega} \otimes \delta q - \delta q \otimes \hat{\omega}) + \frac{1}{2} \delta \bar{\omega} \otimes \delta q \\ &= \begin{bmatrix} -\tilde{\omega} \delta q_{13} \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \delta \bar{\omega} + o(|\delta \omega| |\delta q_{13}|) \end{aligned} \quad (7.80)$$

ただし

$$\delta q_{13} \triangleq \begin{bmatrix} \delta q_1 & \delta q_2 & \delta q_3 \end{bmatrix}^T \quad (7.81)$$

式 (7.80) において 2 次の微小項 $o(|\delta \omega| |\delta q_{13}|)$ を無視し、式 (7.78) を代入すれば、クォータニオンの誤差に関する次の線形微分方程式が得られる。

$$\frac{d}{dt} \delta q_{13} \approx -\tilde{\omega} \delta q_{13} - \frac{1}{2} (\delta b + \eta_1) \quad (7.82)$$

$$\frac{d}{dt} \delta q_4 \approx 0 \quad (7.83)$$

次に、式 (7.76) を微分することで、ジャイロドリフトの誤差 δb に関する次の線形微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta b &= \frac{d}{dt} b - \frac{d}{dt} \hat{b} \\ &= \eta_2 \end{aligned} \quad (7.84)$$

ここで、状態変数を

$$\Delta x(t) \triangleq \begin{bmatrix} \delta q_{13}(t) \\ \delta b(t) \end{bmatrix} \in R^{6 \times 1} \quad (7.85)$$

とおくと、式 (7.82),(7.84) より誤差に関する線形状態方程式として次式が導かれる。

$$\frac{d}{dt} \Delta x(t) = F(t) \Delta x(t) + G(t) w(t) \quad (7.86)$$

ただし

$$F(t) = \begin{bmatrix} -\tilde{\omega} & -\frac{1}{2}U_{3 \times 3} \\ O_{3 \times 3} & O_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (7.87)$$

$$G(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}U_{3 \times 3} & O_{3 \times 3} \\ O_{3 \times 3} & U_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (7.88)$$

式 (7.62) の状態方程式は 7 個の状態変数をもっていたが，式 (7.86) の誤差方程式は独立な 6 個の状態変数を持っており，線形化と同時に縮退化が行われたことがわかる。

縮退系の共分散行列

式 (7.62) に含まれる 7 個の状態変数に対する共分散行列 $P (\in R^{7 \times 7})$ と式 (7.86) の縮退後の 6 変数に対する共分散行列 $\bar{P} (\in R^{6 \times 6})$ の関係は次式で表される。

$$\bar{P} = S^T(\hat{q})PS(\hat{q}) \quad (7.89)$$

ただし

$$S(\hat{q}) \triangleq \begin{bmatrix} \Phi(\hat{q}) & O_{4 \times 3} \\ O_{3 \times 3} & U_{3 \times 3} \end{bmatrix} (\in R^{7 \times 6}) \quad (7.90)$$

縮退系のリカッチ行列微分方程式は，次式のようにになる。

$$\frac{d}{dt}\bar{P} = F\bar{P} + \bar{P}F^T + GQG^T \quad (7.91)$$

7.4.3 演算フロー

時間伝播の前後の時刻をそれぞれ t_{k-1}, t_k とし，また観測値に基づいた推定値の更新の前後をそれぞれ (−) および (+) の添え字で表すこととする。拡張カルマンフィルタの一般式に，式 (7.62), (7.63), (7.86), (7.91) を適用することにより，姿勢推定系が得られる。フローを (1)~(6)，および図 7.3 に示す。

(1) 状態変数の伝播

$$\hat{x}(t_k(-)) = \hat{x}(t_{k-1}(+)) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\hat{x}(\lambda), u(\lambda))d\lambda \quad (7.92)$$

ただし，実装アルゴリズムとしては，時刻 t_{k-1} から t_k までの積分は，その間のジャイロのサンプリング数に応じて離散化された系により実現される。共分散行列の伝搬過程 (2) においても同様に離散化される。

(2) 共分散行列の伝播

$$\bar{P}(t_k(-)) = \bar{P}(t_{k-1}(+)) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} [F(\lambda)\bar{P}(\lambda) + \bar{P}(\lambda)F^T(\lambda) + G(\lambda)Q(\lambda)G^T(\lambda)]d\lambda \quad (7.93)$$

ただし， Q は η のインテンシティであり次式で与えられる。

$$Q(t) = \begin{bmatrix} Q_1(t) & O_{n \times 3} \\ O_{3 \times n} & Q_2(t) \end{bmatrix} \quad (7.94)$$

(3) カルマンゲインの計算

$$\bar{K}(t_k) = \bar{P}(t_k(-))\bar{H}^T(t_k(-))[\bar{H}(t_k(-))\bar{P}(t_k(-))\bar{H}^T(t_k(-)) + R(t_k)]^{-1} \quad (7.95)$$

ただし

$$H(t_k(-)) \triangleq \frac{\partial h(t_k(-))}{\partial x} \quad (7.96)$$

$$\bar{H}(t_k(-)) \triangleq H(t_k(-))S(\hat{q}(t_k(-))) \quad (7.97)$$

また, R は v のインテンシティであり次式で与えられる.

$$R(t_k) = \begin{bmatrix} R_1(t_k) & O_{4 \times 3} \\ O_{3 \times 4} & R_2(t_k) \end{bmatrix} \quad (7.98)$$

(4) 状態変数の更新

$$\begin{aligned} \delta x(t_k(+)) &= \begin{bmatrix} \delta q_{13}(t_k(+)) \\ \delta b(t_k(+)) \end{bmatrix} \\ &= \bar{K}(t_k)[z(t_k) - H(t_k(-))\hat{x}(t_k(-))] \end{aligned} \quad (7.99)$$

$$\hat{q}(t_k(+)) = \begin{bmatrix} \delta q_{13}(t_k(+)) \\ \sqrt{1 - \delta q_{13}(t_k(+))^T \delta q_{13}(t_k(+))} \end{bmatrix} \otimes \hat{q}(t_k(-)) \quad (7.100)$$

$$\hat{b}(t_k(+)) = \hat{b}(t_k(-)) + \delta b(t_k(+)) \quad (7.101)$$

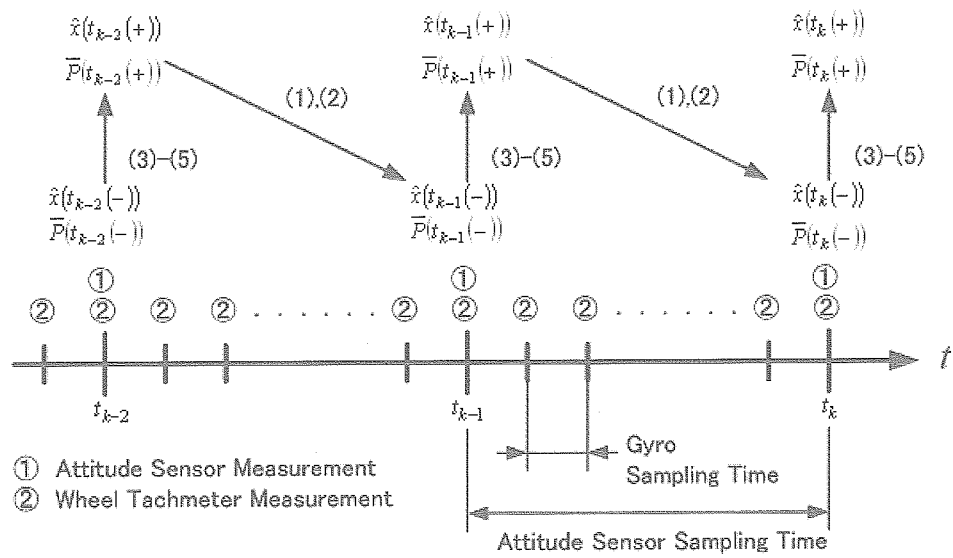
$$\hat{x}(t_k(+)) = \begin{bmatrix} \hat{q}(t_k(+)) \\ \hat{b}(t_k(+)) \end{bmatrix} \quad (7.102)$$

(5) 共分散行列の更新

$$\bar{P}(t_k(+)) = (U_{6 \times 6} - \bar{K}(t_k)\bar{H}(t_k))\bar{P}(t_k(-)) \quad (7.103)$$

7.4.4 実装上の留意点

国内の衛星としてクォータニオンを用いた姿勢推定系が初めて採用されたのは、1987 年打ち上げの旧宇宙科学研究所のぎんがであり、同所では今後打ち上げ予定の ASTRO-F まで含めると、計 6 機が同手法を採用している。また、旧宇宙開発事業団の衛星では、ALOS が同手法を採用している。7.4.3 節で基本的な推定アルゴリズムについてまとめたが、実装上は各衛星ごとに姿勢制御系に要求される機能、姿勢センサの構成・性能、演算部の処理速度などに合わせてさらなる工夫が施される。たとえば、計算負荷を低減するには精度とのトレードオフを図り、定常カルマンフィルタあるいは、シーケンス的に共分散行列を計算する手法をとる場合がある。また、各姿勢センサの検出時刻や制御演算シーケンスを考慮した時刻同期、遅延補正などへの配慮もなされ、例えば近年の超高精度を要求する衛星では恒星センサの露光時間による遅延の補償も行っている。



- (1) State Propagation (Compensation for Attitude Sensor Sampling Time)
- (2) Covariance Propagation
- (3) Filter Gain Computation
- (4) State Update
- (5) Covariance Update

図 7.3: フローチャート

参考文献

第1章

- [1.1] http://www.nikonet.or.jp/spring/what_v/what_v.htm など
- [1.2] Bate, R.R., Mueller, D.D., and White, J.E., *Fundamentals of Astrodynamics*, Dover Publications, 1971.
- [1.3] NASDA 設計基準: 人工衛星姿勢制御系設計基準(基準編/マニュアル編), NDC-2-2-7, 宇宙開発事業団, 1990年3月.
- [1.4] Likins, P.W., Dynamics and Control of Flexible Space Vehicles : Revision 1, *JPL TR 32-1329*, 1970.
- [1.5] Thomson, W.T., *Introduction to Space Dynamics*, Dover Publications, 1986.
- [1.6] Roberson, R.E and Schwertassek, R., *Dynamics of Multibody Systems*, Springer-Verlag, 1988.

ベクトル, ダイアディック, 行列に関しては線形代数, ベクトル解析, テンソル解析の教科書を参照のこと. 例えば,

- [1.7] 佐武一郎, 数学選書1 線形代数, 裳華房, 1957.
- [1.8] 岩堀長慶, 数学選書2 ベクトル解析, 裳華房, 1960.
- [1.9] 九田俊明, 非線形有限要素法のためのテンソル解析の基礎, 丸善, 1992.

第2章

- [2.1] Kane, T.R. *Spacecraft Dynamics*, McGraw-Hill, Inc., 1983
- [2.2] Goldstein, H., *Classical Mechanics*, Addison-Wesley Publishing Company, 1950.
- [2.3] NASDA 設計基準: 人工衛星姿勢制御系設計基準(基準編/マニュアル編), NDC-2-2-7, 宇宙開発事業団, 1990年3月.
- [2.4] Shepperd, S. W., "Quaternion from Rotation Matrix," *J. Guidance and Control*, Vol.1, No.3, 1978, pp.223-224.
- [2.5] Roberson, R.E and Schwertassek, R., *Dynamics of Multibody Systems*, Springer-Verlag, 1988.
- [2.6] Lefferts, E.J., Markley, F.L., and Shuster, M.D., "Kalman Filtering for Spacecraft Attitude Estimation," *J. Guidance*, Vol.5, No.5, Sept.-Oct. 1982, pp.417-429.

第3章

- [3.1] ランダウ・リフシッツ, 力学, 東京図書.
- [3.2] W.H.Press, et.al., *Numerical Recipes in C* [日本語版], 技術評論社, 1993.
- [3.3] 小郷寛, 美多勉: システム制御理論入門, 実教出版, 1979.
- [3.4] 井村順一: システム制御のための安定論, コロナ社, 2000.
- [3.5] 須田信英, 線形システム理論, 朝倉書店, 1993.
- [3.6] S.ウィギンス: 非線形の力学系とカオス, シュプリンガー・フェアラーク東京, 2000.
- [3.7] P.C.Hughes, *Spacecraft Attitude Dynamics*, John Wiley & Sons, 1986.
- [3.8] M.J.Sidi, *Spacecraft Dynamics and Control*, Cambridge University Press, 1997.
- [3.9] J.R.Wertz, *Spacecraft Attitude Determination and Control*, Kluwer Academic Publications, 1978.

第4章

- [4.1] ランダウ・リフシッツ, 力学, 東京図書.

第5章

- [5.1] Marcel J.Sidi : *Spacecraft Dynamics and Control -A Practical Engineering Approach-*, Cambridge university press (1997)
- [5.2] Marshall H.Kaplan : *Modern Spacecraft Dynamics & Control*, John Wiley & Sons (1976)
- [5.3] James R.Wertz : *Spacecraft Attitude Determination and Control*, Kluwer Academic Publishers

(1978)

- [5.4] Bong Wie, Space Vehicle Dynamics and Control, AIAA Education Series (1998)
- [5.5] 木田隆：スペースクラフトの制御，コロナ社（1999）
- [5.6] 木田隆，小松敬治，川口淳一郎：人工衛星と宇宙探査機，コロナ社（2001）
- [5.7] 茂原正道：宇宙工学入門 衛星とロケットの誘導・制御，培風館（1994）
- [5.8] 茂原正道，木田隆：宇宙工学入門 宇宙ステーションと惑星間飛行のための誘導・制御，培風館（1998）
- [5.9] 茂原正道，鳥山芳夫：衛星設計入門，培風館（2002）
- [5.10] 狼嘉彰，富田信之，中須賀真一，松永三郎：宇宙ステーション入門，東京大学出版会（2002）

第 6 章

- [6.1] P.W.Likins : Dynamics and Control of Flexible Space Vehicles, NASA-CR-108209 (1970)
- [6.2] Marcel.J.Sidi : Spacecraft Dynamics and Control -A Practical Engineering Approach-, Cambridge university press (1997)
- [6.3] John.L.Junkins, Youdan Kim : Introduction to Dynamics and Control of Flexible Structures, AIAA Education Series (1993)
- [6.4] Bong Wie, Space Vehicle Dynamics and Control, AIAA Education Series (1998)
- [6.5] 木田隆：スペースクラフトの制御，コロナ社（1999）
- [6.6] 木田隆，小松敬治，川口淳一郎：人工衛星と宇宙探査機，コロナ社（2001）
- [6.7] 茂原正道：宇宙工学入門 衛星とロケットの誘導・制御，培風館（1994）
- [6.8] 茂原正道，木田隆：宇宙工学入門 宇宙ステーションと惑星間飛行のための誘導・制御，培風館（1998）

第 7 章

- [7.1] E. J. Lefferts, F. L. Markley, M. D. Shuster: Kalman Filtering for Spacecraft Attitude Estimation, J. of Guidance, Control, and Dynamics, Vol.5, No.5, pp417-429(1982).
- [7.2] M. D. Shuster, S. D. Oh: Three-Axis Attitude Determination from Vector Observation, J. of Guidance and Control, Vol.4, No.1, pp70-77(1981).

応用編

2E3 μ -LabSat 姿勢制御系の開発

○吉原圭介, 山元透 (宇宙開発事業団)

Development of attitude determination and control subsystem of Micro LabSat

Keisuke Yoshihara, and Toru Yamamoto (NASDA)

Key Words: μ -LabSat, Attitude Control Subsystem, ACS, Micro Satellite, Small Satellite

Abstract

μ -LabSat is a 50[kg] class micro satellite which was launched on December 14 2002. The roll of Attitude Control Subsystem(ACS) is to provide the necessary attitude control services to carry out several experiments, such as preliminary experiment on in-orbit inspection, and CCD Earth Sensor Assembly(CCDESA) experiment, and so on. This paper describes the outline about the design and development of μ -LabSat attitude control subsystem.

1. はじめに

マイクロラブサット1号機(以下, μ -LabSat)は宇宙開発事業団(以下, NASDA)マイクロスペースシステム研究室において開発された, 50kg級の小型衛星である。 μ -LabSatは, 2002年12月14日にH-IIAロケット4号機により, 環境観測技術衛星(ADEOS-II)との相乗りで打ち上げられた。

μ -LabSatのミッションは, (1)50kg級小型衛星バス実験, (2)SELENEリレー衛星分離機構実証, (3)遠隔検査技術実験(OLIVE), (4)CCD地球センサ(CCDESA)実験などの, 多くの技術実証実験である。これらの実験を実施するために必要な姿勢制御機能を提供することが, 姿勢制御系の役割である。

本稿では, 特色ある μ -LabSat姿勢制御系の設計および実際の開発についてその概要を述べる。

2. 姿勢制御系の概要

2-1 姿勢制御系の基本コンセプト

μ -LabSatは小型衛星である。安価であること, シンプルであることが身上である。高価かつ高性能なバス系コンポーネントは搭載していない。また, 複雑な構成は望ましくない。

上記の観点からは, 「スピン安定方式」が有効である。パッシブに姿勢安定を確保することができ, 構成もシンプルで信頼性が高い。

一方で, OLIVEやCCDESA実験等の各種実験に対応するためには, カメラやOLIVE実験用撮像ターゲット等を一定方向に向け続ける必要がある。ゆえに, 実験時には三軸制御機能が要求される。

そこで, 姿勢制御系の基本コンセプトを次のようにした。

■定常時: スピン安定方式

- ・パッシブに姿勢安定を確保できる
- ・構成がシンプル
- ・確実に衛星バス機能の維持を実現

■ミッション時: 一時的に三軸制御へ移行

- ・三軸制御状態にて撮像やターゲット放出等の各種ミッションに対応可能
- ・複雑な三軸制御を「定常状態」にしない
- ・バイアスモーメント方式とすることで, 三軸制御の異常時にはすぐに安全なスピン状態に退避可能

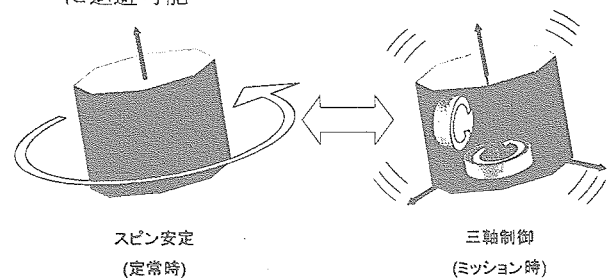


図1 μ -LabSat 姿勢制御系のコンセプト

ミッション時の三軸制御はバイアスモーメント方式とし, スピン軸方向に角運動量を持たせるようにモーメントホイールを配置した。このような構成により, 三軸制御状態において異常が発生しても, モーメントホイールの角運動量を開放するだけで, すぐに安全なスピン状態に退避できる。

上記のコンセプトにより、定常状態の機能をシンプルなスピン安定方式として「安全を確保」しつつ、比較的複雑なミッション要求に対しては「一時的にリスクを負う」スタンスで三軸制御に移行して対応するという、リスク管理の視点から見てバランスのとれた設計となった。

2-2 姿勢制御系コンポーネント

μ -LabSatの姿勢制御系のコンポーネントは以下の通りとなっている。

■姿勢決定センサ

- ・MS (磁気センサ) : 3 軸
- ・CSS (粗太陽センサ) : 2 軸
- ・FOG (光ファイバジャイロ) : 3 軸

■姿勢制御アクチュエータ

- ・MTQ (磁気トルカ) : 2 軸
- ・WHL (ホイール) : 2 軸

※WHL は、モーメントムホイール (WHL-M) およびリアクションホイール (WHL-R) が各1軸。

図2に各コンポーネントの配置を示す。

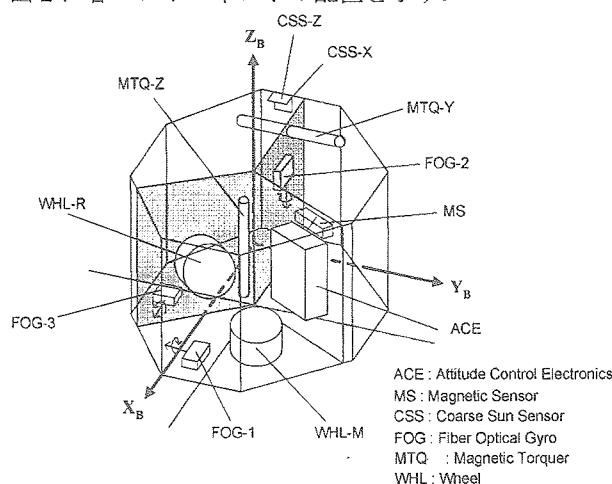


図2 姿勢制御系コンポーネント配置

以下の説明では、特に断わらないかぎり各コンポーネントを上記に示した略語で記載する。

2-3 姿勢制御系の機能と使用コンポーネント

表1に姿勢制御系の機能と、対応する使用コンポーネントを示す。表中の機能を全て実現することが、姿勢制御系の役割である。

表1 ACS Functions and Components

| 機能 | MS | CSS | FOG | MTQ | WHL |
|-------------|----|-----|-----|-----|-----|
| スピン軸推定 | ○ | | | | |
| ニュートーションダンブ | ○ | | ○ | ○ | |
| スピンレート制御 | ○ | | ○ | ○ | |
| スピン軸制御 | ○ | | | ○ | |
| 姿勢決定 | ○ | ○ | ○ | | |
| 慣性飛行 | | | ○ | | ○ |
| 地球指向 | | | ○ | | ○ |

3. スピン制御系の設計

3-1 スピン制御系の機能

μ -LabSatには構体の上面および側面に太陽電池が配置されているが、下面には分離機構やカメラ・ターゲット等が搭載されているため、太陽電池はない。そのため、スピン軸と太陽方向ベクトルのなす角 (Total Sun Angle) = 45[deg]のときに発電量が最大となる設計となっており、この姿勢がノミナル姿勢である (図3)。

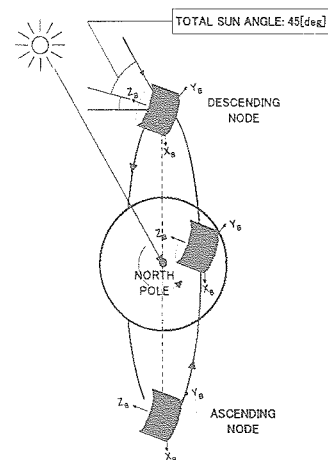


図3 ノミナル姿勢の定義

また、ノミナルスピンレートは、モーメントムホイールが角運動量を十分吸収できる 3[RPM] = 18[deg/sec] に設定した。

このノミナル姿勢およびノミナルスピンレートを許容範囲内にコントロールすることが、スピン制御系に求められる機能である。

3-2 スピン軸推定手法

通常、スピン軸推定にはリファレンスベクトルが2本必要である。(たとえば「太陽方向ベクトル」と「地心方向ベクトル」)

しかしながら、 μ -LabSat搭載のCSSは通常の太陽電池セルであるので、誤差が ± 10 [deg]程度と大きく姿勢推定に用いるには不適である。そこで、MSのみでスピン軸推定を行う方法を採用した。

まず、ある時刻 $t=t_1$ に、磁気ベクトル B^B_1 （上付き添え字 B は衛星座標系を表す）を計測する。これより、磁気ベクトル B_1 とスピンの軸 A がなす角 η が計算できる。次に、ある時刻 $t=t_2$ において、磁気ベクトル B^B_2 を計測する。これより、磁気ベクトル B_2 とスピンの軸 A がなす角 σ が計算できる。

$t=t_1$ および $t=t_2$ での慣性座標系における地磁気ベクトル B^B_1 , B^B_2 （上付き添え字 I は慣性座標系を表す）は軌道モデルおよび地磁気モデルより計算できる。軌道モデルはSGP4を使用し、地磁気はIGRFモデル（10次）を使用して計算している。

時刻 $t=t_1$ と $t=t_2$ の時間差が 10 分程度のとき、スピンの軸 A はほとんど変動しないが、磁気ベクトル B_1 , B_2 は大きく変動する。従って、 A を求めるためのふたつのリファレンスベクトルとして B_1 , B_2 を使用することができる。

このとき、スピンの軸 A は、 B_1 および B_2 を中心軸とする円錐の交線を通るベクトルとして得られる（図4）。

交線は 2 本あるが、うち 1 本は物理的に意味のない解であり、前可視のスピンの軸データとの連続性から容易に排除できる。

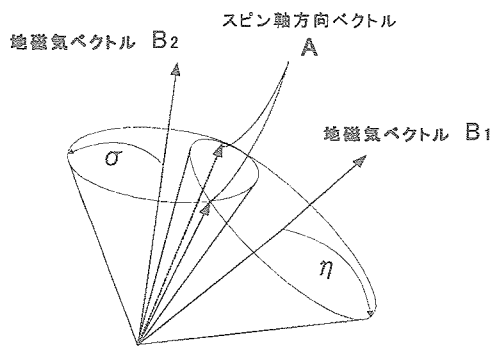


図4 スピンの軸推定の概念図

3-3 MS-MTQ タイムシェアリング

次に述べるニューテーションダンブおよびスピンのレート制御は、MS 出力をもとに、MTQ を駆動することによって行う。

MTQ 駆動中は MS 出力がその影響を受けてしまい、地磁気を正しくセンシングすることができない。そこで、図5のように MTQ 駆動のタイミングと MS サンプルングのタイミングをずらす「MS-MTQ タイムシェアリング」を行う設計とした。

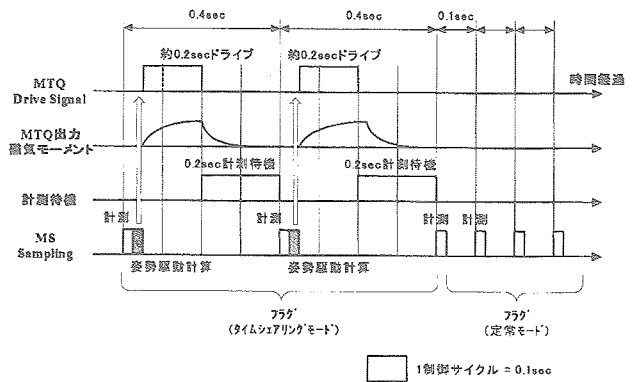


図5 MS-MTQ Time Sharing

計測データから、MTQ 駆動停止から MS サンプルング開始までの待機時間は 200[msec] に設定した。この待機時間は、地磁気をキャンセルする無磁気空間を生成できる磁気試験設備にて、MTQ 出力の過渡特性を測定することで求めた値である。

3-4 ニューテーションダンブ

ニューテーションダンブは、MS 出力をもとに、MTQ-Z を駆動することによって行う。駆動則は、式(1)による。

$$M^B_z = -K \operatorname{sgn}(\dot{B}^B_z) \quad (1)$$

スピンの軸方向の地磁気の変化率によって MTQ 駆動の極性をスイッチングするこの手法は、定性的には衛星の持つ運動エネルギーを消散させる意味があり、結果として運動状態を最大慣性主軸まわりのスピン状態へと導く。

3-5 スピンのレート制御

スピンのレート制御（スピンのレートアップおよびスピンのレートダンブ）は、MS 出力をもとに MTQ-Y を駆動することによって行う。

MTQ-Y の駆動によって衛星が受けるトルクは式(2)に示すとおりである。

$$\begin{aligned} T &= M \times B \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ M^B_y \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B^B_x \\ B^B_y \\ B^B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M^B_y B^B_z \\ 0 \\ -M^B_y B^B_x \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2)$$

T : Torque Vector

M : Magnetic Dipole Moment

B : Magnetic Vector

これより、MTQ 駆動則は、式(3)とした。

$$M^B_y = -K \operatorname{sgn}(\dot{B}^B_x) \quad (3)$$

スピンレートアップ： $K > 0$

スピンレートダウン： $K < 0$

式(2)を見るとわかるとおり、スピンレート制御時にはスピン軸以外の軸（X 軸）まわりにもトルクが発生するため、スピン軸のプリセッションも同時に起きてしまう点に注意が必要である。

3-6 スピン軸制御

スピン軸制御は、地上側のオフライン処理によって MTQ の駆動シーケンスを計算し、衛星側ではコマンドに従って MTQ を駆動するだけのシンプルな設計とした。

スピン軸制御は、軌道 1 周回を単位として実施する。1 周回の中で、MTQ の極性を切り替えるポイントを 4 点うまく設定すれば、平均として、衛星に任意の方向へのトルクを与えることができる。

まず、望みのスピン軸変更に必要なトルクの方を考え、これを満たす 4 点の極性切り替えポイントの時刻を計算する。

次に、望みのスピン軸変化量を達成するために、MTQ の駆動頻度を調整する DUTY を決定する。DUTY をパラメータとして、シミュレーションによって望ましい変化量となる値を探索して求める。

4. 三軸制御系の設計

4-1 三軸制御系の概要

μ -LabSat は、前述のとおり、三軸制御が必要なミッションを実施する際、一時的に定常スピン状態から三軸制御状態へと移行する。その移行シーケンスを図 6 に示す。

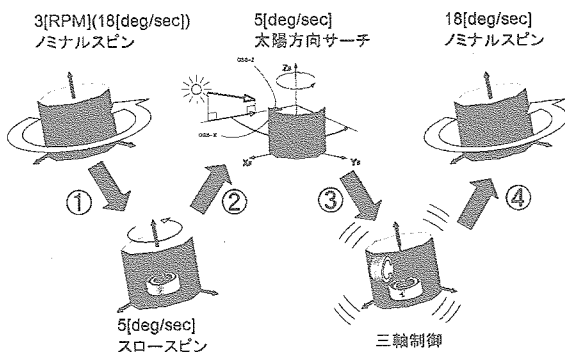


図 6 三軸制御移行シーケンス

ミッション終了は、WHL-M、WHL-R の角運動量を開放することによって、再びもとの定常スピン状態へと復帰する。

4-2 太陽サーチと姿勢決定のアルゴリズム

μ -LabSat の三軸制御はバイアスモーメンタム方式であり、スピン軸の向き（= 角運動量方向）はスピン軸のオフライン推定であらかじめわかるので、三軸制御の際の姿勢の自由度は「スピン軸まわりの角度」のみである。

スピン軸まわりの角度を決定するための情報として、衛星の側面に設置されている CSS-X のセンサ出力を用いる。

μ -LabSat がスピンしているとき、CSS-X は周期的に太陽の方向を向くので、CSS-X の出力のピークは周期的に訪れる。このピークとなるタイミングを計測する。

CSS-X がピーク値となるタイミングから、FOG 出力パルスの積算を開始し、太陽方向からの角度を計測する。太陽方向を基準として、「スピン軸まわりの姿勢角」を決定する。

ピークの値ではなくピークタイミングだけを使用するため、CSS 出力の精度が効いてこないところにこの手法の利点がある。

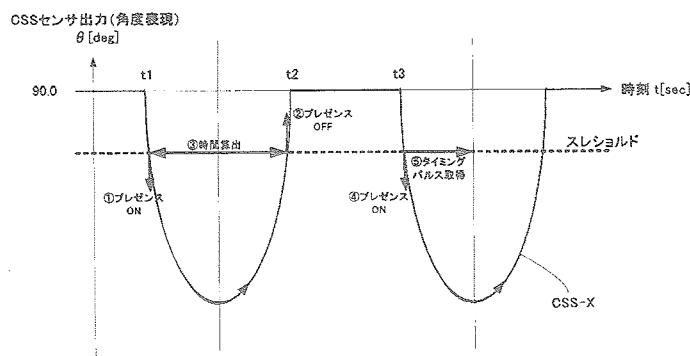


図 7 太陽サーチアルゴリズム

4-3 三軸制御（慣性飛行）

μ -LabSat は、WHL-M（モーメンタムホイール）および WHL-R（リアクションホイール）を用いたコントロールドバイアスモーメンタム方式の三軸制御を行う。前節で述べた姿勢決定の後、FOG のレート出力による姿勢伝播によって姿勢を推定し、保持するが、三軸制御を実施する時間が短い（最大 30 分程度を想定）ため姿勢を伝播に頼る設計となっている。

μ -LabSat は、パドルや展開物等の柔軟構造物は有しない構造であるため、制御則はシンプルな PD ベースとした。また、WHL の制御については、図 8 に示すホイールスピードサーボ制御を適用した。ブロック図中のフィードフォワードループについては、スピードサーボ系の時定数を改善するために適用した。

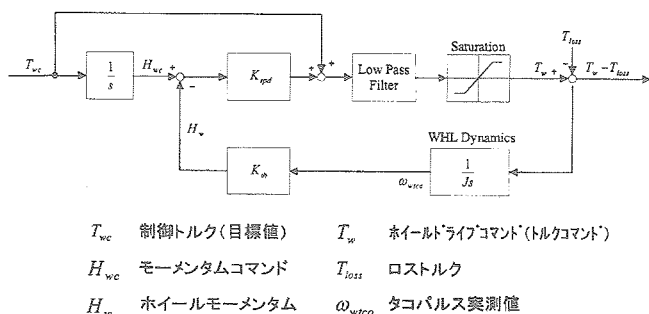


図 8 WHL スピードサーボ制御ブロック図

4-4 三軸制御 (地球指向)

地球指向制御は、CCDESA を地球指向させるために用意されたモードである。

まず、スピン軸制御によってスピン軸と軌道面法線方向ベクトルを一致させておく。その上で、WHL-M (モーメンタムホイール) 制御系に衛星の軌道レートに相当するレートバイアスを与え、衛星にスピン軸まわりにゆるやかな回転運動をさせて、CCDESA 面が常に地球方向を向くように同期させ、地球指向を実現する設計となっている。

5 姿勢制御系の開発

5-1 姿勢制御系の設計

姿勢制御系の設計においては、設計結果を前項までに記したが、制御パラメータについては、数値シミュレーションを繰り返しながら決定した。

また、この作業を行うため、 μ -LabSat の姿勢・軌道シミュレーターを開発した。このシミュレータは、TCP/IP による通信 I/F を備えており、外部の制御ロジックと組み合わせて試験することが可能な設計とした。これは、制御系設計における制御パラメータ決定だけでなく、後述のように、搭載ソフトウェアを衛星に搭載して行う静的閉ループ試験にも用いることを目的としたためである。

5-2 ソフトウェアの開発

姿勢制御系を含め、 μ -LabSat の搭載ソフトウェアの開発は、全て NASDA 内で実施した。

姿勢制御系ソフトウェアの開発期間は、実質 7 ヶ月程度と短期間であり、人的なリソースも限られていた。また、衛星インテグレーション後の電気性能試験や、衛星の運用性の確認を行う運用模擬試験において、姿勢制御系ソフトウェアに対する仕様要求の変更や、機能追加があると見込まれたため、通常の宇宙機の搭載ソフトウェアの開発に見られるような開発プロセス、すなわちウォーターフォール型の

開発プロセスを適用せず、スパイラル型プロセスにて、ソフトウェアの開発を試みた。図 9 に、 μ -LabSat におけるソフトウェア開発フローを示す。

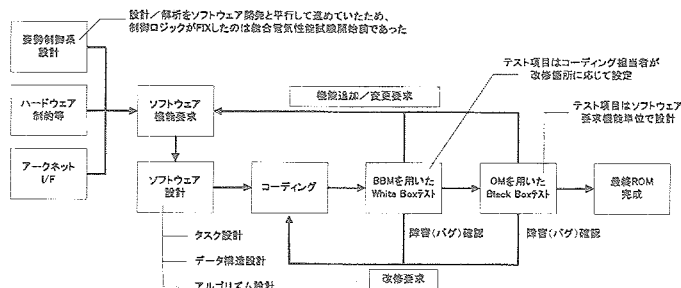


図 9 姿勢制御系ソフトウェア開発フロー

ソフトウェアの開発に当たっては、要求仕様書やフローチャート等のドキュメントは、実質的にはほとんど作成しなかった。姿勢制御系設計者、コーディング担当者、運用者が同一であったため、ソフトウェアへの要求機能リスト、および、外部インターフェイスを記述するためのドキュメント(搭載計算機間通信プロトコル定義書やコマンド・テレメトリ定義書等)以外のドキュメントの維持・改訂は不要であったためである。

一方、実際の開発においては、限られたリソースの元、開発効率を上げるために以下に示すような工夫を試みた。

- (1) 2 名の姿勢制御系担当者間での相互チェックを容易にするため、ソフトウェアのバージョン管理ツールとして CVS を導入し、ソフトウェアの改訂情報を共有した。
- (2) 試験により確認されたソフトウェアの不具合については、 μ -LabSat 開発用に整備された文書管理サーバに登録し、開発メンバー間で不具合内容やステータス等の情報を共有した。
- (3) スケジュール制約から、試験による検証期間が短くなることに伴うリスクの低減のため、生コードから自動的に変数構造をリストにまとめ、自動で型変換チェック、初期化チェック等を行うツールを開発し、コードレベルでのバグ検査を試みた。

(2)については、ソフトウェア担当者だけでなく、開発チーム全体での情報共有を目的としたものであったが、不具合の発生情報や、そのステータス(不具合が修正されたか否か)などの情報がほぼリアル

タイムに把握できるため、衛星システム全体の開発計画の管理にも非常に有用であった。μ-LabSat の開発において整備した文書管理システムの概要を図 10 に示す。

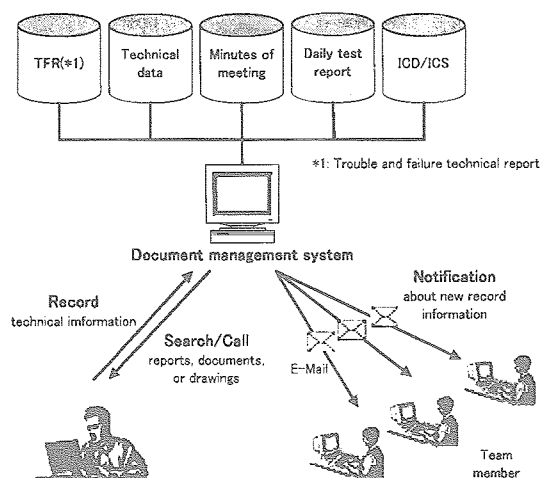


図 10 文書管理システムによる不具合情報の共有

(3)については、限られた条件でのソフトウェアのテストでは発見しにくい変数の型変換誤り、初期化誤りなどに関連するコーディングミス 30 件以上洗い出すなど、期待以上の効果があった。また、生成された変数リストは複数のタスク間での変数の共有箇所を明示するため、最終的なソフトウェア設計の確認にも有効であった。

5-3 姿勢制御系の開発試験

姿勢制御系の開発試験としては、WHL, MS, CSS, FOG などのコンポーネントの特性試験などの他に、以下に示すような試験を実施した。

- (1)姿勢制御系静的閉ループ試験(SCLT)
- (2)残留磁気測定試験

(1)は、搭載ソフトウェアを衛星搭載コンピュータに焼きこんだ最終的な状態において、先に述べた軌道・姿勢シミュレータと接続し、姿勢制御系ソフトウェアが設計どおりの機能・性能を有しているかどうかを確認するための試験である。試験コンフィギュレーションを図 11 に示す。図中の Operation System Simulator からは、実際の運用端末と同様のインターフェイスにより、衛星にコマンドを送信することが可能である。

(2)は、衛星の残留磁気モーメントや、コンポーネ

ント動作時に発生する磁気モーメントが十分に小さいことを確認するために実施した試験である。残留時期モーメントによるスピン軸のプリセッションが大きくなるため、特に小型スピン衛星に対しては重要な試験である。

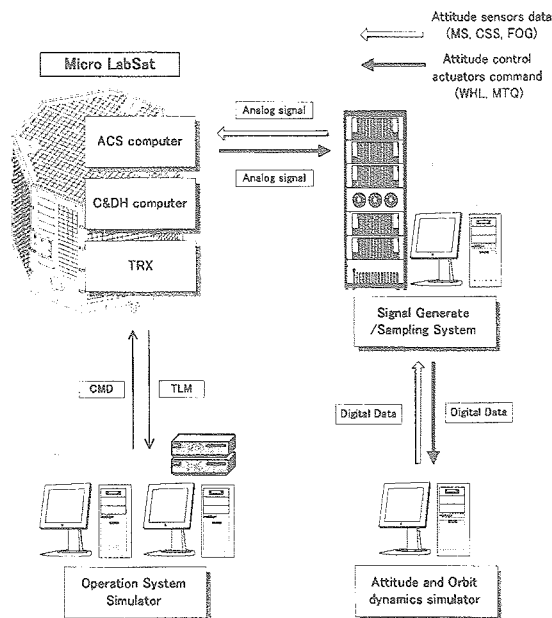


図 11 静的閉ループ試験コンフィギュレーション

6. おわりに

μ-LabSat 姿勢制御系の開発について概説した。

姿勢制御系の設計としては、定常状態がスピン安定であること、一時的に三軸制御に移行すること、高価な姿勢決定センサを搭載していないことが、近年の衛星としては特徴的なところと考える。

また、姿勢制御系の搭載ソフトウェアは、NASDA インハウス作業において、限られた期間で開発されたものではあったが、参考文献[1]で報告されているよう、打ち上げ後大きな問題を抱えることなく機能し、要求されていた全ての項目を達成することができた。

参考文献

- [1] 山元, 吉原 : μ-LabSat 姿勢制御系の軌道上運用結果, 第 47 回宇宙科学技術連合講演会講演集
- [2] James R. Wertz, Spacecraft Attitude Determination and Control, Microcosm Inc., 1978

2E4 μ -LabSat 姿勢制御系の軌道上運用結果

○山元透, 吉原圭介 (宇宙開発事業団)

On-Orbit Operation of the μ -LabSat Attitude Control Subsystem
Toru Yamamoto, and Keisuke Yoshihara (NASDA)

Key Words: μ -LabSat, Attitude Control Subsystem, ACS, Micro Satellite, Small Satellite

Abstract

μ -LabSat is a 50[kg] class micro satellite which was launched on December 14 2002. The roll of the Attitude Control Subsystem(ACS) is to provide the necessary attitude control services to carry out several experiments, such as preliminary experiment on in-orbit inspection, and CCD Earth Sensor Assembly(CCDESA) experiment, and so on. Since the launch, the ACS has functioned normally. This paper describes about the operation and the performance evaluation of μ -LabSat ACS.

1. はじめに

μ -LabSat は 50[kg]級の小型衛星である。2002 年 12 月 14 日に、ADEOS-II の相乗り衛星として、H-IIA ロケット 4 号機によって打ち上げられた。

μ -LabSat のミッションは、(1)50kg 級小型衛星バス実験、(2)SELENE リレー衛星分離機構実証、(3)遠隔検査技術実験 (OLIVE)、(4)CCD 地球センサ (CCDESA) 実験などの、多くの技術実証実験である。これらの実験を実施するために必要な姿勢制御機能を提供することが、姿勢制御系の役割であった。

打ち上げ後、姿勢制御系は軌道上で正常に機能した。そして、小型スピン衛星バスの姿勢制御系として軌道上で成立し、予定されていた全ての軌道上実験に対して十分な姿勢制御機能を提供することができた。

本稿では、 μ -LabSat 姿勢制御系の軌道上運用結果について述べる。

2. 初期機能確認運用の実績

μ -LabSat はリフトオフの 2074 秒後に H-IIA ロケットから分離され、軌道に投入された。分離から初期機能確認終了までの実績を表 1 に示す。

表 1 初期機能確認運用の実績

| 日付 | イベント | 結果 |
|------------|-------------------------|--|
| 2002/12/14 | 分離後スピン状態確認 | スピンレート 予測値: 74.5~80.5[deg/sec] 実測値: 75.8[deg/sec] ニュートーション角: 1.6[deg] |
| | 分離後スピン軸確認 スピン軸推定機能確認 | スピン軸赤経 予測値: -55[deg] 実測値: -55[deg] スピン軸赤緯 予測値: -16[deg] 実測値: -15[deg] |
| | MS-MTQタイムシェアリング確認 | MSとMTQのタイムシェアリングが良好であることを確認(図2参照) |
| | ニュートーションダンブ機能確認 | ニュートーションダンブ機能の健全性を確認 |
| 12/15 | ニュートーションダンブ実験 | ニュートーション角: 1.6[deg] → 0.4[deg] |
| 12/19 | スピンレートダウン制御機能確認 | スピンレートダウン制御機能の健全性を確認 |
| 12/20 | スピン軸制御機能確認 | スピン軸制御機能の健全性を確認 ここまでで、スピン制御系の全ての機能が良好であることを確認し、スピン衛星としての成立性に目処が立った |
| 12/26 | スピンレートアップ制御機能確認 | スピンレートアップ制御機能の健全性を確認 |
| 2003/01/24 | 三軸制御(慣性飛行)機能確認 | 三軸制御機能(慣性飛行)に成功 |
| 02/11 | 三軸制御(地球指向)機能確認 | 三軸制御機能(地球指向)に成功 |

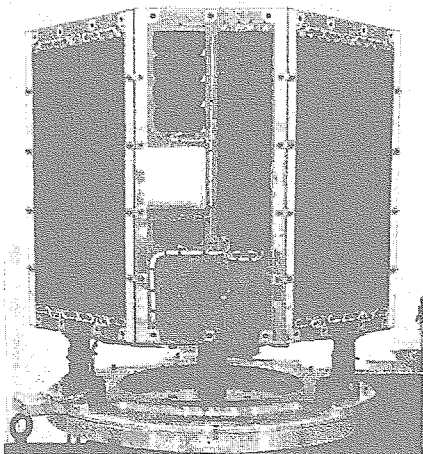


図 1 μ -LabSat の外観

μ -LabSat の姿勢系には、太陽捕捉あるいは地球捕捉といったアクティブな初期捕捉シーケンスはない。ロケットからの分離時には、SELENE リレー衛星用に開発された分離機構が衛星をスピンさせながら放出する。放出方向 (=スピン軸) は、発電量の観点から太陽方向に対して一定の角度となるよう規定しているが、この合わせ込みはロケット第二段の制御に頼っている。従って、 μ -LabSat は分離直後において既に安全な姿勢でスピン状態となっているはずであり、アクティブな制御を行う必要はない。パッシブなスピン安定状態に

て地上からのコマンドを待つことになる。

衛星分離直後の最初の可視では、初期姿勢（スピン状態およびスピン軸方向）が正常であるかどうか、衛星の電力リソース・熱環境の観点からクリティカルであり、重点的にモニタされた。

最初の可視において取得したテレメトリにより、表1に示したように、結果としてほぼ計画通りの姿勢で軌道に投入されていることがわかった。衛星の安定が確認され、無制御のスピン状態のまましばらく放置しても問題ない状態と判断したため、性急にスピン軸制御、あるいはニューテーションダンブ制御等をかける必要がないと判断し、順次慎重に機能確認を実施することとした。

磁気制御系の火入れとなるニューテーションダンブ機能確認運用では、慎重を期すため、まず可視中のみ数分の間磁気トルカ（MTQ）を駆動して様子を見た。そのデータより、わずかなニューテーション角の減少が認められ、ニューテーションダンブ制御機能の健全性を確認できた。

図2はこのときに取得した磁気センサ（MS）とMTQの時間折半（MS-MTQ タイムシェアリング）機能を確認したテレメトリデータである。

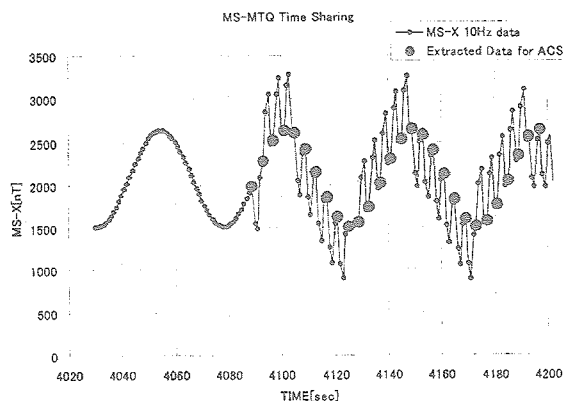


図2 MS-MTQ タイムシェアリング

図2の途中からMTQを駆動開始しており、それにもなつてMSデータが乱れている。しかし、図2中に●で示した「MSサンプリングタイミングでのデータ」は乱れることなく連続的なサインカーブを続けている。これは、MTQの影響が姿勢制御に使用する磁気センサデータを汚染していないことを示している。

ついで、スピンレートダンブ制御の機能確認を実施した。このときも慎重を期して、可視中にMTQを数分間駆動し、微小なスピンレートダンブの効果を確認した。

この間、衛星の姿勢は安定していたが、地球の公転

のため太陽方向は一日に約1[deg]ずれるため、電力リソース・熱環境の観点から早期にスピン軸制御の機能を確認しておく必要があった。

打ち上げ後7日目にスピン軸制御運用を実施した。スピン軸制御は、一周回にわたってMTQ駆動の結果を平均した結果として、望みの制御量が得られる方式となっている。そのため、可視中だけでは効果を確認できない。一周回にわたりMTQを駆動する必要がある。

これは失敗すれば衛星の電力低下、あるいは熱環境の悪化を招くリスクのある運用となった。しかし、それまでに軌道上で取得している磁気センサデータがシミュレーションによる磁気センサ計算値とよく一致していることを確認済みであったため、問題ないと判断して実施した。その結果、スピン軸を目標値付近に制御することができ、機能の健全性を確認することができた。

ここまでの機能確認によって、スピン制御系が全て順調に機能していることがわかり、 μ -LabSatがスピン衛星として定常的に運用できることの目処を得た。

その後、三軸制御実験運用へ向けての準備に入った。

三軸制御を行うには、衛星の角運動量をモーメントムホイールが吸収可能なレベルまで落とす必要がある。具体的には、打ち上げ後のスピンレート75.8[deg/sec]を「定常スピンレート」である18.0[deg/sec]まで落とす。

スピンレートを落とすとスピン軸ドリフトが大きくなるため、慎重を期して約10[deg/sec]ずつスピンレートダンブ運用を実施した。スピン軸ドリフトの経過観察をしながら徐々にスピンレートを落としていった。結果として、スピン軸のドリフト量は18[deg/sec]でも許容範囲内であることが確認できた。

そして、「定常スピンレート」である18[deg/sec]に到達した後、2003年1月24日に三軸制御機能確認（慣性飛行）運用を実施した。慎重を期すため、スピンから三軸への移行シーケンス開始から、三軸制御が終了し定常スピンレートへの復帰が済むまで、全ての過程を可視中に実施する運用とした。実験は成功し、三軸制御（慣性飛行）の機能が確認された。

ついで2月6日、三軸制御機能確認運用（地球指向）にを実施し、レートバイアスによる地球指向が正常に機能することを確認した。

この段階で、 μ -LabSatの各種技術実証実験に必要な全ての姿勢制御機能を提供できる目処を得た。ここに至るまで、打ち上げから55日間を要した。

3. スピン軸推定系の評価

図3に、地磁気ベクトルのノルム値に関して、一周回の磁気センサテレメトリデータと地磁気モデルによる計算値を比較したグラフを示す。地磁気モデルにはIGRF(10次)、軌道モデルにはSGP4を使用した。

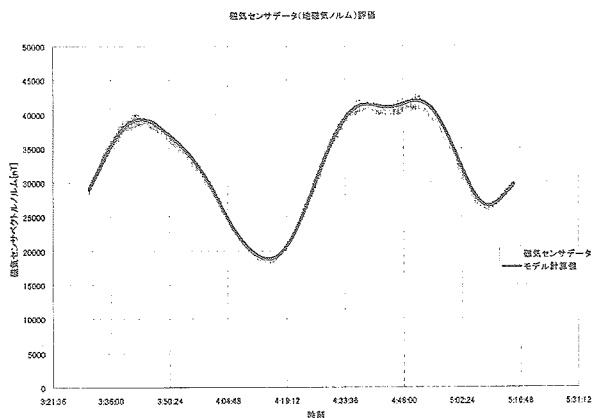


図3 磁気センサデータと磁気モデルによる計算値の比較(磁気ベクトルのノルム値)

磁気センサデータのノルムの誤差は1.7[%](RMS)であった。スピンレートに同期したノルムの変化が支配的なことから、スケールファクタ誤差が大きく効いているものと考えられる。

スピン軸推定は、磁気センサのデータのみを使用してオフラインで実施した。2回の地磁気計測の間スピン軸が一定(実際、10分程度ではほとんど動かない)と仮定し、このふたつの地磁気ベクトルデータをリファレンスとして、スピン軸を計算する手法をとっている。(参考文献[1])

スピン軸推定誤差の考え方を図4に示した。

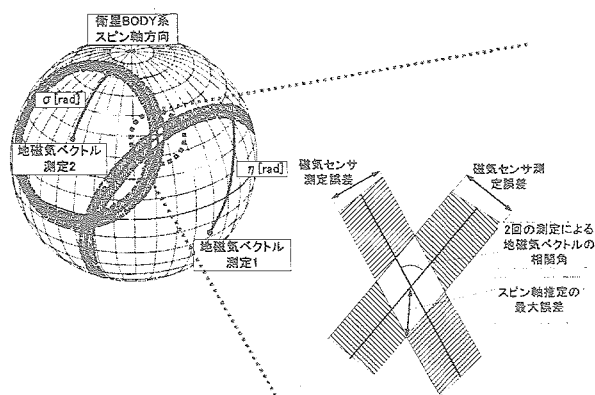


図4 スピン軸推定の最大誤差

磁気センサ測定誤差を考慮すると、2回の地磁気ベクトル計測から推定されるスピン軸ベクトルは、衛星に固定した単位球面上で図4の平行四辺形の領域に含まれることになる。この平行四辺形の対角線で、スピン軸推定の最大誤差を評価できる。

上記評価方法によって、スピン軸の推定精度を±3[deg]程度と結論した。

4. スピン制御系の評価

4-1 ニューテーションダンブ

図5にニューテーションダンブ運用結果の例を示す。

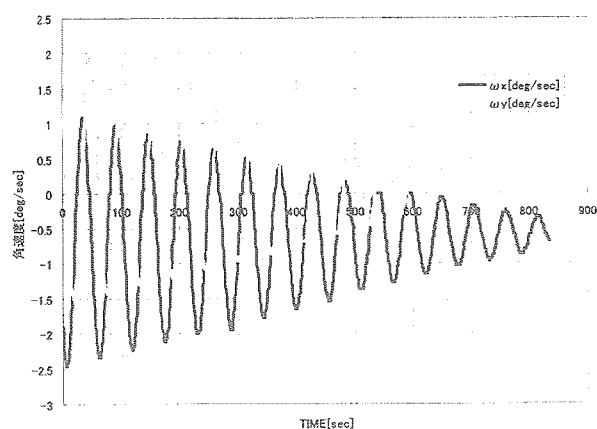


図5 ニューテーションダンブ運用
スピン軸に垂直な角速度成分の履歴

スピン軸に垂直な角速度成分 ω_x および ω_y が、ニューテーションダンブ制御によって減少していることがわかる。

チップオフレート(スピン軸に垂直な軸の角速度)がある閾値以下になったら、衛星側で自動的にダンブ終了と判断するようにしている。

閾値を適切に設定することで、角速度ベクトルと角運動量ベクトルの成す角を、ほぼ衛星座標系と慣性主軸のズレの角度まで落とすことが可能である。

4-2 スピンレート制御

図6にスピンレートアップ制御運用、図7にスピンレートダンブ制御運用の例を示す。各々のグラフには、事前に行った数値シミュレーションの結果を付記してある。

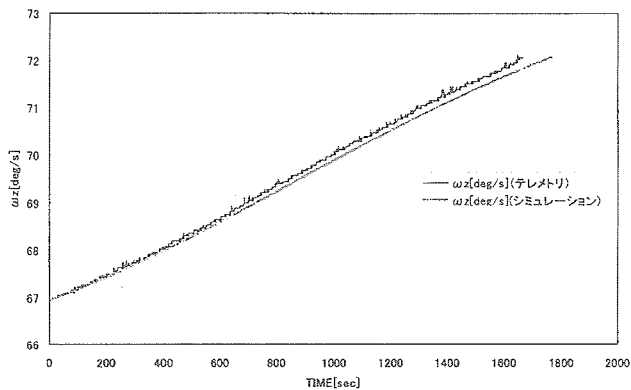


図6 スピンレートアップ運用の例
テレメトリとシミュレーションデータ

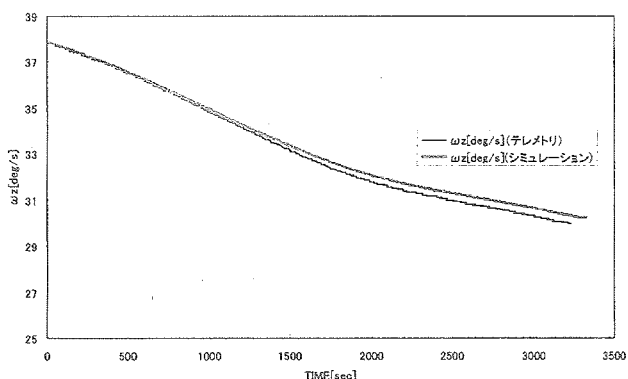


図7 スピンレートダンプ運用の例
テレメトリとシミュレーションデータ

スピンレートアップ、スピンレートダンプともに、事前のシミュレーションによる結果よりも4%程度制御量が多い結果となった。これは、シミュレーションモデルに磁気トルカの温度変化に伴う出力変化を入れていないことによる誤差と考えられる。

規定のスピンレートに達した後、衛星側で自動的に制御を終了するので、運用上は上記誤差は多少制御が早く終了するのみで問題とならない。

0.2[deg/sec/day]程度の定常的なスピンレートの下降傾向がある。そのため、ノミナルスピンレートの下に閾値を設け、それを下回るとスピンレートアップをかけるように設定し、定常スピンレートを維持している。

4-3 スピン軸制御

図8に打ち上げから現在までのスピン軸のトレンドグラフを示す。

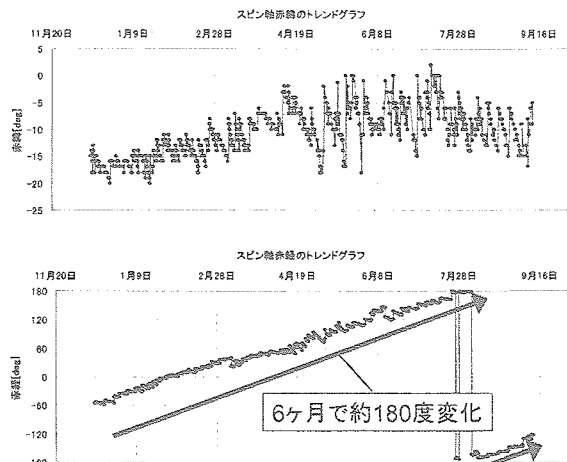


図8 打ち上げからのスピン軸の履歴

電力リソースおよび熱環境の観点から、 μ -LabSatはスピン軸と太陽方向の関係を保つ必要がある。太陽方向ベクトルは地球の公転のために一日に約1[deg]変化するため、太陽方向に合わせてスピン軸を制御することになる。打ち上げ後半年で、赤経はほぼ180[deg]移動することになる。

スピン軸のドリフトは18[deg/sec]の定常スピンレートにおいて1.0~2.0[deg/day]程度である。おおよそ4日に一度程度のスピン軸制御にて、ノミナル姿勢の維持を行っている。

5. 三軸制御系の評価

5-1 三軸制御（慣性飛行）

μ -LabSatは、三軸制御が必要な実験を行うときに一時的にスピン状態から三軸制御へ移行し、実験が終了し次第スピン状態に復帰する。

図9に三軸制御（慣性飛行）時の衛星の姿勢レートトレンドを示す。

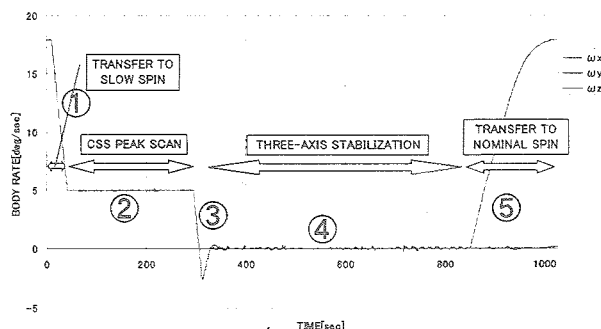


図9 三軸制御（慣性飛行）
三軸移行からスピン復帰への角速度履歴

以下に、三軸制御シーケンスを図 9 の番号と対応させて説明する。

- ① ノミナルスピン (18[deg/sec]) からスロースピン (5[deg/sec]) への移行シーケンス。WHL-M (モーメントホイール) を駆動してスピンレートを制御する。
- ② 太陽サーチの期間。衛星がスピンしていることを利用し、CSS-X 出力を用いて太陽方向をサーチするアルゴリズムを実行する。
- ③ 太陽サーチが終了し、姿勢を決定。WHL-M および WHL-R (リアクションホイール) を制御して三軸制御に移行。
- ④ コントールドバイアスモーメント方式の三軸制御 (慣性飛行) を行い、各種軌道上実験を行う。
- ⑤ ホイールの角運動量を開放し、ノミナルスピン状態に復帰。

実際の運用においては、日本上空にてミッションを行うことが多い。そのため、日本にある地上局 (勝浦・増田・沖縄) の AOS 数分前に三軸シーケンス移行のストアードコマンドを発行し、AOS 直後のタイミングでスロースピン状態から三軸制御状態に移行するように運用を組み立てることが多い。

図 10 に、太陽サーチ中の CSS-X の出力テレメトリを示す。

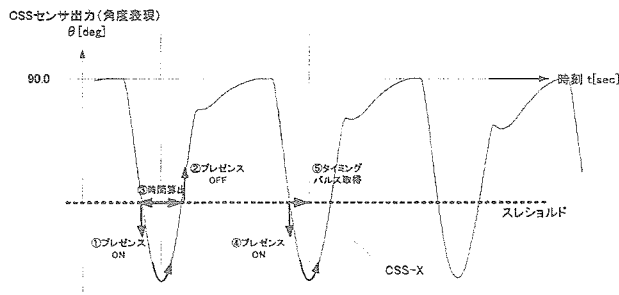


図 10 太陽サーチ中の CSS-X 出力テレメトリとサーチアルゴリズム

CSS-X は、衛星側面に設置された太陽センサである。ハードウェアとしては通常の太陽電池セルであり、発生電流値から太陽方向の角度データを知ることができる。 μ -LabSat は、スロースピンしながら CSS-X の出力をモニタし、太陽方向をサーチする。CSS-X の検出角度精度は悪いが、角度の値そのものではなくピークタイミングを検出するためだけに用いるので、問題と

はならない。

図 10 における大きいピークが太陽による出力であり、その右側にある小さい山型の曲線が地球のアルベドによる出力である。コマンドで指定したスレシヨルドを超える CSS-X 出力を記録し、CSS-X 取り付け面が太陽方向を向くピークタイミングを捉える。このタイミングのズレは、地球のアルベドの影響、スピンレート計測誤差、制御周期 (10Hz) を考慮すると、角度換算で ± 1.0 [deg] 程度である。

ピークタイミングを捉えるアルゴリズムは正常に機能し、全ての運用で太陽サーチ、太陽方向の補正に成功した。

図 11 に三軸慣性飛行中の姿勢レートデータを示す。

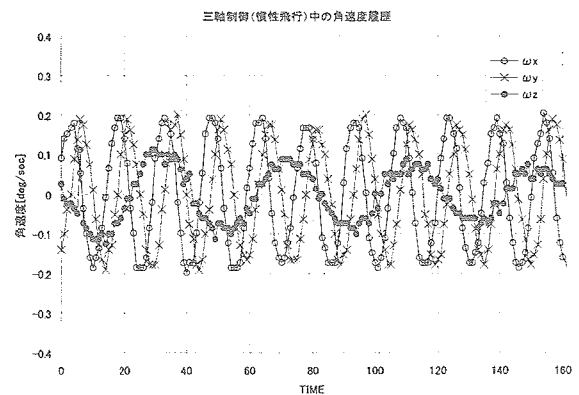


図 11 三軸制御 (慣性飛行) 中の角速度データ

姿勢安定度は 1σ で約 0.1[deg/sec] となった。

三軸姿勢制御精度の要求値は ± 10 [deg] であり、結果としてこれを十分満足した。磁気センサデータによる姿勢推定から評価すると、三軸制御時間が 20 分程度であれば、実力としては ± 4 [deg] 程度が達成できていると考えている。OLIVE 等の実験運用に際して、実験に必要な三軸制御機能を十分に提供することができた。

2003 年 9 月 25 日までの実績では、三軸制御時間は最大で 20 分程度となっているが、電力リソースにはまだ余力があるため、今後 1 周回にわたって三軸制御を行うことも可能と考えている。

5-2 三軸制御 (地球指向)

地球指向制御は、搭載している CCDESA (CCD 地球センサ) を地心方向に向けるために用意されているモードである。

地球指向制御は、スピン軸まわりに軌道角速度 (約 0.0595[deg/sec]) に相当するレートバイアスを与え、衛星に軌道運動に同期したスロースピンをさせることで実現している。

図 12 に三軸制御(地球指向)において CCDESA (CCD 地球センサ) で撮像した地球の画像を示す。視野の真ん中に地球が来ていることは、 μ -LabSat が地球指向制御を行っていることを示している。

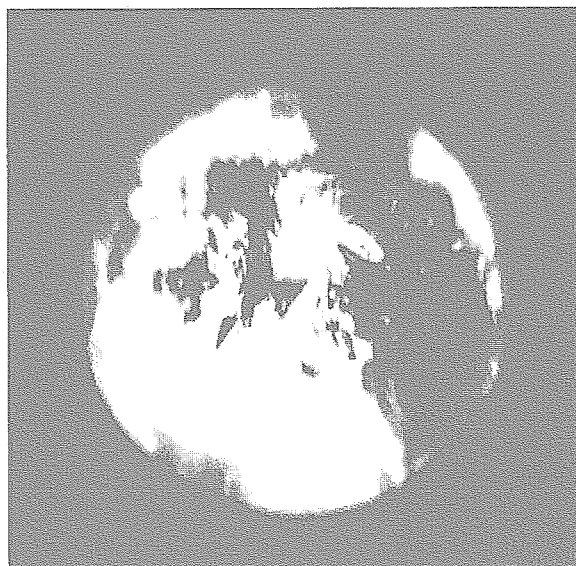


図 12 CCDESA で撮像した地球の画像
三軸制御 (地球指向) 時に撮影

図 13 に地球指向制御時のポインティングエラー履歴の一例を示す。

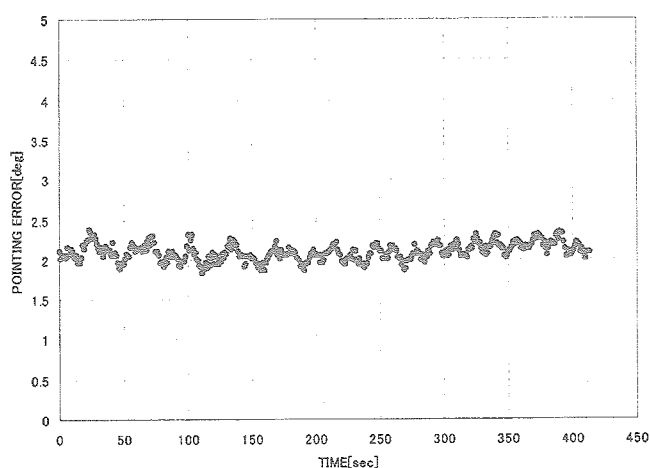


図 13 地球指向制御時のポインティングエラー履歴

姿勢は磁気センサデータから計算し、地心方向ベクトルは軌道モデルから算出して、ポインティングエラーを評価している。

地球指向精度は、磁気センサデータによる姿勢の評価、CCDESA による地心方向ベクトルの推定値から判断して、 $\pm 4[\text{deg}]$ 程度が達成できていると考えている。

6. おわりに

μ -LabSat 姿勢制御系の軌道上結果について、その概略を述べた。

μ -LabSat の姿勢制御系は、打ち上げ後、大きな問題を抱えることなく順調に機能した。そして、軌道上においてスピン衛星バスとしての機能を確保することができた。

また、三軸姿勢制御実験に成功し、予定されていた全ての軌道上実験に対して、十分な姿勢制御機能を提供することができた。このクラスの衛星が三軸制御を行うのは、日本では初めてのことである。

2003 年 9 月 25 日現在、打ち上げから 9 ヶ月以上が経過したが、劣化や突発的な不具合等なく引き続き順調に機能している。 μ -LabSat は現在後期利用フェーズに入っており、様々な後期利用実験を実施しつつ、バス系の評価データを蓄積している段階にある。

さらに、後期利用実験がいくつかの機関から提案されており、実現にむけての検討が始まっている。MOBC (ミッション用オンボードコンピュータ) の再プログラミング機能を利用した、姿勢制御系の発展的な実験も検討されている。今後は、これらの後期利用実験においてさらなる成果を得られるよう、より柔軟な運用を進めていくつもりである。

最後に、 μ -LabSat 姿勢制御系の開発・運用にあたっては NASDA 内外の識者の皆様や関連メーカーの皆様から非常に多くのご支援、ご助言をいただいた。この場をお借りして深く感謝の意を表したい。

参考文献

- [1] 吉原, 山元: μ -LabSat 姿勢制御系の開発, 第 47 回宇宙科学技術連合講演会講演集
- [2] James R. Wertz, Spacecraft Attitude Determination and Control, Microcosm Inc., 1978

PRECISION POINTING MANAGEMENT FOR THE ADVANCED LAND OBSERVING SATELLITE (ALOS)

Takanori Iwata^{*} and Yuji Osawa[†]
National Space Development Agency of Japan,
2-4-1 Hamamatsu-cho, Minato-ku, Tokyo 105-8060, JAPAN
and
Tetsuo Kawahara[‡]
NEC TOSHIBA Space Systems,
4035 Ikebe-cho, Tsuzuki-ku, Yokohama 224-8555, JAPAN

Abstract

The Advanced Land Observing Satellite (ALOS) is a NASDA's flag-ship for the high-resolution Earth observation. Characterized by its spatial resolution and global data collection, the ALOS mission introduced a unique set of requirements upon sensor pointing to provide geometric accuracy for high-resolution images. Specifically, ALOS addresses 4 stringent requirements: pointing stability ($0.0004deg/5sec$), pointing control accuracy ($0.1deg$), pointing determination accuracy ($0.0002deg$), and position determination accuracy ($1m$).

An integrated framework (*i.e.*, *pointing management*) that extends over attitude control, dynamics, navigation, antenna control, inter-sensor & intra-sensor thermal structure, data handling, and ground-based systems, is designed to meet these requirements. A variety of solution approaches are developed and implemented in this framework. The new approaches include precision star tracker, precision GPS receiver, high-performance onboard computer, star-sensor based attitude determination & control, phase stabilization of flexible structures, precision cooperative control, active damping antenna control, dynamics management, high-bandwidth pointing measurement, low-thermal-distortion structure, ground-based pointing determination, and ground-based position determination.

This paper presents the formulation of the pointing requirements and the framework of the ALOS's precision pointing management, with an emphasis on the solution approaches.

1 Introduction

The Earth observation in the present day has two breeds. One is the wide-area observation of atmosphere and ocean that focuses on the contribution to Earth science. The other is the high-resolution observation of land areas that focuses on the promotion of practical use of observation data. In this field, continuing efforts toward higher resolution have been pursued. And as the spatial resolution

improves further, the importance of geometric accuracy becomes more evident.

1.1 Advanced Land Observing Satellite (ALOS) Mission

The Advanced Land Observing Satellite (ALOS) is a NASDA's solution for the high-resolution earth observation of the next generation.

Specifically, ALOS is given the following mission with high spatial resolution and world-wide coverage: (1) Generation and update of maps, in particular, 1/25000 scale maps, (2) Regional environment monitoring, (3) Disaster management support, (4) Resource survey, and (5) Technology development for future earth-observation missions.

1.2 Satellite System

In order to accomplish this mission, ALOS has three mission instruments on-board: the Panchromatic Remote Sensing Instrument for Stereo Mapping (PRISM), the Advanced Visible & Near-Infrared Radiometer-2 (AVNIR-2), and Phased Array Type L-band Synthetic Aperture Radar (PALSAR). Figure 1 shows ALOS's orbital configuration.

PRISM is the ALOS's main sensor primarily designed for the cartography mission, and consists of three optical radiometers each of which has $2.5m$ spatial resolution. AVNIR-2 is an improved version of ADEOS's AVNIR optical sensor, and provides multispectral observation with $10m$ resolution and pointing capability. PALSAR is a synthetic aperture radar which provides all-weather observation with $10m$ spatial resolution and variable off-nadir capability. With AVNIR-2 and PALSAR, ALOS will provide the first opportunity for simultaneous observation of the same regions using an optical sensor and a synthetic aperture radar. Further, the pointing capabilities of AVNIR-2 and PALSAR will enable immediate observations (within 48 hours) when disasters strike.

In addition to the three mission sensors, a set of satellite bus technologies play an important role in accomplishing the ALOS's mission. These technologies include (1) pointing management that involves precision pointing and position determination and enhanced pointing stability, and (2) mass data compression (up to 1/8), recording (90 GB),

^{*}Ph.D., Associate Senior Engineer, ALOS Project Team.

[†]Associate Senior Engineer, ALOS Project Team.

[‡]Engineering Manager, Earth Observation Satellite Group

and transmission (240 Mbps). For these purposes, ALOS has the Star Tracker (STT), the GPS Receiver (GPSR), and the Data Relay Communication Antenna (DRC), as seen in Figure 1.

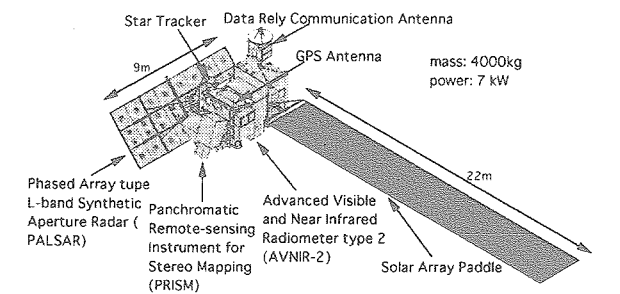


Figure 1: Advanced Land Observing Satellite (ALOS)

As a spacecraft, ALOS is the largest satellite that Japan has ever built. This three-axis stabilized satellite has a weight of 4000kg and a generated power of 7kW. ALOS will be launched into a sun-synchronous sub-recurrent orbit with an altitude of 691.65km and an inclination of 98.2deg by an H-IIA launch vehicle in the summer of 2004, and it is designed to fulfill its mission over 5 years. NASDA has already completed the development tests of ALOS engineering models and the designs of its proto-flight model. Currently, the protoflight tests and the assembly of the proto-flight model are in progress.

2 Pointing Management

2.1 Precision Pointing Requirements

The ALOS mission is uniquely characterized by *global data collection with high resolution (2.5m)*. It is the only Earth observation satellite that is capable of attaining these conflicting goals. This characteristics requires (1) Geolocation determination of globally observed images without ground control points (GCP), and (2) Precise geometric correction of high-resolution images.

To this end, it is required the precise determination of satellite position and sensor pointing orientation as well as the precise stabilization of sensor pointing direction. These requirements are examined and are formulated as a set of quantitative specifications. Table 1 summarizes the derived specifications, *i.e.*, *pointing requirements*, for ALOS. These specifications include 3 challenging requirements: long term pointing stability to be less than $4.0 \times 10^{-4} \text{deg}/5\text{sec}$, pointing determination accuracy to be less than $\pm 4.0 \times 10^{-4} \text{deg}$ (on-board) and $\pm 4.0 \times 10^{-4} \text{deg}$ (ground-based), and position determination accuracy to be less than 1m (ground-based). Note that pointing control accuracy, pointing stability, and on-board pointing/position determination accuracies are the real-time requirements that must be realized in orbit, while pointing determination accuracy and position determination accuracy are allowed to be achieved after off-line ground processing.

2.2 Definitions

The pointing control accuracy, the pointing stability, and the pointing determination accuracy are defined for an optical axis (*i.e.*, boresight direction) of PRISM's nadir radiometer (PRISM nadir pointing frame), with respect to

the J2000.0 geocentric inertial coordinate system. The position determination accuracy is defined for a spacecraft's center of mass, with respect to the WGS84 geocentric geofixed coordinate system. Related specifications such as attitude control accuracy, attitude stability, and attitude determination accuracy are defined for a star-tracker reference frame, with respect to the J2000.0 geocentric inertial coordinate system. Figure 2 shows representative coordinate systems used in the pointing management. The desired pointing orientation for ALOS is that the z axis of the PRISM-nadir pointing frame points to the geocenter of the Earth and its x axis is perpendicular to the line CCD of PRISM's nadir radiometer.

Figure 3 illustrates relationship among the pointing control accuracy, the pointing stability, and the pointing determination accuracy in time domain. As indicated in Table 1, the pointing control accuracy and the pointing stability are applied to all frequency band. On the other hand, the pointing determination accuracy is specified for 0 ~ 10Hz, and the position determination accuracy is specified for 0 ~ 1Hz.

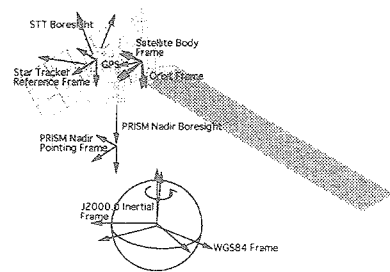


Figure 2: Coordinate Systems

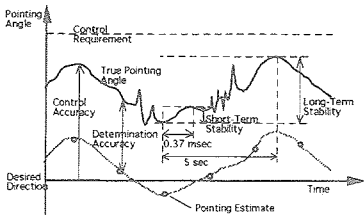


Figure 3: Time Domain Definitions

The frequency domain representation of the requirements for the pointing control accuracy, the pointing stability, and the pointing determination accuracy is presented in Figure 4. The true pointing displacement angles must be smaller than the lines denoted by the pointing control accuracy, the long-term pointing stability, and the short-term pointing stability. The figure also indicates the pointing determination accuracy with limited frequency ranges, meaning that the pointing displacement exceeding the pointing determination accuracy can be estimated over the concerned frequency band.

2.3 Remote Sensing Interpretations

Figure 5 illustrates physical interpretations for the pointing requirements from the point of view of remote sensing. The pointing control accuracy is determined so that observation swaths of neighboring orbits will have a sufficient overlap above the equator even in the worst case. The pointing stability requirement consists of a short-term requirement and a long-term requirement. The short-term

Table 1: Pointing Requirements (3σ)

| | | | |
|---|------------|--|-----------------------------|
| Pointing Control Accuracy | | Roll, Pitch, Yaw: $\pm 0.1 \text{ deg}$ | all frequency |
| Pointing Stability | Short Term | Roll, Yaw: $2.0 \times 10^{-5} \text{ deg}/0.37 \text{ ms}$ (p-p) Pitch: $1.0 \times 10^{-5} \text{ deg}/0.37 \text{ ms}$ (p-p) | all frequency |
| | Long Term | Roll, Pitch, Yaw: $2.0 \times 10^{-4} \text{ deg}/5 \text{ s}$ (p-p) ¹⁾ Roll, Pitch, Yaw: $4.0 \times 10^{-4} \text{ deg}/5 \text{ s}$ (p-p) ²⁾ | all frequency |
| Onboard Pointing Determination Accuracy | | Roll, Pitch, Yaw: $\pm 4.0 \times 10^{-4} \text{ deg}$ | $0 \sim 10 \text{ Hz}$ |
| Onboard Position Determination Accuracy | | 200 m | $0 \sim 1 \text{ Hz}$ |
| Pointing Determination Accuracy ³⁾ | | Roll, Pitch, Yaw: $\pm 2.0 \times 10^{-4} \text{ deg}$ | $0 \sim 10(450) \text{ Hz}$ |
| Position Determination Accuracy ³⁾ | | 1 m | $0 \sim 1 \text{ Hz}$ |

¹⁾ DRC antenna not in drive. ²⁾ DRC antenna in drive. ³⁾ after ground processing.

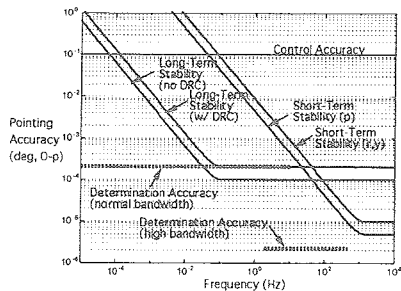


Figure 4: Frequency Domain Representation of Pointing Requirements

requirement corresponds to the time period (0.37 msec) during which the PRISM's CCD takes one pixel image (2.5 m). This is determined to satisfy the followings: (1) Degradation in modulation transfer function (MTF) that is caused by pointing change to be more than 0.95, (2) Elevation extraction accuracy to be less than 5 m .

The long-term requirement corresponds to the time period (5 sec) during which the PRISM takes one scene image ($35 \text{ km} \times 35 \text{ km}$). The long-term requirement guarantees the followings: (1) Geometric distortion of one scene image to be less than one or two pixels, (2) Geometric distortion between consecutive pointing determination sampling times (*i.e.*, uncertainty in pointing knowledge between sampling times) to be less than one or two pixels.

The pointing determination requirement is specified to satisfy the followings: (1) Ground position (geolocation) error due to pointing knowledge on an image at each pointing determination sampling time to be less than one pixel (2.5 m), (2) Elevation extraction accuracy to be less than 5 m .

The position determination requirement is also set so that one can identify a ground position (geolocation) corresponding to each imaging pixel while minimizing its degradation due to spacecraft position error.

2.4 Performance Redundancy

As Section 2.3 described, the original requirements with respect to observed images can be resolved into combinations of the pointing requirements. Figure 6 presents hierarchies of these requirements. In designing these hierarchies, the concept of *performance redundancy* is introduced. That is, ALOS has multiple means to achieve the important imagery requirements with allowing different performance and different frequency coverage.

For example, the primary means for the geolocation determination accuracy consists of the ground-based point-

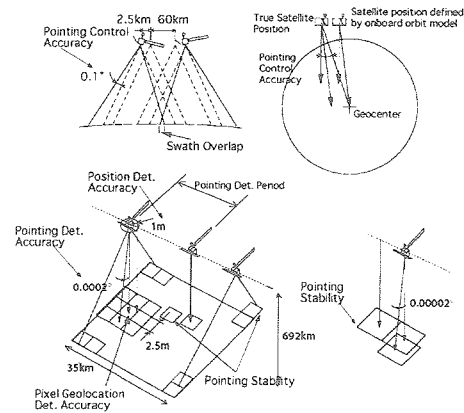


Figure 5: Remote Sensing Interpretations

ing determination accuracy, the long-term pointing stability, and the ground-based position determination accuracy. In this case, the geolocation determination accuracies are $\pm 4 \text{ m}$ when DRC is not driven and $\pm 6 \text{ m}$ when DRC is driven. However, if high-bandwidth pointing measurement data is available, the geolocation determination accuracy can be improved to $\pm 3 \text{ m}$ ($0 \sim 450 \text{ Hz}$) in terms of both accuracy and frequency coverage by reducing the contribution of the pointing stability. If the ground-based pointing determination is not available, the geolocation determination can be accomplished alternatively with degraded performance by using the onboard-processing-based pointing determination.

The geometric distortion of one image also has performance redundancy. The primary means to achieve this requirement is the long-term pointing stability. However, in the case of unsatisfactory pointing stability, the geometric distortion can be corrected to a certain level by using ground-based pointing and position determinations.

2.5 Pointing Management System

An integrated solution framework is designed in order to accommodate the pointing requirements. This framework, *pointing management system*, extends over various on-board subsystems, ALOS spacecraft system, and ground-based systems. It implemented a variety of solution approaches within the framework. This approach to the ALOS's pointing requirements is schematically shown in Figure 7.

The pointing management has 5 aspects: attitude management, dynamics management, position management, alignment management, and time management. Its role is to distribute the pointing requirements to a collection of on-board and ground systems via those aspects.

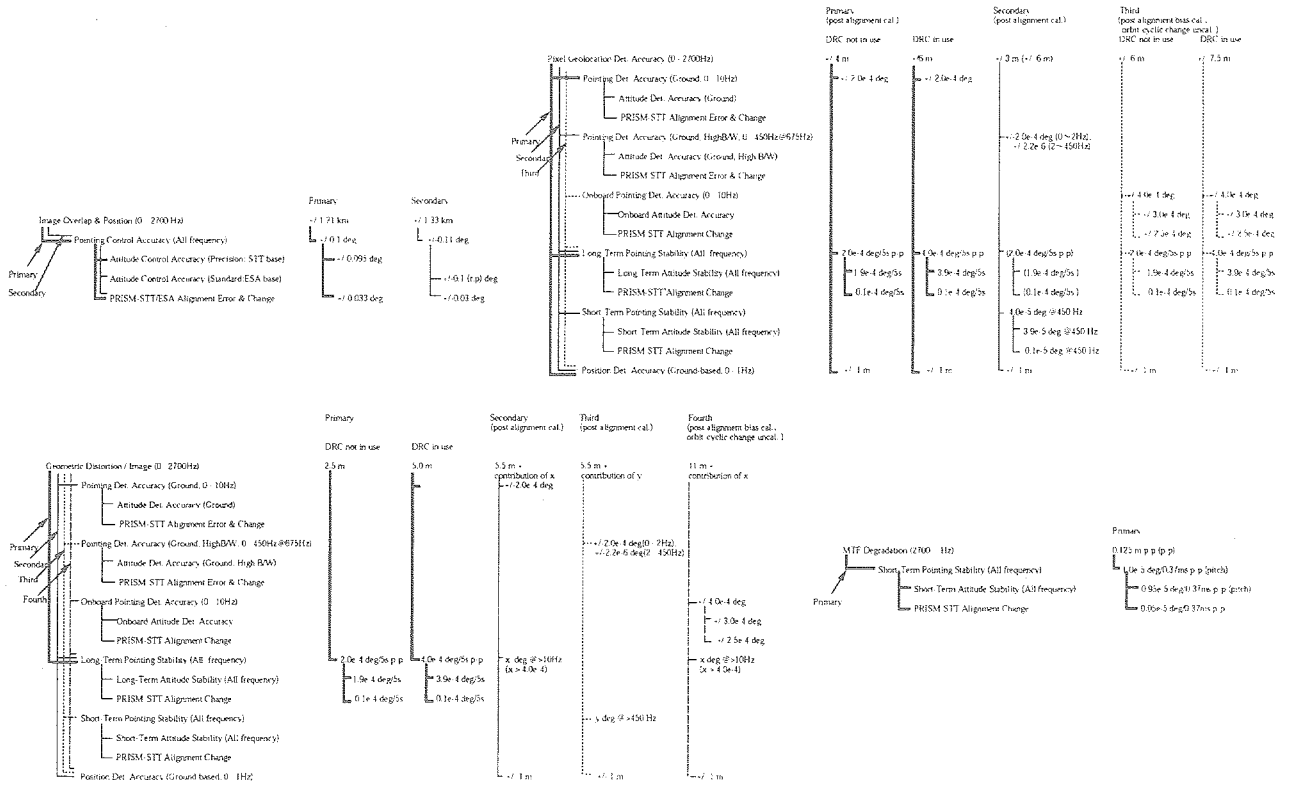


Figure 6: Requirement Hierarchies

For example, the pointing determination requirement imposes specifications on attitude determination accuracy, alignment control/determination accuracy, and time control/determination accuracy. Similar arguments apply to the pointing control requirement and the pointing stability requirement.

In the spacecraft system level, these approaches include low thermal distortion structure for the spacecraft main structure and the sensors, alignment management in and between sensors, dynamics management within and beyond control bandwidth, disturbance management, time management, high-bandwidth pointing measurement, and pointing data handling.

In the ground system level, NASDA is developing 3 systems: the Precision Pointing and Geolocation Determination System, the Precision Orbit Determination System, and the Dynamics Evaluation System.

Since the pointing management system covers various subsystems and systems, defining and controlling interface conditions has particular importance. For this purpose, the *pointing management interface control document* is prepared at the ALOS Project.

3 ALOS for Control & Management

3.1 Attitude Dynamics

As a dynamic and quasi-static plant to be controlled and managed, ALOS is characterized by its large-scale structure with complex subsystems. This aspect submits challenges for pointing control and management.

As a dynamic system, ALOS has three large flexible structures: a Solar Array Paddle (PDL) with a length of 23m and a mass of 220kg, a PALSAR antenna with

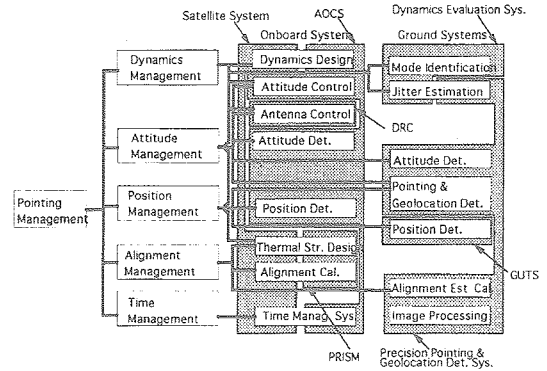


Figure 7: Pointing Management System

a length of 9m and a mass of 480kg, and a DRC antenna with a length of 2m and a mass of 160kg. These flexible structures provide ALOS a variety of dynamic modes with significant coupling vectors over wide frequency range.

Taking into account these flexible structures and ALOS's translational motion, one can express ALOS's attitude dynamics by the following equations of motion:

$$I_T \ddot{\omega} + \sum_j \sum_i (\bar{R}_j \times \delta_{0i}^j + \delta_{1i}^j) \ddot{q}_i^j = T_c + T_e \quad (1)$$

$$M_T \ddot{v}_{CG} + \sum_j \sum_i \delta_{0i}^j \ddot{q}_i^j = 0 \quad (2)$$

$$\ddot{q}_i^j + 2\zeta_i^j \omega_i^j \dot{q}_i^j + \omega_i^{j2} q_i^j + \dot{\omega}^T (\bar{R}_j \times \delta_{0i}^j + \delta_{1i}^j) + \ddot{v}_{CG}^T \delta_{1i}^j = 0 \quad (3)$$

i = mode number, j = PDL, PALSAR, DRC

Figure 8 shows open-loop frequency responses of ALOS

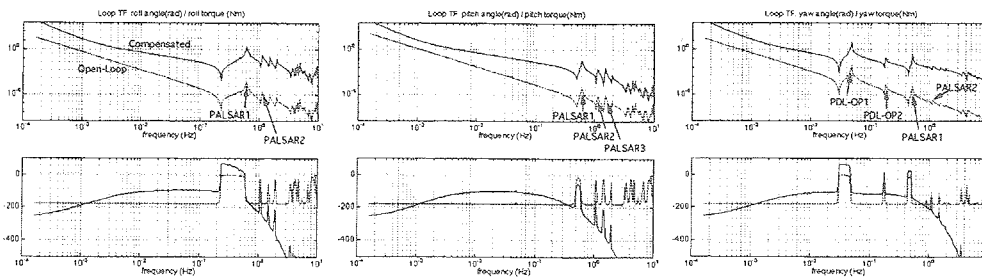


Figure 8: Attitude Frequency Responses

attitude dynamics with the influences of the flexible structures. The Bode plots of compensated attitude dynamics are additionally shown.

3.2 Disturbances

Figure 9 illustrates major elements of ALOS's attitude and pointing dynamics and their relationship. Major sources of internal and external disturbances include the DRC antenna drive mechanism, the AVNIR-2 mirror drive mechanism, the reaction wheels, the PDL drive mechanism, the PDL thermal snap, the environmental disturbances including discontinuity of solar radiation pressure.

These disturbances not only affect the rigid-body attitude of the spacecraft main body, but also excite various dynamic modes of the DRC H/D gear and support boom, PALSAR, PDL, the spacecraft main structure, and the propellant sloshing. In addition to these factors, that the attitude control system tracks erroneous attitude control reference frame induces attitude degradation. The gyroscopic effect of the system angular momentum also counts.

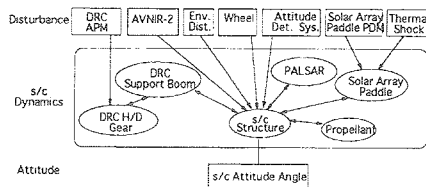


Figure 9: Influence Diagram of Dynamic Elements

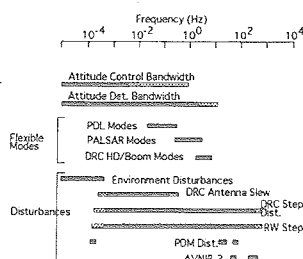


Figure 10: Disturbance Frequency Characteristics

The disturbances and dynamic modes previously described have their own frequency components. Figure 10 shows their frequency bands, indicating the disturbances and dynamic modes distribute over wide frequency range.

Although the low frequency components of the pointing displacement are mainly suppressed by the attitude control, the disturbance rejection control bandwidth and

the compensation bandwidth of the attitude control are frequency-limited, as shown in Figure 10. For this reason, the eigenvalue management and the disturbance management possess significant importance at ALOS to suppress the pointing displacement beyond the control bandwidth.

3.3 Low Frequency Behavior

The low frequency behavior of the satellite, on the other hand, shows susceptibility in inter-sensor and intra-sensor thermal distortions due to its large nature. This results in the importance of the reduction in thermal distortion.

The ALOS's low frequency behavior, in particular, PRISM's boresight change due to thermal distortion, is analyzed, using finite elements representations of the ALOS's thermal behavior and structural behavior. Figure 11 shows the finite element model used for the structural part of the thermal distortion analysis.

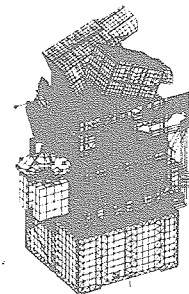


Figure 11: Structure FEM for Thermal Distortion Analysis

4 Attitude & Orbit Control System (AOCS)

4.1 Requirements

Since the ALOS attitude dynamics is a major contributor to the pointing errors, ALOS's Attitude and Orbit Control System (AOCS) plays a central role in meeting the pointing requirements. The original pointing requirements are broken down into the attitude requirements and other requirements. Table 2 presents the specifications for ALOS AOCS.

ALOS AOCS achieves the specified accuracies by a star-tracker based attitude control in the normal control mode that is the Earth observing mode. This AOCS is uniquely characterized by its precision: in particular, the attitude

stability ($3.9 \times 10^{-4} \text{deg/5s}$), the onboard attitude determination accuracy ($\pm 3.0 \times 10^{-4} \text{deg}$), the ground-based pointing determination accuracy ($\pm 2.0 \times 10^{-4} \text{deg}$), and the ground-based position determination accuracy ($\pm 1\text{m}$). These requirements are unprecedented in Japanese satellites, and therefore had significant impacts on the AOCS design.

Table 2: AOCS's Major Specifications

| | | |
|--------------------------------|--|--|
| Approach | Zero Momentum Control with 3-axis Strapdown Attitude Determination | |
| Mode | Stanby, Acquisition, Orbit Control, Normal Control(Standard/Precision) | |
| Attitude Control Accuracy | R, P, Y: $\pm 0.095 \text{deg}(3\sigma)$ | |
| Attitude Stability | Short Term | R,Y: $1.9 \times 10^{-5} \text{deg}/0.37\text{ms}$ (p-p) P: $0.95 \times 10^{-5} \text{deg}/0.37\text{ms}$ (p-p) |
| | Long Term | R, P, Y: $1.9 \times 10^{-4} \text{deg}/5\text{s}$ (p-p) ¹⁾ R, P, Y: $3.9 \times 10^{-4} \text{deg}/5\text{s}$ (p-p) ²⁾ |
| Onboard Attitude Det. Accuracy | R, P, Y: $\pm 3.0 \times 10^{-4} \text{deg}(3\sigma)$ | |
| Onboard Position Det. Accuracy | 200m(95%) | |
| Data Output | for Offline Pointing & Position Determinations | |
| Other Features | Yaw Steering, Paddle Control, 1553B Data Bus, CCSDS Data Handling | |
| Control Cycle | 10Hz | |
| Fault Tolerance | H/W Redundant, Triplex MPU, FDIR | |

¹⁾ DRC antenna not in drive. ²⁾ DRC antenna in drive.

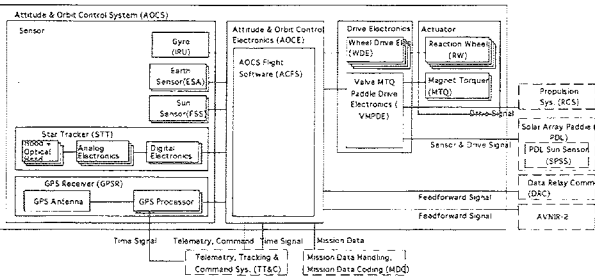


Figure 12: AOCS Architecture (H/W)

4.2 Architecture

The AOCS architecture is shown in Figure 12 (Hardware). In addition to conventional components such as the Earth Sensor (ESA), the Fine Sun Sensor (FSS), the Inertial Reference Unit (IRU), the Magnet Torquer (MTQ), the AOCS inaugurates the following components: (1) New precision Star Tracker (STT) with a random angular error of 9.0arcsec and a bias angular error of 0.74arcsec , (2) New precision GPS Receiver (GPSR) capable of dual frequency carrier phase measurement, (3) New high-performance on-board computer (AOCE) based on 64-bit spaceborne MPU, and (4) Large torque reaction wheel for compensating PDL's thermal shock and DRC's drive disturbance.

The AOCS software (ACFS) is implemented on a commercial real-time OS with C language. The conventional applications such as attitude acquisition, orbit control, ESA-based attitude determination and control, and FDIR are installed with the following capabilities newly developed: (1) Star identification, (2) Precision attitude determination filter using the Extended Kalman Filter, (3) Precision cooperative control for DRC and AVNIR-2, (4) DRC parameter identification, (5) PDL drive control with

dynamic resonance avoidance, (6) Wheel bias angular momentum operation, and (7) Precision onboard orbit model.

One unique feature of this AOCS is that the attitude is controlled using the STT-based attitude estimate at the normal control mode. The ESA-based attitude is used for monitoring the STT-based control. With this design, the STT-based *Precision Attitude Determination* allows us to achieve enhanced attitude control accuracy and attitude stability and to provide users precision attitude knowledge, while the heritage of the ESA-based *Standard Attitude Determination* minimizes risk.

5 Pointing Data Handling

The precision pointing management results in the re-examination of the conventional telemetry paradigm. The measurement data and telemetry related to the pointing requirements must be carefully selected from the point of view of pointing and position determinations, image processing and geometric correction, calibration and validation, in-flight dynamics evaluation. The availability of the pointing data in terms of time coverage and time delay also counts. And the overall data flow and processing must be designed and optimized in a framework of the ALOS integrated system.

Figure 13 shows the ALOS's overall pointing data handling design. In addition to the conventional telemetry such as the health and safety (H&S) telemetry, the house-keeping (HK) telemetry, and the AOCS status telemetry, ALOS can collect 24 hour pointing data with full rate for the purposes stated above. This data, called Low Speed Mission Data, includes H&S, HK, the PRISM mission telemetry, the PALSAR mission telemetry the AOCS's sensor data and onboard attitude determination data, the STT raw data, and the GPSR raw data. The Low Speed Mission Data is downlinked to the Earth Observation Center (EOC), where the data will mainly be used for the ground-based pointing determination and the image processing. A part of the Low Speed Mission Data and the ground-based pointing determination results is delivered to the Tracking and Control Center (TACC), where the ground-based position determination and the in-flight attitude evaluation are executed.

High-bandwidth pointing measurement data is collected, and is transmitted with PRISM data to EOC. Dynamics data is provided by a set of accelerometers at critical events, and is downlinked to TACC for in-flight evaluation.

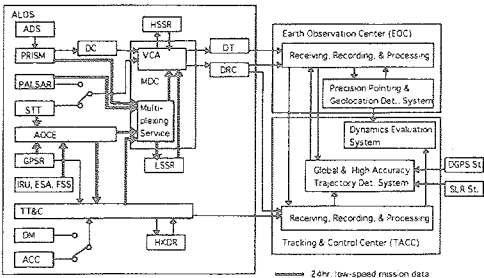


Figure 13: Pointing Data Handling

Each presentations in the following sections describes approaches implemented and results obtained for each *precision* pointing requirement.

6 Pointing Control Accuracy

The requirement for the pointing control accuracy ($\pm 0.1deg$) is dominated by the attitude control accuracy ($\pm 0.095deg$ is required). Figure 14 shows an evaluated pointing control accuracy with error breakdown. The attitude control accuracy is mainly accomplished by a precise on-board orbit model and an attitude control based on the Precision Attitude Determination System.

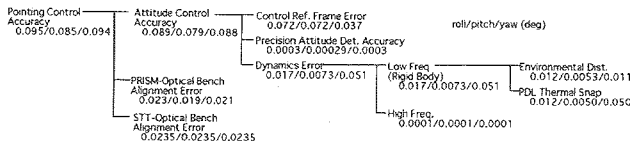


Figure 14: Pointing Control Accuracy Evaluation

6.1 Attitude Control Reference

Since the Precision Attitude Determination provides attitude angles with respect to the J2000.0 inertial coordinate, it is necessary to calculate geocentric reference attitude from the ALOS's true orbital position in implementing geocenter-pointing attitude control. In order to implement this capability, AOCS's ACFS possesses a precise on-board orbit model with 10 parameters. AOCS calculates the control reference orbit frame by propagating this model, and subtracts the reference frame from the estimated attitude expressed in inertial frame to yield control error angles. In the current plan, the model parameters will be updated at least once per 3 days, using ground-based orbit estimate.

6.2 Attitude Control Law

An independent control law is designed for each axis of roll, pitch, and yaw. The control law consists of a PD control, an integral compensation, a lead lag filter, and a wheel speed servo loop. This control law distinguishes itself by active phase stabilization of low-order flexible modes. The compensated Bode plots with this controller are shown in Figure 8.

7 Pointing Stability

A predominant factor of the pointing stability is the attitude stability, because the time frame for the stability requirements (at most 5sec) is significantly small compared with the time constant of the alignment variation. Neglecting the alignment stability, this section focuses on the attitude stability.

For the attitude stability, ALOS introduced a variety of approaches such as phase stabilization of flexible structures, a precision cooperative control and in-flight parameter identification, an active damping of the antenna pointing control, an attitude control based on the Precision Attitude Determination, an eigenvalue management, a wheel bias operation, an automatic control of PDL array trim without dynamic modes excitation.

Affecting factors of the long-term pointing stability and their contributions are summarized in Table 3. A similar evaluation of the short-term stability yields $1.0 \times 10^{-5}deg/0.37ms$ (roll), $0.13 \times 10^{-5}deg/0.37ms$ (pitch), and $0.29 \times 10^{-5}deg/0.37ms$ (yaw).

7.1 Solution Approaches

Table 4 summarizes approaches implemented for the realization of the attitude stability.

The step motor drive of the DRC antenna induces excitations of an antenna boom mode and a harmonic drive gear mode. The DRC's tracking and pointing control system provides active damping of these modes to reduce the excitations. In addition, for reducing the excitations, the boom and gear designs are optimized from the structural and control point of view, and their eigenvalues are controlled throughout their design and manufacturing processes. Figure 15 shows a simulation result of the attitude angle and the attitude stability when the DRC's active damping control is in operation.

The DRC antenna makes a large pointing change, when it switches from one data relay satellite to another. The angular momentum exchange due to this slew motion may result in significant attitude motions. In order to reduce this effect, AOCS executes feedforward control in cooperation with the DRC antenna motion. Improvements have been made over the ADEOS-II's cooperative control, by introducing 3-rigid-body representation, linear relation for the feedforward angular momentum, the use of rate command, and torque input to wheel servo loop.

As the performance of this cooperative control depends on parameter accuracy of the DRC mass property model, the parameter identification that reduces the cooperative control error to 1% will be carried out in orbit. AOCS also performs a similar cooperative control in response to the AVNIR-2's mirror drive signal, because the large mirror's motion also disturbs the attitude.

A major contributor to the improvement of the attitude stability is the AOCS's feedback control, which makes the phase stabilization of low frequency modes of PDL and PALSAR. By doing so, the attitude variations caused by environment disturbances and PDL's thermal snap are damped out actively in a short time.

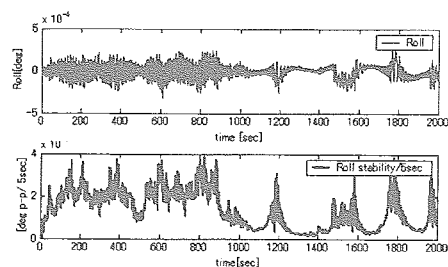


Figure 15: Attitude Stability at DRC Tracking

7.2 In-flight Dynamics Evaluation

In order to evaluate ALOS's actual dynamics in orbit and feedback the results to future projects, the ALOS Project Team currently plans off-line evaluations of ALOS's in-flight dynamics. For this purpose, ALOS is designed to provide us dynamics information as much as possible. Specifically, ALOS has a set of accelerometers (ACC) in addition to a set of deployment monitors, a jitter sensor, conventional telemetry, and low-speed mission telemetry.

Low-noise accelerometers with $\pm 8mG$ range are used at 64Hz sampling. 9 locations are selected to identify typical flexible modes. Figure 16 shows the accelerometers

Table 3: Long-Term Pointing Stability

| Factors | Attitude Stability | Environment | Continuous factors, Gyro effect | Roll | Pitch | Yaw |
|----------------------------------|--------------------------|--------------------------|---|----------------------|----------------------|----------------------|
| Pointing Stability (3 σ) | | DRC | Discontinuous factor | 1.0 | 0.5 | 1.0 |
| | | | Resonance, Acquisition | (1.4) | (0.4) | (2.5) |
| | | AVNIR-2 | Slew | 3.8 | 2.4 | 3.0 |
| | | | Cooperative control error | 0.5 | 0.045 | 0.021 |
| | | RW | Mirror drive | | | |
| | | | Dynamic & Static Imbalance | 0.36 | 0.67 | 0.44 |
| | | | Torque ripple, Bearing noise | | | |
| | | MTQ | Zero cross | (0.1) | (0.031) | (0.2) |
| | | | FF error, Ripple, Low freq. | 1.0×10^{-6} | 3.5×10^{-6} | 4.3×10^{-7} |
| | | PDL | Drive macro | 0.0 | 0.45 | 0.0 |
| | | | Drive micro | 1.5×10^{-4} | 1.2×10^{-3} | 1.3×10^{-4} |
| | | | Thermal snap (after 7 min.) | 0.1 | 0.4 | 1.8 |
| | | ESA | disturbance | 1.4×10^{-4} | 1.4×10^{-8} | 1.4×10^{-8} |
| | | | IRU - Disturbance | | | |
| | | Att. Det. | Radiation, Oblateness, Perturbation, Eccentricity | (2.5) | (1.3) | (2.0) |
| | | Stability | STT error, Ground sys. error | 0.49 | 0.49 | 0.49 |
| | | RCS | Sloshing | 0.49 | 0.6 | 0.65 |
| | | Str Vibration | PDL, DRC, AVNIR-2, RW | 0.069 | 0.011 | 0.028 |
| | | Total (DRC not in drive) | | 1.3 | 1.4 | 2.3 |
| | | Total (DRC in drive) | | 3.8 | 2.8 | 3.8 |
| | Alignment Variation | STT - Optical bench | | 0.012 | 0.012 | 0.012 |
| | | Optical bench - PRISM | | | | |
| | Total (DRC not in drive) | | | 1.3 | 1.4 | 2.3 |
| | Total (DRC in drive) | | | 4.0 | 2.8 | 3.8 |

$\times 10^{-4} \text{ deg/5s}$

Table 4: Approaches to Attitude Stability

| Disturbance | Solution Approach | |
|-------------|---------------------------------|--|
| DRC antenna | Resonance | <ul style="list-style-type: none"> High-gain active damping of antenna pointing control Optimal design of structure and mechanism Improvement/reduction and management of eigenvalues |
| | Slew | <ul style="list-style-type: none"> Cooperative control In-flight parameter identification Phase stabilization of PDL and PALSAR |
| AVNIR-2 | Mirror drive | <ul style="list-style-type: none"> Cooperative control Mass property management High-gain wheel servo loop |
| Wheel | Zero-cross | <ul style="list-style-type: none"> Bias angular velocity operation |
| | Imbalance, Ripple Bearing noise | <ul style="list-style-type: none"> Low-disturbance wheel |
| PDL | Thermal snap | <ul style="list-style-type: none"> Large torque wheel Improved rigidity of PDL |
| | Drive | <ul style="list-style-type: none"> Randomized drive pulse |
| AOCS | Det. Stability | <ul style="list-style-type: none"> STT-based attitude control |

with their measurement axes. Three accelerometers measure 3-axis acceleration of the body. Two are allocated for PDL's out-of-plane and in-plane motions. Two are given to PALSAR, and the remaining two are used for DRC.

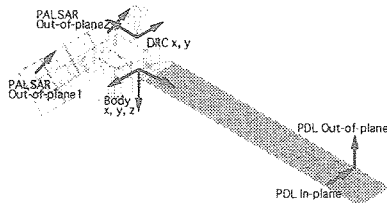


Figure 16: Accelerometer Locations

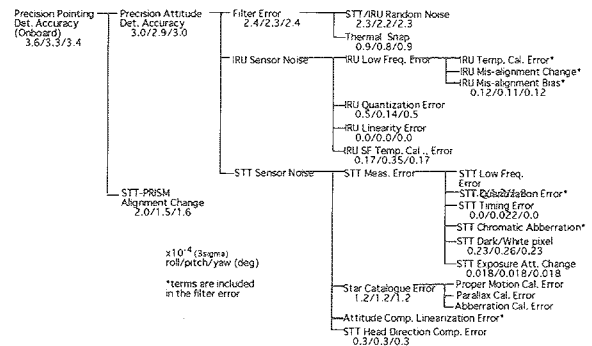


Figure 17: Pointing Determination Accuracy Evaluation

8 Pointing Determination Accuracy

The pointing determination accuracy consists of the attitude determination accuracy and the alignment variation between STT and PRISM. Figure 17 summarizes the design results for the on-board pointing determination accuracy, demonstrating its feasibility.

8.1 Attitude Determination

The attitude determination accuracy is accomplished by a precision star tracker, an on-board star identification, an attitude quaternion estimation by the Extended Kalman filter, and a reduced alignment variation between STT and IRU.

A key player to the attitude determination accuracy is the ALOS's precision star tracker, which distinguishes itself by the best star position accuracy in the world (random error: $9.0 \text{ arcsec}@6 \text{ mag}$, bias error: 0.74 arcsec , in

3σ). ALOS STT has 3 optical heads (STO), and uses 2 optical heads simultaneously. In order to make the best star position accuracy possible, STO uses low-thermal distortion structure, and implements tight temperature regulation. Table 5 gives STT's major specifications, while Figure 18 shows the STO's engineering model.

Table 5: Star Tracker Specifications

| | | |
|-----------------------------------|---|---|
| Configuration | 3 ON, 2 in operation | |
| FOV | $8 \times 8 \text{ deg}$ | |
| Magnitude | $4 \sim 6.5 \text{ mag}$ | |
| No. of stars | $10 \times 2 \text{ sets (ACQ)}, 5 \times 2 \text{ sets (TRK)}$ | |
| Star Position Error (3 σ) | Random | 9 arcsec (6 mag) |
| | Bias | $0.74 \text{ arcsec (post orbit cal.)}$ |
| Output Rate | 1 Hz | |

In the normal Earth observing mode, AOCS puts STT in the tracking mode, and uses a direct matching method for the star identification. As for the ALOS's master cat-

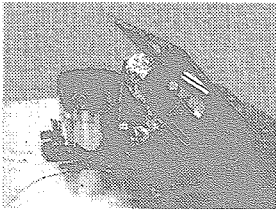


Figure 18: Star Tracker Optical Head EM

alogue, the Sky2000.0Ver2 based on the Hipparcos catalogue is used because of its position accuracy, magnitude accuracy, reliability, and coverage. Based on this star catalogue, an on-board catalogue is generated by deleting misleading stars. After the star identification, the identified star position is calibrated with the star's property.

The successful star identification yields STT-based attitude measurement. Taking this attitude measurement and IRU output, AOCS estimates ALOS's attitude quaternion relative to the inertial reference by applying the Extended Kalman filter to the nonlinear differential equation. An actual algorithm is based on the linearization of the process equation and the observation equation around an attitude estimate.

The performance of this Precision Attitude Determination System is evaluated by countless simulations for all orientation of the sky. Figure 19 presents an example of the simulation results.

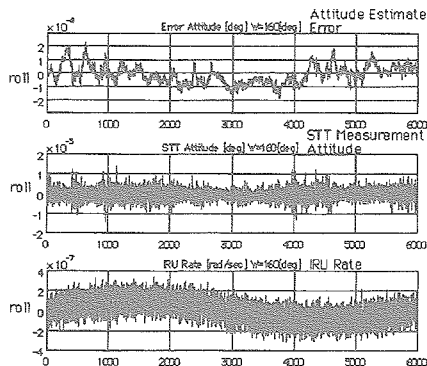


Figure 19: A Precision Attitude Determination Result (STT1 & 3, $\Omega = 160deg$)

8.2 Alignment Management

The second dominant factor of the pointing determination error is the alignment variation between STT and PRISM. The source of the alignment variation is the thermal distortion of the optical bench, the PRISM's radiometers, STT, and the STT bracket.

In order to minimize the effect of the thermal distortion, PRISM, STT, IRU, and ADS are placed on the optical bench as shown in Figure 20. Furthermore, PRISM, the optical bench, the STT bracket, and STT are subject to precise temperature control. In the PRISM's radiometers, the temperature is regulated within $23 \pm 1deg$ everywhere at its inner truss by passive and active controls. The temperature of the optical bench and the STT bracket is also controlled within $23 \pm 3deg$. The STT's optical head is thermally regulated even tighter. For example, the lens unit of STO is controlled within $25 \pm 0.2deg$.

For the analysis of the pointing axis variation due to thermal structural effects, a mathematical thermal model with thousands nodes is solved for the non-steady cyclic thermal environment. With the temperature distribution obtained from this thermal simulation, a mathematical structural model shown in Section 3.3 is solved to yield the distortion of the PRISM's boresight frame relative to the STT reference frame. Figure 21 shows a result from this analysis, demonstrating that the alignment variation between PRISM and STT stays within its budget.

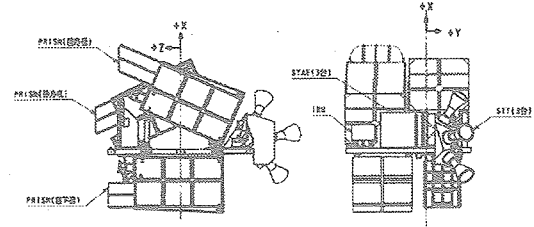


Figure 20: PRISM, STT, IRU and ADS on Optical Bench

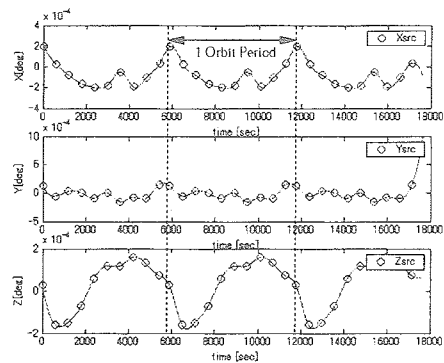


Figure 21: PRISM's Boresight Change with respect to STT

8.3 High-Bandwidth Pointing Measurement

ALOS is capable of measuring the high-bandwidth pointing jitter that cannot be measured with attitude sensors. While AOCS's sensors can provide the attitude information only up to $10Hz$ with wide ranges, a device named the Angular Displacement Sensor (ADS) can provide us more precise angular information from $2Hz$ to $450Hz$ at the expense of measurement range. This new means exploits the MHD effect, and allows us the geometric correction of high frequency components in obtained images, the performance redundancy to the long-term pointing stability, and the evaluation of in-flight dynamics and disturbances.

Based on a model for GOES, ALOS ADS is developed to have angle output capability. Table 6 shows ADS's representative specifications. As seen in these performance, this 3-axis package, ADS, offers pointing angular information with better accuracy ($\pm 0.008arcsec$) at higher frequency ($2 \sim 450Hz$), compared with the Precision Attitude Determination. Note that like other pointing sensors, ADS is placed on the optical bench to maximize the correlations with PRISM and STT.

In the ALOS's design, the ADS's measurement data is not used for the on-board attitude control, but used in the

ground-based Precision Pointing and Geolocation Determination System for high-bandwidth pointing determination. The Precision Pointing and Geolocation Determination System implements the complementary filtering using data from STT, IRU, and ADS. As seen in Figure 6, the high-bandwidth pointing determination can significantly reduce the effect due to the attitude variations around $3 \sim 10\text{Hz}$ that DRC mainly generates.

Table 6: ADS Specifications

| | |
|----------------------|--|
| Configuration | 3-axis sensor package |
| Range ¹⁾ | $\pm 4\text{arcsec}$, $\pm 40\text{arcsec}$ |
| Noise | $\pm 0.002\text{arcsecrms}$ |
| A/D | 10 bit (at ELU) |
| Resolution | $0.022 \times 10^{-4}\text{deg}$ |
| Band Width | $2 \sim 500\text{ Hz}$ |
| Sampling | 675Hz (LPF 450Hz) |
| after ELU gain (1/5) | |

8.4 Precision Pointing & Geolocation Determination System

NASDA currently develops the Precision Pointing and Geolocation Determination System to achieve the challenging requirement for the pointing determination ($2.0 \times 10^{-4}\text{deg}$). The system is developed for the geometric correction of the PRISM images and the in-flight evaluation of the ALOS's pointing requirements.

The Precision Pointing and Geolocation Determination System exploits the 24 hour low-speed mission data down-linked from ALOS to EOC as well as the precision position data processed at TACC, and executes the following tasks: (1) Ground-based, non-real-time star identification and attitude determination, (2) Modeling and calibration of the alignment variation due to thermal distortion, (3) High-bandwidth pointing determination using the ADS data, and (4) Calibration using ground control points (GCP) in PRISM's images.

9 Position Determination Accuracy

A key component to the position determination requirements is the ALOS's precision GPS Receiver.

9.1 Precision GPS Receiver

The ALOS Project Team developed the dual-frequency GPS receiver that provides carrier phase measurement. GPSR measures pseudorange of L1-band and carrier phases of both L1 and L2 signals. The pseudorange of L1-band signal is used for an on-board, stand-alone (*i.e.*, non-differential) positioning. AOCE compiles the GPSR's navigation result as the Payload Correction Data, and provides accurate position information via TT&C to other subsystems such as mission sensors. In addition, GPSR generates the precise reference time pulse, and serves as the principal clock of the intra-satellite time management. The carrier phases of L1 and L2 signals are recorded in the Mission Data Handling System with GPSR's other data for 24 hours and are transmitted to a ground station as the low-speed mission data.

Table 7 presents ALOS GPSR's major specifications, and Figure 22 shows the GPSR's Engineering Model.

Table 7: GPS Receiver Specifications

| | | |
|--------------------------------|-------------------------------------|------------------|
| Configuration | (Antenna, LNA, Receiver) $\times 2$ | |
| Simultaneous Reception Channel | L1: 6 s/c, L2: 6 s/c | |
| Navigation | Position | 200m (with SA) |
| Accuracy | Velocity | 1.0m/s (with SA) |
| Reference Pulse Accuracy | | 404ns |
| Measurement Accuracy | L1 Pseudo-range | 10m |
| | L1 Carrier Phase | 10mm |
| | L2 Pseudo-range | 10m |
| | L2 Carrier Phase | 18mm |
| Output Rate | | 1Hz |

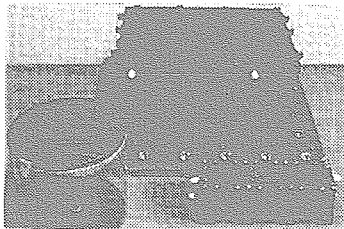


Figure 22: GPS Receiver EM

9.2 Precision Position Determination System

Combining the information delivered from the on-board GPSR with carrier phases of L1 and L2 signals measured on ground reference points around the world, the ground-based Global and High Accuracy Trajectory Determination System (GUTS) performs carrier-phase differential GPS to give ALOS's position with sub-meter accuracy. The data measured on ground reference points are obtained via IGS (International GPS Geodynamics Service) network. Note that GUTS is developed by the Tracking and Control Center (TACC). The analysis shows that GUTS can achieve the position determination accuracy of $0.51\text{m}(3\sigma)$.

10 Conclusions

The Advanced Land Observing Satellite (ALOS) mission introduced a major challenge in the precision pointing management. For determining the geolocation of globally observed images without ground control points, and for making the precise geometric correction of high-resolution data, the stringent pointing requirements and their system are defined and formulated. An integrated framework extending from attitude control system to ground systems is necessary and is designed to meet those requirements. A variety of solution approaches, many of which are briefly described in this paper, are developed and implemented. The Phase C designs and the development tests demonstrated the feasibility of the requirements and the solution approaches.

References

- [1] Takanori Iwata, et. al., *Attitude and Orbit Control System for the Advanced Land Observing Satellite (ALOS)*, Int. Workshop on Spacecraft AOCS, WPP-129, Noordwijk, Netherlands, 1997.
- [2] Takanori Iwata, et. al., *The Advanced Land Observing Satellite (ALOS) - Preliminary Design*, 49th IAF, IAF-98-B.2.01, Melbourne, Australia, 1998.
- [3] Yuichi Chida, et. al., *On-board Precision Attitude Determination Algorithm for the Advanced Land Observing Satellite (ALOS)*, 21st ISTS, ISTS-98-v-14, Ohmiya, Japan, 1998.
- [4] Takanori Iwata, *Sensing and Control in High-Resolution Earth Observation Satellites: Present and Prospects for the 21st Century*, Measurement and Control, Vol. 40, No. 1, pp. 113-121, 2001(in Japanese).
- [5] Takanori Iwata, et. al., *Precision Attitude and Orbit Control System for the Advanced Land Observing Satellite (ALOS)*, 45th Space Science and Technology Joint Conference, 01-2A7, Hamamatsu, Japan, 2001(in Japanese).
- [6] Takanori Iwata et. al., *Precision Star Tracker for the Advanced Land Observing Satellite (ALOS)*, 45th Space Science and Technology Joint Conference, 01-2A17, Hamamatsu, Japan, 2001(in Japanese).

01-2A7 陸域観測技術衛星 (ALOS) の高精度姿勢軌道制御系

○岩田隆敬 (宇宙開発事業団)、川口佳久、吉沢剛、星野裕毅 (NEC 東芝スペースシステム)

Precision Attitude and Orbit Control System for the Advanced Land Observing Satellite (ALOS)
Takanori Iwata (NASDA), Yoshihisa Kawaguchi, Takeshi Yoshizawa, Hiroki Hoshino (NTSpace)

Key Words: Attitude Control, Attitude Determination, Attitude Stability, Star Tracker, GPS Receiver, ALOS

Abstract: The Advanced Land Observing Satellite (ALOS) is a NASDA's flag-ship satellite for the high-resolution Earth observation of the next-generation. Characterized by its 2.5m spatial resolution and world-wide coverage, the ALOS mission imposes a unique set of requirements upon the pointing management to provide geometric accuracy for observed images. Specifically, ALOS addresses 3 stringent requirements: attitude stability, attitude determination accuracy, and position determination accuracy. The Attitude & Orbit Control System (AOCS)'s solution to this challenge include precision star tracker, precision GPS receiver, high-performance onboard computer, star-sensor based attitude determination & control, phase stabilization of flexible structures, and precision cooperative control. Presented in this paper is the flight model design of AOCS and the test results of its engineering model, with an emphasis on these innovations..

1. はじめに

2004 年打上に向けて宇宙開発事業団 (NASDA) が開発している陸域観測技術衛星 (ALOS) は、実利用の推進を目指した次世代の大型高分解能衛星である (図 1)。地図作成等を主なミッションとし 2.5m という高い分解能を特徴とする ALOS では、取得画像の幾何補正のため高精度の指向管理が必要とされる。特に、指向安定度 (4.0×10^{-4} p-p)、指向決定精度 (オンボード: $4.0 \times 10^{-4}^\circ$ 、オフライン: $2.0 \times 10^{-4}^\circ$)、位置決定精度 (オンボード: 200m、オフライン: 1m) において、従来にないレベルを実現することが求められている。

これらの要求を実現するため、衛星レベルでは、低熱歪み設計、ダイナミクス・柔軟構造・擾乱管理、高帯域指向計測、オフライン指向決定を行っている。姿勢軌道制御系 (AOCS) に対しては、指向要求実現の鍵となるためこれまでにない厳しい姿勢安定度、姿勢決定精度、位置決定精度を課した。このため数々の新規要素を取り入れ、技術的挑戦を図った。例えば、新規開発の高精度恒星センサ、高精度 GPS 受信機、64bit MPU を用いた高性能計算機、リアルタイム OS と汎用言語によるソフトウェア、大トルクホイールを AOCS に搭載し、恒星センサ出力を用いた拡張カルマンフィルタによる姿勢決定、恒星センサベースの姿勢制御、柔軟構造の位相安定、高精度協調制御とパラメータ同定を行った。

かつて、日本は、ETS-VI の姿勢軌道制御系をもって技術的に世界に肩を並べるようになった。ALOS の AOCS は、この蓄積の上に上述の要素を新たに導入し従来にない精度を実現したものであり、その能力・性能において世界をリードする。特に地球観測衛星の高分解能化が進む中、これに重要な精度という点で ALOS AOCS は新たなエポックを切り拓く。これらの意味において、ALOS AOCS は、日本の姿勢軌道制御系の新たな標準を提供するものである。

現在、ALOS AOCS の開発は、エンジニアリングモデル (EM) を用いた開発試験と詳細設計を終了し、フライトモデルを製作中である。本稿では、AOCS の特徴に焦点をあてつつ、その詳細設計と開発試験の結果について概要を報告する。

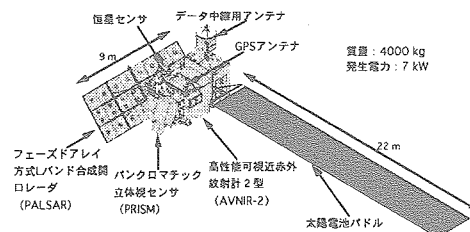


図 1 陸域観測技術衛星 (ALOS) の外観

2. 陸域観測技術衛星 (ALOS)

2.1 ALOS ミッションと衛星システム

今日の地球観測には大きく二つの流れがある。一つは地球環境の観測を通して地球科学への貢献を指向したミッション、もう一つは実利用を指向した陸域観測ミッションである。NASDA の開発する ALOS は、陸域観測分野の次期主力ミッションとして実利用の推進を目指した高分解能衛星である。特に、高分解能画像のグローバルな取得を通じて、地図作成、地域観測、災害状況把握、資源探査という 4 つのミッションに貢献する。

ミッション要求を実現するため、ALOS は、2.5m 分解能のパンクロマチック立体視センサ (PRISM)、マルチバンドの高性能可視近赤外放射計 2 型 (AVNIR-2)、全天候観測が可能なフェーズドアレイ方式 L バンド合成開口レーダ (PALSAR) の 3 つの大型観測センサを搭載している。衛星としては、質量 4000kg、発生電力 7000W の大型地球観測衛星である。H-IIA ロケットにより、高度 691.65km、昇交点通過地方時 10:30 の太陽同期準回帰軌道に投入し、5 年の間ミッションを遂行する。

2.2 高精度指向管理

2.5m という高分解能で全地球の観測データを収集するというミッションの性格から、全地球の取得画像に対し高精度な幾何学的補正が必要になる。このために、衛星位置やセンサ指向方向の決定を高精度に行うとともに、指向方向の変動を最小にする必要がある。これらを ALOS の指向要求として表 1 にまとめた。特に、指向安定度、指向決定精度、位置決定精度が従来になく厳しい。

これらの指向要求は、姿勢軌道制御のみでなく、図 2 に示す総合的な枠組みで解決しなければならない。ALOS ではこの枠組みの下、低熱歪み熱構造設計、センサ間のアライメント管理、制御帯域外のダイナミクス管理、擾乱管理、時刻管理、高帯域指向計測、指向データ処理設計、地上での画像処理と指向決定を行い要求実現に取り組んでいる。このうち、衛星姿勢の寄与は大きく、指向要求の各項目に対して姿勢制御精度、姿勢安定度、姿勢決定精度、位置決定精度という形で、姿勢軌道制御系へ配分している(表 2)。

表 1 指向管理要求 (3σ)

| | |
|-------------------------|---|
| 指向制御精度 | 各軸: ±0.1° 以下 |
| 指向安定度 | 短周期 Roll, Yaw: 2.0×10 ⁻⁵ ° /0.37ms (p-p) Pitch: 1.0×10 ⁻⁵ ° /0.37ms (p-p) |
| | 中周期 各軸: 2.0×10 ⁻⁴ ° /1s (p-p)以下 ^{注1)} 各軸: 4.0×10 ⁻⁴ ° /1s (p-p)以下 ^{注2)} |
| | 長周期 各軸: 2.0×10 ⁻⁴ ° /5s (p-p)以下 ^{注1)} 各軸: 4.0×10 ⁻⁴ ° /5s (p-p)以下 ^{注2)} |
| モード 指向決定精度 | 各軸: ±2.0×10 ⁻⁴ ° 以下 |
| モード 衛星位置決定精度 | 200m 以下 |
| 指向決定精度 ^{注3)} | 各軸: ±2.0×10 ⁻⁴ ° 以下 |
| 衛星位置決定精度 ^{注3)} | 1m 以下 |

注 1) DRC アンテナ非駆動時、注 2) DRC アンテナ駆動時、
注 3) オフライン処理後

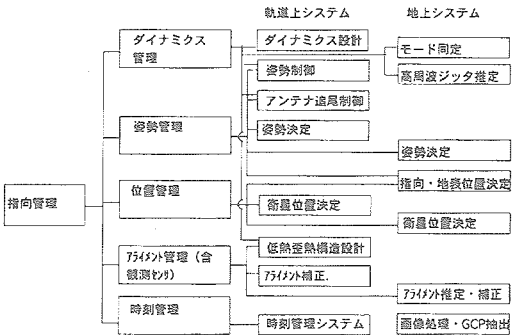


図 2 指向管理

2.3 制御・管理対象として ALOS

制御対象としての ALOS は、全長 23m・質量 220kg の太陽電池パドル、全長 9m・質量 480kg の PALSAR アンテナ、全長 2m・質量 160kg のデータ中継通信アンテナ (DRC) といった大型柔軟構造を持ち、さらに DRC、AVNIR-2、ホイールが駆動に伴い擾乱を発生するなど、制御上の課題も大きい。柔軟構造物の最低振動モードは、Fix-Free の条件で、パドルの場合 0.03Hz、PALSAR の場合 0.5Hz、DRC の場合 3.7Hz と、広帯域にわたって存在している。図 13 に衛星の開ループ周波数応答を示した。

一方、低周波数領域に目を転ずると、大型であるが故にセンサ間の熱歪みも大きくなり易い。そのため、これを低く抑えることが重要になる。こうした課題の中、要求精度を実現するため、ALOS では以下のように姿勢軌道制御系を構成した。

3. ALOS 姿勢軌道制御系 (AOCS)

3.1 概要

ALOS AOCS の主な機能性能を表 2 に、モード遷移図を図 3 に示す。AOCS は、3 軸ストラップダウン姿勢決定ゼロモーメント方式である。また、AOCS は、捕捉モード、定常制御モード、軌道制御モードを持ち、観測モードである定常制御では、恒星センサベースの姿勢決定 (高精度姿勢決定) とこれに基づく姿勢制御を行いここに掲げた精度要求を満足する。

設計にあたっては、リスクとコストを最小限に抑えるため、ETS-VI、ADEOS、ADEOS-II の技術的資産を活用しつつ、ALOS 特有の高精度化に必要な要素に対しては高い目標を掲げ新規技術の開発を図った。

表 2 姿勢軌道制御系の主な機能性能

| | |
|------------|---|
| 方式 | 3 軸ストラップダウン姿勢決定 ゼロモーメント姿勢制御 |
| モード | スタンバイ、捕捉、定常制御 (標準姿勢決定基準、高精度姿勢決定基準)、軌道制御 |
| 姿勢制御精度 | 各軸: ±0.095° 以下 (3σ) |
| 姿勢安定度 (3σ) | 短周期 Roll, Yaw: 1.9×10 ⁻⁵ ° /0.37ms (p-p) Pitch: 0.95×10 ⁻⁵ ° /0.37ms (p-p) |
| | 中周期 各軸: 1.9×10 ⁻⁴ ° /1s (p-p)以下 ^{注1)} 各軸: 3.9×10 ⁻⁴ ° /1s (p-p)以下 ^{注2)} |
| | 長周期 各軸: 1.9×10 ⁻⁴ ° /5s (p-p)以下 ^{注1)} 各軸: 3.9×10 ⁻⁴ ° /5s (p-p)以下 ^{注2)} |
| 姿勢決定精度 | 各軸: ±3.0×10 ⁻⁴ ° 以下 (3σ) |
| 衛星位置決定精度 | 200 m 以下 (95%) |
| データ出力 | オフライン指向決定・位置決定データ出力 |
| 捕捉時間 | 95 分以内 (初期)、200 分以内 (再捕捉) |
| その他の機能 | ヨーステアリング、パドル制御、1553B データバス、CCSDS データハンドリング |
| 演算周期 | 10 Hz |
| 耐故障性 | H/W 冗長、MPU 三重冗長管理、FDIR |
| 質量 | 159.2 kg (ノミナル) |
| 消費電力 | 341.5 kW (ノミナル) |

注 1) DRC アンテナ非駆動時、注 2) DRC アンテナ駆動時、

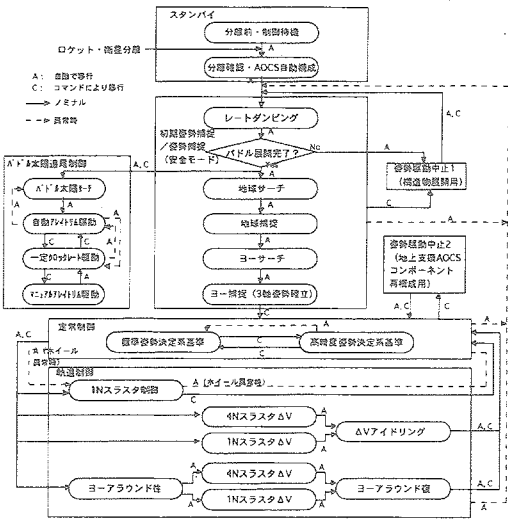


図 3 モード遷移図

3.2 アーキテクチャ

ALOS AOCS のアーキテクチャを図 4 (ハードウェア構成)、図 5 (ソフトウェア構成) に示す。ハードウェアとしては、地球センサ (ESA)、太陽センサ (FSS)、慣性基準装置 (IRU)、磁気トルカ (MTQ) といった既存のコンポーネントに加えて、ランダム角度誤差 9.0°、バイアス角度誤差 0.74° の高精度恒星センサ (STT)、2 周波の搬送波測位が可能な高精度 GPS 受信機 (GPSR)

を新たに開発し、同じく新規開発の 64 bit MPU ベース高性能計算機 (AOCE) を核として構成した。また、パドルの熱衝撃やアンテナ駆動擾乱による姿勢変動を抑制するため、大トルクホイール (RWA) を搭載した。なお、姿勢決定精度、指向決定精度を向上させるために、STT と IRU は、主観測機器 PRISM とともに、厳しく温度制御された光学ベンチ上に搭載した。

搭載ソフトウェア (ACFS) は、新たに汎用リアルタイム OS 上に汎用高級言語 (C) で実現している。従来の姿勢捕捉、軌道制御、ESA ベース姿勢決定・制御、FDIR といったアプリケーションに加えて、新たに FMM (Fault-Tolerant Multiprocessor Manager)、恒星同定、拡張カルマンフィルタによる高精度姿勢決定フィルタ、DRC 及び AVNIR-2 の高精度協調制御機能、パラメータ同定機能、高精度オンボード軌道モデル、1553B データ I/F、CCSDS データ処理を開発し搭載した。

この AOCS の特徴の一つは、STT ベースの高精度姿勢決定と従来の ESA ベース姿勢決定 (標準姿勢決定) を並行して行うことである。定常運用モードでは、高精度系をもとに姿勢制御を行い、標準系は高精度系の監視 (FDIR) に用いられる。標準系はまた、高精度系立ち上げ前や異常時の制御リファレンスに用いる。この構成により、高精度姿勢情報のユーザへの配信や、高精度姿勢決定系による高い姿勢制御精度・姿勢安定度の実現を可能にするとともに、実績のある標準姿勢決定による異常検知でリスク低減を図った。

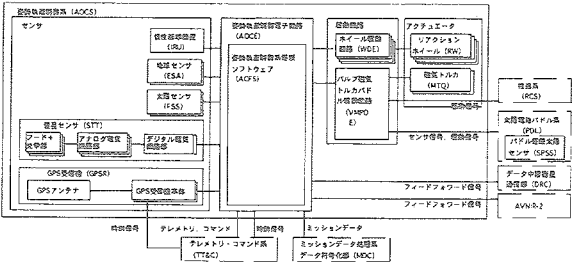


図 4 AOCS アーキテクチャ (H/W)

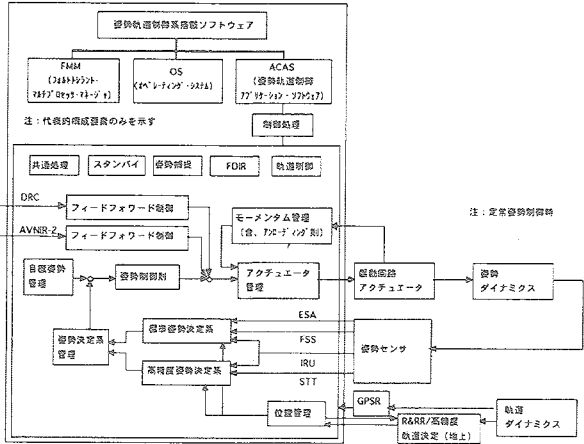


図 5 ACFS アーキテクチャ (S/W)

3.3 耐故障性設計

フォルトトレラント設計としては、MPU を 3 系統搭載し Duplex 運転を行い、MPU レベルのシングルイベントエラーに対しては、FMM による相互監視とロールバ

ック、時間差多数決により対応する。また、AOCE では、メモリ、I/O、内部データバス、1553B I/F といった全ての機能ブロックが冗長系を有し、さらにメモリは EDAC による 1bit エラー訂正機能を持つ。また、AOCS のコンポーネントは全て冗長系を有し、アプリケーションレベルの単一故障や異常動作に対しては ACFS 内の FDIR ソフトウェアで対応し故障分離と再構成を行う。

3.4 姿勢軌道制御電子回路 (AOCE)

AOCE は、NASDA が宇宙用に新たに開発した 1M ゲートアレイベースの 25MIPS 64bit MPU を中心に構成した。AOCE の構成を図 6 に示す。64bit 演算に浮動小数点演算機能を併せ持つこの MPU を 3 台搭載し、メモリには 512KB の共通 ROM、1MB の CPU/RAM、512KB の共通 ROM を配置した。これにより、計算負荷が非常に大きい高精度姿勢決定系の存在にも拘わらず、100ms 周期の制御演算を実現した。また、データ I/F は 1553B データバス対応で CCSDS に準拠している。さらに、軌道上再プログラミングが可能である。

表 3 姿勢軌道制御電子回路の主な機能性能

| | |
|---------|--|
| 機能 | センサ信号処理、姿勢決定・制御演算、アクチュエータ駆動信号処理、機器管理、メモリ・コマンド処理、MDHS データ出力 |
| MPU | R4900 25MIPS、3 台搭載 |
| 制御演算処理 | 64bit 演算、浮動小数点演算機能 |
| 演算周期 | 100ms |
| メモリサイズ | 512KBROM、1MB CPU/RAM、512KB RAM (EDAC 1bit エラー訂正) |
| 耐故障性 | 2CPU による相互監視運転、時間差多数決 |
| 再プログラム | 軌道上再プログラム可能機能 |
| インタフェース | 1553B データバス、CCSDS、RS422 (GPSR、STT、DRC) |

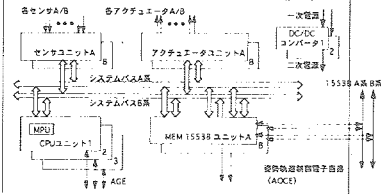


図 6 AOCE の構成

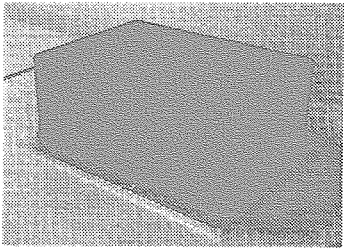


図 7 姿勢軌道制御電子回路 EM

3.5 姿勢軌道制御系搭載ソフトウェア (ACFS)

ACFS は、リアルタイム・オペレーティング・システム (RTOS)、FMM、姿勢軌道制御アプリケーション・ソフトウェア (ACAS)、プロトコル・プロセッサ搭載ファームウェア (PPFW) 等からなる。RTOS は、汎用リアルタイム OS であり、UDEOS/r49 を使用している。FMM は、複数 MPU を駆使した CPU 故障耐性機能を司り、Duplex 運転、ロールバック処理、時間差多数決、CPU 再構成などにより、計算機の単一故障、ラッチアップ、シングルイベントアップセットに対してミッション遂行能力を維持する。ACAS は、ACFS の目的である各種制

御処理を行うアプリケーションタスク群である。ACAS は、共通 ROM に実装される基本制御や安全モードに不可欠な部分と、パケットコマンドによって共通 RAM にアップロードされる部分に分かれている。RAM 部のアップロードは打ち上げ前に行い AOCE はホットローンチされる。PPFW はシリアル I/O プロセッサ上で稼動する通信用ファームウェアである。

3.6 恒星センサ (STT)

ALOS STT は、2 次元 CCD を検出素子とする固定ヘッド型の高精度姿勢センサで、世界最高の星位置精度を特徴とする。恒星の位置と明るさを検出し、星のアドレスと出力レベルを算出する。ALOS は、3 系統搭載し、そのうち 2 系統の出力を常時利用する。1 系統あたり 8 × 8 ° の視野に、トラックモードの場合 4~6.5 等級の範囲の星の位置と明るさを毎秒最大 5 個、捕捉モードの場合星の位置と明るさを明るい方から毎秒最大 10 個、AOCE に出力する。STT の主な機能性能を表 4 に示す。詳細は文献[2]を参照されたい。

表 4 ALOS STT の主な機能性能

| | |
|------------------------------|------------------------------------|
| 構成 | 3 系統搭載及び ON、2 系統動作 |
| 視野角 | 8 × 8 ° |
| 検出等級 | 4~6.5 等級 (mag) 以上 |
| 星獲得数 | 10 個 × 2 系統 (捕捉)、5 個 × 2 系統 (トラック) |
| 星位置精度 (3 σ ランダム誤差) の 1 恒星 | 9" 以下 (6 等級) |
| バイアス誤差 | 0.74" 以下 (軌道上補正後) |
| 出力レート | 1 Hz |

3.7 GPS 受信機 (GPSR)

L1 信号のみを受信する ADEOS-II の GPS 受信機に対して、ALOS GPSR は L2 信号を同時受信し、それぞれの搬送波位相をも計測する。オフラインで 2 周波の受信データを使用し、搬送波測位をすることで誤差 1m 以下の衛星位置決定を可能にする。この高精度位置決定のために、地上の高精度軌道決定システム向けの GPSR データをミッションデータ処理系に出力する。また、GPSR は高精度な基準時刻パルスを発信し、衛星内の時刻管理の原針になる。さらに、AOCE は GPSR の単独航法結果を PCD 源泉として TT&C を介して衛星内ユーザに配信する。GPSR の主な機能性能を表 5 に示す。詳細は文献[3]を参照されたい。

表 5 GPS 受信機の主な機能性能

| | |
|-----------|----------------------|
| 構成 | [7ch, LNA, 受信機] × 2 |
| 同時受信衛星数 | L1: 6 衛星, L2: 6 衛星 |
| わーど航法精度 | 位置 200m 以下 (SA 想定) |
| 度 | 速度 1.0m/s 以下 (SA 想定) |
| 基準時刻パルス精度 | 404ns |
| 計測精度 | L1 シュートレンジ 10m |
| | L1 搬送波位相 10mm |
| | L1 シュートレンジ 10m |
| | L1 搬送波位相 18mm |
| 出力レート | 1Hz |

以降の節では、ALOS の特徴である「高精度」を実現するために取ったアプローチについて、個々に紹介する。議論は定常制御モードに対する設計に焦点を当てる。

4. 姿勢決定精度

姿勢決定精度は、高精度 STT、オンボード恒星同定、拡張カルマンフィルタによる姿勢クオータニオン推定、STT-IRU 間のアライメント変動低減により実現した。また、地上での指向決定のために、姿勢推定データ、STT

データをミッションデータ処理系に常時出力する。これら高精度姿勢決定系の設計について以下に記す。なお、高精度 STT の設計については 3.6 節に記した。

4.1 高精度姿勢決定系運用シーケンス

AOCS は、衛星の軌道投入後、初期捕捉モードを経て、地上コマンドにより ESA 基準の定常制御モードに入れられる。この後、図 8 のシーケンスを経て、高精度姿勢決定系基準の定常制御モードに移行する。AOCE は、まず、STT を捕捉モードに入れその出力を基に搭載した恒星カタログを用いてパターンマッチングにより恒星同定を行う。同定に成功した後、STT をトラックモードに移行させ、直接法による恒星同定、クオータニオン算出、及びトラックウィンドウ指定を開始する。その後、IRU によるクオータニオン更新を開始し、さらに拡張カルマンフィルタによる観測更新を開始する。最後にコマンドにより制御に使用するリファレンスを標準姿勢決定系から高精度姿勢決定系に切り替える。

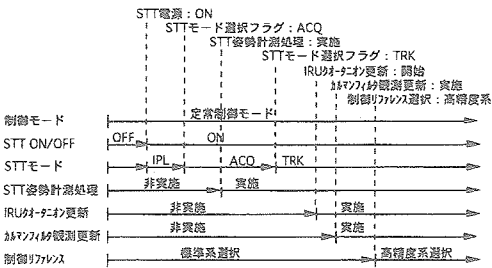


図 8 高精度姿勢決定系移行シーケンス

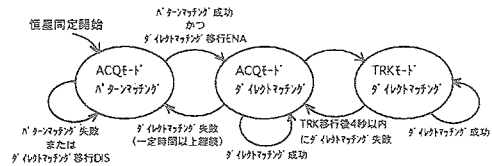


図 9 恒星同定処理の状態遷移図

4.2 恒星同定・姿勢計測

恒星同定処理の状態遷移を図 9 に示す。STT 捕捉モード時は、アプリアリな姿勢情報を必要としないパターンマッチング法により恒星同定を行い、一旦同定が成功した後は自動で直接法に移行し恒星同定を継続する。移行後、一定時間同定失敗が継続する場合は、自動で再度パターンマッチング法へ移行し同定を行う。

パターンマッチングのアルゴリズムは、表 6 に示すステップで構成した。パターンマッチング時の同定性能を全天に対してシミュレーションした結果、同定不能最大継続時間は 336s であった。また、捕捉モード時直接法の解析では、同定率が最悪 94%、誤同定率が 1%だった。

捕捉モードで同定が成功していることを確認した上で、コマンドにより STT をトラックモードに入れるが、この際の恒星同定・姿勢計測アルゴリズムは表 7 の通りである。なお、トラックモード移行直後には、同定恒星数 3 個未満の場合にダイレクトマッチングに失敗するケースがありうる。この場合には自動的に捕捉モードの直接法に移行する。トラックモードにおける STT 計測姿勢角の算出は、姿勢角誤差の微小性を利用した以下の方法

によりなされる。STT から得られた恒星方向ベクトルを \vec{s}_i 、恒星カタログから得られた恒星方向ベクトルを \vec{c}_i とすると、姿勢角誤差は次式から得られる。

$$\begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T \left[\begin{bmatrix} \vec{s}_1 \\ \vdots \\ \vec{s}_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \vec{c}_1 \\ \vdots \\ \vec{c}_n \end{bmatrix} \right], \quad A = \begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix}, \quad C_i = \begin{bmatrix} 0 & -c_{i3} & c_{i2} \\ c_{i3} & 0 & -c_{i1} \\ -c_{i2} & c_{i1} & 0 \end{bmatrix}$$

これをクォータニオンに変換して予想姿勢クォータニオンを加え STT 計測姿勢クォータニオンを求める。

表6 捕捉モードパターンマッチングアルゴリズム

- ・観測星について一番目、及び二番目に近い星との離角、その間の角度を算出。
- ・これらをカタログの形状と比較。
- ・同定成功した星がある場合、さらに等級情報をカタログの情報と比較。
- ・同定成功した星全てを使い STT 計測姿勢角を算出。

表7 トラックモード恒星同定・姿勢計測アルゴリズム

- ・予測姿勢クォータニオンによりウィンドウ H/V アドレス指令値を生成。
- ・STT が対応したウィンドウに検出した H/V アドレスを AOCE に送信。
- ・Σs 値をチェック。検出 H/V アドレス、予想姿勢クォータニオン、恒星カタログ上のベクトルから STT 計測姿勢クォータニオンを算出。

4.3 恒星カタログ

恒星同定に用いる恒星カタログは、Hipparcos カタログを基に改訂された SKY2000.0Ver2 カタログをマスタカタログとして用いた。これを基に、離角の小さい恒星対と多重星の削除、STT で検出可能等級の抽出、固有運動大きい恒星の削除、変光星の削除、隣接星の削除、星雲と重なる恒星の削除を行い、搭載恒星カタログを作成した。オンボードでさらに同定した星に対して、固有運動、年周視差、光行差等の補正を行い高精度姿勢決定フィルタに入力する。

4.4 拡張カルマンフィルタ

IRU 出力とあわせて、STT による姿勢検出結果を慣性座標系基準のまま姿勢決定フィルタに入力する。姿勢決定フィルタには、拡張カルマンフィルタを用いる。

拡張カルマンフィルタを適用する姿勢推定誤差システム方程式は、真の姿勢クォータニオン $\vec{q} = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4]^T$ を、期待座標における真の角速度を $\vec{\omega} = [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^T$ 、IRU 出力を $\vec{u} = [u_x \ u_y \ u_z]^T$ 、IRU ドリフトレートを $\vec{b} = [b_x \ b_y \ b_z]^T$ 、ランダムドリフトノイズを $\vec{\eta}_1 = [\eta_{1x} \ \eta_{1y} \ \eta_{1z}]^T$ 、ランダムウォークドリフトノイズを $\vec{\eta}_2 = [\eta_{2x} \ \eta_{2y} \ \eta_{2z}]^T$ として、

$$\frac{d\vec{q}}{dt} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y & \omega_x \\ -\omega_z & 0 & \omega_x & \omega_y \\ \omega_y & -\omega_x & 0 & \omega_z \\ -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z & 0 \end{bmatrix} \vec{q} = \frac{1}{2} \Omega(\vec{\omega}) \vec{q}, \quad \frac{d\vec{b}}{dt} = \vec{\eta}_2, \quad \vec{\omega} = \vec{u} - \vec{b} - \vec{\eta}_1$$

より導出する。状態量を $\vec{x} = [\vec{q}^T \ \vec{b}^T]^T$ 、その推定値を $\vec{x}_e = [\vec{q}_e^T \ \vec{b}_e^T]^T$ 、 $\vec{\omega}_e = \vec{u} - \vec{b}_e$ とすると、姿勢推定誤差は $\Delta\vec{x} = \vec{x} - \vec{x}_e$ となり、 \vec{x}_e 近傍でテイラー展開して 1 次近似の姿勢推定誤差システム方程式が得られる。

$$\frac{d\Delta\vec{x}}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\Omega(\vec{\omega}_e) & -\frac{1}{2}\Xi(\vec{q}_e) \\ 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \Delta\vec{x} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\Xi(\vec{q}_e) & 0_{4 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\eta}_1 \\ \vec{\eta}_2 \end{bmatrix}$$

$$\Xi(\vec{q}_e) = \begin{bmatrix} q_{e4} & -q_{e3} & q_{e2} \\ q_{e3} & q_{e4} & -q_{e1} \\ -q_{e2} & q_{e1} & q_{e4} \\ -q_{e1} & -q_{e2} & -q_{e3} \end{bmatrix}$$

姿勢推定誤差観測方程式は、姿勢推定誤差を \vec{y}_m 、観測ノイズを \vec{v} として、 $\vec{y}_m = \vec{q} - \vec{q}_e + \vec{v}$ となり、 $\Delta\vec{x}$ を用いて、次式で表される。

$$\vec{y}_m = [I_{4 \times 4} \ 0_{4 \times 3}] \Delta\vec{x} + \vec{v}$$

さらにシステム方程式を離散化し、クォータニオンの冗長性を除去して、離散化誤差システムに対しカルマンフィルタを構成した。観測更新は、1 Hz の STT 計測にあわせて行うが、その間は、ジャイロ計測周期にあわせて 10 Hz で IRU クォータニオン更新を行う。詳細は、文献[5]に記した。

4.5 アライメント変動

姿勢決定精度を実現するため、センサ間のアライメントの変動を低く抑えることが重要になる。STT 基準とジャイロ間のアライメントの変動については、両者を 23°C に制御された光学ベンチに載せ、それぞれのブラケットも熱歪みの小さい構造とした。この結果、軌道上のアライメント変動を 10"以下に抑えた。STT 光学系間のアライメント変動は、光学ベンチに搭載した STT ブラケットの低熱歪み構造と温度制御により 0.25"以下に抑えた。

4.6 解析結果

高精度姿勢決定系のシミュレーションを全天に対して行い姿勢決定誤差を評価した。シミュレーション結果の一例を図 10 に示す。これらの評価を中心として、他の誤差源も含めて総合的に評価した結果を図 11 に示す。

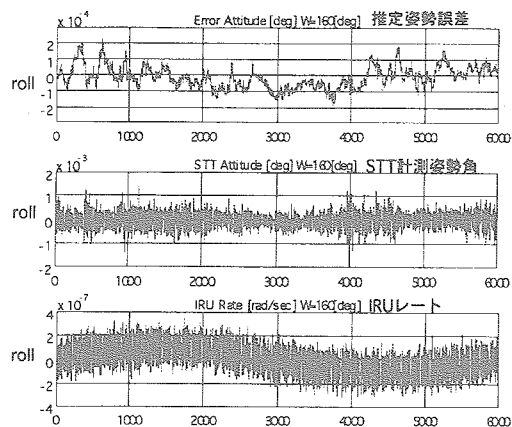


図 10 姿勢決定解析結果 (STT1&3, Ω=160deg)

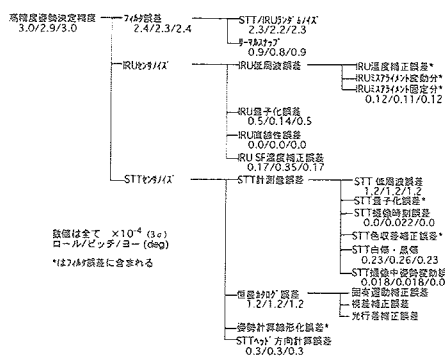


図 11 高精度姿勢決定精度評価

5. 姿勢制御精度

姿勢制御精度は、高精度姿勢決定系をリファレンスとした姿勢制御、10 パラメータの精密なオンボード軌道モデルにより実現した。

5.1 姿勢制御基準座標系

高精度姿勢決定系により算出される姿勢角は J2000 慣性座標系に対するものである。地球中心指向姿勢制御を実施する際には、慣性系に対する姿勢から軌道位置に基づき地球指向のリファレンス姿勢を算出する必要がある。AOCS はこのために次式のオンボード軌道モデルを搭載し、これを伝播して得られる制御基準軌道座標系を慣性系基準の推定姿勢から差し引き制御誤差を算出する。

$$a = P_1 + K_1 \cos 2\bar{\alpha}$$
$$e_x = P_2 + K_2 \cos 3\bar{\alpha} + K_3 \cos \bar{\alpha}, \quad e_y = P_3 + K_2 \cos 3\bar{\alpha} + K_4 \sin \bar{\alpha}$$
$$i = P_4 + K_5 \cos 2\bar{\alpha} + K_8 \cos \left[2(\dot{\theta}_G - P_7)t + P_{10} \right]$$
$$\Omega = P_5 + P_7 t + K_6 \sin 2\bar{\alpha}$$
$$\alpha = \bar{\alpha} + K_7 \sin 2\bar{\alpha} + K_9 \sin \left[2(\dot{\theta}_G - P_7)t + P_{10} \right]$$
$$\bar{\alpha} = P_6 + P_8 t + P_9 t^2, \quad e_x = e \cos \omega, \quad e_y = e \sin \omega, \quad \alpha = \omega + M$$

なお、軌道モデルのパラメータは、地上での軌道決定に基づき少なくとも 3 日に一度更新する。

5.2 制御則

ALOS の姿勢運動は、太陽電池パドル、PALSAR、衛星間通信アンテナといった柔軟構造と、並進運動を考慮すると以下の運動方程式で表される。

$$I_T \ddot{\omega} + \sum_j \sum_i (\bar{R}_j \times \bar{\delta}_{oi}^j + \bar{\delta}_{li}^j) \ddot{q}_i^j = T_c + T_e$$
$$M_T \ddot{v}_{CG} + \sum_j \sum_i \bar{\delta}_{oi}^j \ddot{q}_i^j = 0$$
$$\ddot{q}_i^j + 2\zeta_i^j \omega_i^j \dot{q}_i^j + \omega_i^{j2} q_i^j + \bar{\omega}^T (\bar{R}_j \times \bar{\delta}_{oi}^j + \bar{\delta}_{li}^j) + \bar{v}_{CG}^T \bar{\delta}_{li}^j = 0$$
$$j = PDL, PALSAR, DRC$$

このプラントに対して、ロール、ピッチ、ヨーの各軸に対して、独立した制御則を設計した。

制御則は図 12 の形をとり、PD 制御と積分補償、リードラグフィルタ、及びホイールスピードサーボループからなる。ここで従来の衛星と違うのは、より積極的に柔軟モードの位相安定化を図っている点である。



図 12 定常制御則

例として、ヨー軸に対して、プラント自身の伝達関数（破線）と制御則により補償されたループ伝達関数（実線）の特性を、ボード線図（図 13）に表した。パドル回転角が 90° のケースで、パドルが熱衝撃を受ける際のダイナミクスに対応する。ヨー軸では、位相余裕約 54°（PALSAR1 次）、ゲイン余裕約 27dB（PALSAR2 次）を確保している。表 8 にパドル回転角 0°、90° の場合の安定余裕をまとめた。姿勢制御精度設計結果は図 14 にまとめた。

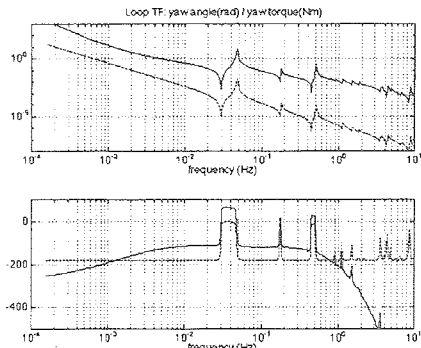


図 13 定常制御ボード線図（パドル回転角 90deg、ヨー軸）

| 軸 | ロール | | ピッチ | | ヨー | |
|----------------|------|-------|------|-------|------|-------|
| | 0deg | 90deg | 0deg | 90deg | 0deg | 90deg |
| パドル回転角 | | | | | | |
| 柔軟モードゲイン余裕(dB) | 11 | 17 | 35 | 31 | 27 | 27 |
| 位相余裕(deg) | 85 | 46 | - | - | 54 | 54 |
| 剛体モードゲイン余裕(dB) | 25 | | 42 | | 27 | |
| 位相余裕(deg) | 58 | | 61 | | 54 | |

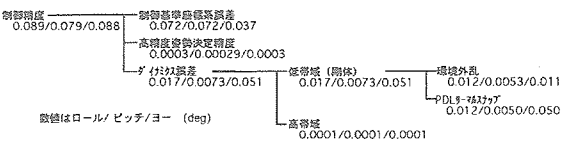


図 14 姿勢制御精度評価

6. 姿勢安定度

姿勢安定度に対しては、柔軟構造の位相安定化、高精度協調制御と軌道上パラメータ同定、アンテナ追尾制御系のアクティブダンピング、高精度姿勢決定系ベース姿勢制御、固有値管理、ホイールバイアス運用、共振回避パドル自動アレイトリム制御を導入した。

6.1 ダイナミクスと擾乱

図 15 に ALOS の姿勢安定度に影響を与えるダイナミクス構成要素とその関係を示す。内部擾乱源、外部擾乱源としては、主として、DRC アンテナ駆動機構、AVNIR-2 ミラー駆動機構、リアクションホイール、太陽電池パドル駆動機構、太陽電池パドルの熱衝撃、環境外乱（含、太陽放射圧の非連続性）がある。

これらの擾乱が、剛体としての衛星本体姿勢に影響を与える他、DRC の H/D ギアとサポートブーム、PALSAR、太陽電池パドル、衛星構体、推進薬スロッシングの動的モードを励起する。また以上の他に、姿勢制御系が誤差を含んだ姿勢制御基準座標に追従するように制御することによる安定度劣化や、システム角運動量のジャイロ効果による劣化がある。

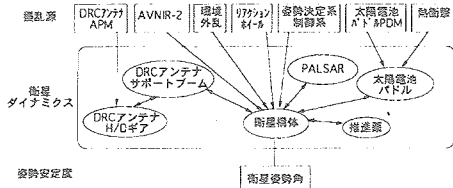


図 15 ダイナミクス構成要素の相関

6.2 要求と特性

前述した擾乱や動的モードは、それぞれの周波数帯域を持つ。図 16 に、姿勢安定度要求を周波数領域で表現

し、擾乱や動的モードの周波数成分と比較した。上図において、姿勢変動は、短周期・長周期安定度要求及び制御精度要求を示すラインより小さく抑えられる必要がある。姿勢変動の低周波数成分は姿勢制御系により抑制されるが、図 16 に示すように、姿勢制御帯域及び補償帯域は擾乱や振動モードを全て補償するほど広くない。このため、制御帯域外の姿勢安定度を低く抑えるために、協調制御や固有値管理、擾乱管理が必要になる。

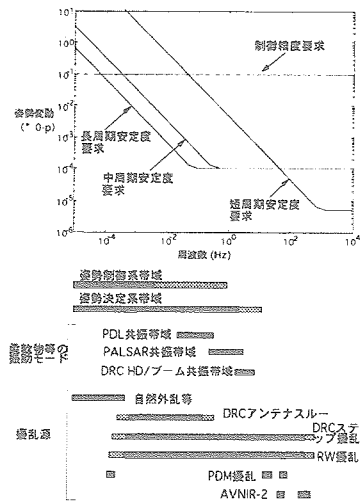


図 16 周波数領域における要求と擾乱

表 9 姿勢安定度実現方法

| 擾乱 | 対策 |
|----------|---|
| DRC アンテナ | 共振 ・アンテナ追尾制御系の高ゲイン化 ・構造、機構の最適化設計 ・固有値の向上/低減と管理 |
| | スルー ・協調制御 ・オンボードパラメータ同定 |
| AVNIR-2 | ミラー駆動 ・ミラー質量特性管理 |
| ホイール | ゼロクロス ・バイアス角速度運用 ・低擾乱ホイールの採用 |
| 太陽電池パドル | 熱衝撃 ・ホイールの高トルク化 ・パドルの高剛性化 |
| | 追尾駆動 ・駆動パルスのランダム化 |
| 制御系 | 決定安定度 ・STT ベース姿勢制御 |

6.3 実現方法

表 9 に主要な安定度劣化要因に対して取った方策をまとめる。DRC アンテナのステップモータによる駆動はアンテナブームとハーモニックドライブギアのモードの共振を励起する。これを低減するために、DRC アンテナの追尾制御系はこれらのモードにアクティブダンピングを施した。また、ブーム・ギア設計における固有値管理により共振を低減した。DRC アンテナは、データ中継衛星を切り替える際に、大きく指向方向を変更する。この際のスルー運動の角運動量交換により、大きく姿勢が変動する。この影響を低減するため、AOCS は、DRC アンテナの運動と協調してフィードフォワード制御を実施する。この協調制御の性能は、DRC アンテナの質量特性モデルのパラメータ誤差に依存するため、軌道上でパラメータ同定を行い協調制御誤差を 1% 以内にする。

大型ミラーの運動に伴い姿勢擾乱が発生するため、協調制御は AVNIR-2 に対しても行う。AOCS は、ミラー駆動機構により生成される角運動量を補償するために、フィードフォワード制御を行う。AOCS によるフィード

バック制御も姿勢擾乱の低減に大きく貢献する。ALOS では、太陽電池パドルや PALSAR の低次モードの位相安定を図っており、これにより環境外乱、パドルの熱衝撃等により発生する姿勢振動を積極的に減衰させた。

姿勢安定度の劣化要因とそれぞれの寄与を評価した結果を表 10 にまとめる。姿勢安定度は全体でも要求を満足している。以下では、前述した方策のうち代表的なものとそのシミュレーション結果を示す。

表 10 長周期姿勢安定度評価結果

| 要因 | ロール | ピッチ | ヨー |
|-----------------------------------|----------|----------|----------|
| 姿勢安定度 | | | |
| 環境外乱 | 9.2e-5 | 3.2e-5 | 9.5e-5 |
| 連続成分・ジャイロ効果 | | | |
| 不連続成分 | (1.4e-4) | (4.0e-5) | (2.5e-4) |
| DRC | | | |
| 共振・捕捉 | 2.3e-4 | 2.5e-5 | 7.9e-5 |
| スルー | 1.3e-4 | 1.3e-4 | 1.1e-4 |
| AVNIR-2 | | | |
| 協調制御誤差 | 5.0e-5 | 4.5e-6 | 2.1e-6 |
| ミラー駆動 | | | |
| RW | | | |
| 動的インバランス・静的インバランス・トルクアップ・ベアリングノイズ | 3.4e-5 | 6.7e-5 | 4.4e-5 |
| ゼロドリフト | | | |
| MTQ | | | |
| FF 誤差・電流リップル・低周波擾乱 | 1.0e-10 | 3.5e-11 | 4.3e-11 |
| PDL | | | |
| 駆動ノイズ | 0.0e-4 | 4.5e-5 | 0.0e-4 |
| 駆動ノイズ | 1.5e-8 | 1.2e-7 | 1.3e-8 |
| 熱衝撃 (7 分後) | 7.0e-6 | 3.0e-5 | 1.4e-4 |
| ESA | | | |
| 擾乱 | 1.4e-8 | 1.4e-8 | 1.4e-8 |
| IRU | | | |
| 擾乱 | | | |
| 決定系安定度 | | | |
| 輻射変動・扁平・摂動・離心率 | | | |
| STT 誤差・地上系誤差 | 4.9e-5 | 4.9e-5 | 4.9e-5 |
| RCS | | | |
| スラッシュ | 1.4e-7 | 7.5e-7 | 2.5e-7 |
| ヨーリング | 4.9e-5 | 6.0e-5 | 6.5e-5 |
| 構体振動 | | | |
| PDL・DRC・AVNIR-2・RW | 1.5e-4 | 5.0e-5 | 2.8e-5 |
| 計 | | | |
| (DRC 非駆動時) | 2.0e-4 | 1.3e-4 | 2.0e-4 |
| (DRC 駆動時) | 3.3e-4 | 1.9e-4 | 2.4e-4 |

6.4 柔軟構造の位相安定化

柔軟構造の位相安定化を含んだ制御則の効果について紹介する。制御則の設計自体は 5.2 節で記述した。ALOS のフライトにおける最大の擾乱要因はパドルに発生する熱衝撃であるが、この際の閉ループの応答をシミュレーションした結果をヨー軸について図 17 に示す。衛星日照と地表面日照の時間の差 420s 以内に姿勢安定度が仕様内に収束しているのがわかる。

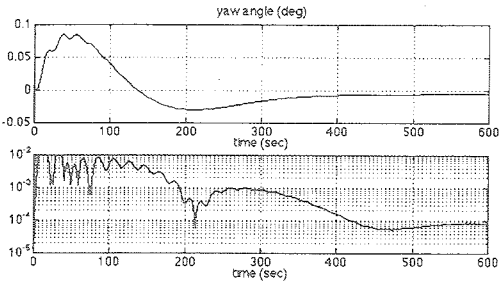


図 17 熱衝撃発生後の閉ループ応答

上図：ヨー姿勢角、下図：ヨー軸 5 秒間姿勢安定度

6.5 衛星間通信アンテナ協調制御

衛星の角運動量は機体座標系において次式で表される。

$$I_B \ddot{\omega} + \vec{H}_{DRC} + \vec{H}_{wheel} = 0$$

DRC が中継衛星を切り替える際のスルー時の協調制御では $\ddot{\omega}$ の変動を抑える為に、 $\vec{H}_{wheel} = -\vec{H}_{DRC}$ という角運動量をホイールに与える。アンテナ角度、アンテナ角速度からなる項と、アンテナの質量パラメータからなる項との間に線型な関係を導くことが出来るため、DRC の角運動量 \vec{H}_{DRC} は次式から求められる。

$$\vec{H}_{DRC} = \begin{bmatrix} g_{11}(M, I, r) & \cdots & g_{1n}(M, I, r) \\ g_{21}(M, I, r) & \cdots & g_{2n}(M, I, r) \\ g_{31}(M, I, r) & \cdots & g_{3n}(M, I, r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(\theta_{AZ}, \theta_{EL}, \dot{\theta}_{AZ}, \dot{\theta}_{EL}) \\ \vdots \\ f_n(\theta_{AZ}, \theta_{EL}, \dot{\theta}_{AZ}, \dot{\theta}_{EL}) \end{bmatrix}$$

ここで、ALOS ではモデル化誤差を低減するためアンテナモデルに 3 剛体モデルを用いた。また、軌道上でパラメータ同定を行いパラメータ誤差を低減する。線型な関係式は軌道上の計算負荷を低減するだけでなく、パラメータ推定を容易にする。この関係式を用いて、DRC の出力するアンテナ駆動情報から補償角運動量を計算し、ホイールサーボ系にフィードフォワードを行う。この際、アンテナ角速度は、エンコーダ差分によってしか得られないため、アンテナ制御系の生成するレートコマンドを用いた。また、ホイール制御系へ入力する際は、ホイールサーボ系での遅れを除去するために差分によりトルクを求めて直接ホイールトルクとして入力した。

図 18 に、DRC スルー時の協調制御のシミュレーション結果を示す。上図にロール角の応答を、下図にロールの長周期安定度を示した。

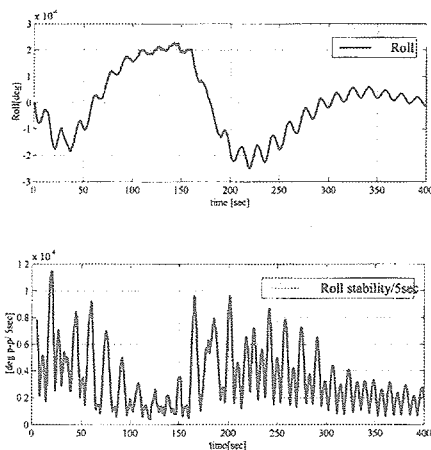


図 18 DRC スルー時の姿勢変動と姿勢安定度
(上図：ロール姿勢角、下図：ロール姿勢安定度)

7. 開発試験

AOCE, ACFS の EM を製作し、一連の開発試験を行った。具体的には、以下の試験を実施した。

- ・ AOCE コンポーネント開発試験、
- ・ ACFS コンポーネント開発試験、
- ・ 静的閉ループ試験
 - ・ TT&C、STT、GPSR との組合せ試験、
 - ・ 既存コンポーネントとの組合せ試験、
- ・ 静的閉ループ試験、
- ・ STT-AOCE の閉ループ試験

AOCE コンポーネント開発試験では、搭載計算機としての電氣的性能の確認の他、機械環境・熱環境を含む耐環境性に対する一連の確認を行った。ACFS コンポーネント開発試験では、AOCE EM に搭載してソフトウェア静的閉ループ試験の形でソフトウェアとしての統合試験 (CSCI 試験) を実施した。サブシステムレベルでの静的閉ループ試験では、新規性の高い TT&C DMS や STT、GPSR と組合せて重点的に試験を行った他、既存コンポーネントとの組合せも確認した。

静的閉ループ試験では、AOCE EM と ACFS EM、それにダイナミクスシミュレータを組み合わせ、ノミナルの運用シナリオ 7 ケースと、異常時を想定した 9 ケースを試験した。図 19 に、ノミナルケースのうち定常制御時の ESA ベース姿勢制御から STT ベース姿勢制御への移行とヨーステアリング運用を含んだケースについて、その結果を示す。

STT-AOCE 閉ループ試験では、光学部も含めた STT と AOCE、ダイナミクスシミュレータ、光学的恒星シミュレータを組み合わせ、閉ループ試験系を構成し、姿勢制御試験を行った。この試験系と試験結果については文献[4]に示した。

以上の試験を通して、ALOS AOCS の設計の妥当性を確認した。

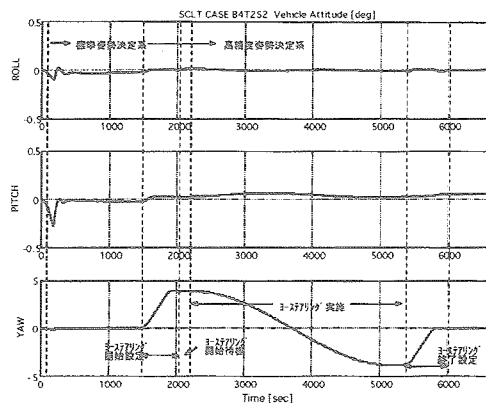


図 19 静的閉ループ試験結果
(高精度姿勢決定系定常制御＋ヨーステアリング)

8. おわりに

「高精度」をキーワードとし数々の新規要素を取り入れた ALOS AOCS を設計し、EM を用いた一連の開発試験を通してその成立性・妥当性を確認した。現在はプロトフライトモデル (PFM) を製作している。今後はプロトフライト試験による認定を完了させるとともに、打上後の軌道上実証、技術評価の計画を充実させていく。

参考文献

- [1] 岩田隆敬：高分解能地球観測衛星における計測と制御、計測と制御、Vol.40, No.1, p.113~121 (2001)
- [2] 岩田隆敬、他：陸域観測技術衛星 (ALOS) の高精度恒星センサ、第 45 回宇宙科学技術連合講演会、01-2A17、(2001)
- [3] 熊谷進、他：陸域観測技術衛星 (ALOS) の高精度 GPS 受信機、第 45 回宇宙科学技術連合講演会、01-2A12、(2001)
- [4] 岩田隆敬、他：恒星センサを用いた閉ループ姿勢制御試験、第 45 回宇宙科学技術連合講演会、01-1C5、浜松 (2001)
- [5] Y. Chida, et.al. : On-board Precision Attitude Determination Algorithm for the Advanced Land Observing Satellite (ALOS), 21st ISTS, Omiya (1998)
- [6] T. Iwata et.al. : Attitude and Orbit Control System for the Advanced Land Observing Satellite (ALOS), Int. WS for AOCS, Noordwijk (1997)
- [7] 岩田隆敬：陸域観測技術衛星 (ALOS) の高精度姿勢制御：姿勢安定度要求と実現方法、第 1 回制御部門大会、(2001)
- [8] T. Iwata et.al. : The Advanced Land Observing Satellite (ALOS) - Preliminary Design, IAF-98-B.2.01, 49th IAF, Melbourne (1998)

その他 ALOS 関連文献

その他, ALOS 関連の論文を紹介する.

[1] Takanori Iwata, Takeshi Yoshizawa, Hiroki Hoshino, Maeda Ken, "Precision Attitude and Orbit Control System for the Advanced Land Observing Satellite", AIAA 2003-5783, AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit, Austin, Texas, August 2003.

01-2A8 大型柔構造物を有する技術試験衛星Ⅷ型(ETS-Ⅷ)の姿勢制御

○米澤克雄、市川信一郎、児子健一郎 (宇宙開発事業団)、宮崎洋彰 (三菱電機)

Attitude Control on Engineering Test Satellite-Ⅷ(ETS-Ⅷ) with Large Flexible Structures

Katsuo Yonezawa, Shinichiro Ichikawa, Kenichiro Nigo(NASDA), Hiroaki Miyazaki(MELCO)

E-mail: yonezawa.katsuo@nasda.go.jp

Key Words: ACS, ETS-Ⅷ, FDIR, LDR, SPS, SC

Abstract

This paper outlines the over-all design of Attitude Control System on Engineering Test Satellite-Ⅷ(ETS-Ⅷ) with large flexible structures (Large Deployable Reflectors, the world's largest of its kind, and Solar Paddles), focusing on integrated OBC design with 64bit-MPU, large flexible structures stabilization, on-board system identification experiments, fault detection, isolation, & reorganization, and reprogramming function.

1. はじめに

技術試験衛星Ⅷ型(ETS-Ⅷ)は、携帯電話による移動体通信を可能にする世界最大級の3トン静止衛星バスであり、大型柔軟構造物として、7.5kwの大電力を発生する大型太陽電池パドル(SPS)二翼と19mX17mのSバンド大型展開アンテナ(LDR)二式を有する。平成16年度にH-IIAロケットで打ち上げる計画で現在、詳細設計フェーズの最終段階を迎えており、並行して開発試験により設計検証を行っており、漸次製作に移行すべくフライトモデルの設計ベースラインが固まっている。図1にETS-Ⅷの静止軌道上の概念図、表1に仕様諸元を示す。

本論文は、固有振動数の低い大型柔構造物を有する大型静止衛星バスETS-Ⅷの姿勢制御システムが直面する先進的な技術的課題についてエッセンスを紹介しこれまでに検討を重ねた結果として設計ベースラインを報告する。

大型展開アンテナは14個から成るモジュール構造で、打ち上げ時には筒状に畳まれて軌道上にてモジュールが手をつないで展開される。2個の大型展開アンテナが東西に開くとほぼテニスコートの大きさとなる。あまりにも大きく地上の試験では重力の影響が除去できず軌道上で柔構造パラメータがどのような値をもつのか同定することが難しい。したがって、現技術水準で最も確からしく同定された構造パラメータ

について、マージンを加味した安定化制御アルゴリズムを構築することが必須となる。大面積の大型展開アンテナに起因する太陽輻射圧による外乱を吸収し蓄積分は除去する必要がある。

大型太陽電池パドルは一翼あたり13.5mX2.5m(ハニカムリジットパネル4枚)で南北二翼からなり太陽を追尾して回転する。このような回転する大型柔構造物に対して姿勢制御システムは安定性を確保する必要がある。同時に太陽電池パドルと大型展開アンテナのカップリングの可能性にも注意する必要がある。

衛星制御器については、高速演算により位相安定制御を確保し、フォールトトレラント機能と搭載ソフトウェアを地上から書き直せる機能を持ち、故障に強い姿勢制御系を構成するために、宇宙用の64ビットMPUを搭載する。

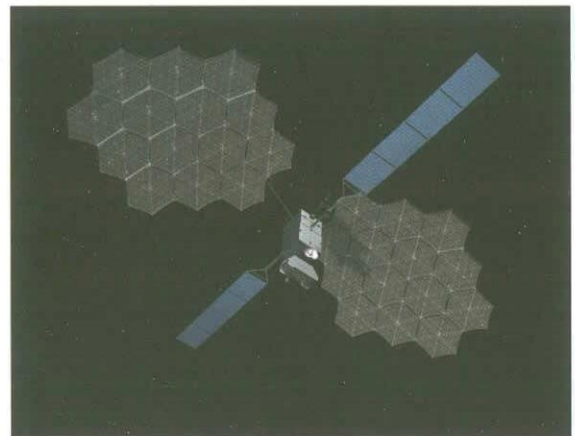


図1. 技術試験衛星Ⅷ型(ETS-Ⅷ)

2. 姿勢制御システムの概要

E T S—Ⅷ姿勢制御系はリアクションホイール（40 Nm級、4 スキュー）を用いたゼロモーメント三軸姿勢制御を採用し、大型展開アンテナ二基及び大型太陽電池パドル二翼の柔構造物と衛星本体との干渉を防止するため、位相制御と利得制御を組み合わせで姿勢安定化を図っている。姿勢制御系は単一故障点がないようにコンポーネントに必要な冗長構成を採用している。こうした冗長系の管理はF D I Rの一環としてS C（オンボード計算機）で自動処理を行う。図2に姿勢制御系ブロック図を示す。

コンポーネント構成は、S C（衛星制御器、O B C搭載）2式、センサ類がR I G A（二軸ジャイロT D G三個で内部冗長）1式、地球センサ2式、精太陽センサアセンブリ（視野の異なる三個で一組）2式、アクチュエータ類がリアクションホイール4式（4 スキュー配置、ゼロ・クロスの回避可能）、22 Nスラスタ12本（姿勢制御4 x 2、東西制御2 x 2）、490 N液体アポジモータ1式、20 mNイオンエンジン4本（2 x 2）から成る。

衛星分離後にオンとなるジャイロのドリフト較正には、地球センサと精太陽センサの姿勢角情報を取り込み地上局で同定したドリフトレートを用いる。定常モードではオンボードでドリフトレートの温度補償、ロールドリフトレートの精太陽センサ更新を行う。

22 Nスラスタによる姿勢制御は必要な制御トルクをオンオフのパルス噴射で等価的に発生することで行う。このためにD R Mモジュレータを用いてスラスタのパルス噴射を制御し高周波領域での位相遅れを和らげている。

H 2 Aロケット打ち上げ時には衛星搭載ニッケル水素バッテリーの電力でS Cをオンとし、衛星分離後にR I G A等をオンとする。さらに、二液式推進系(B P S)を立ち上げる。太陽電池パドル展開を行い、次に太陽捕捉を行いソーラ電力の確保後に地球捕捉を行う。静止軌道への投入はアポジエンジンの噴射を熱制御の制約から4回に分けて行う。投入後には大型展開アンテナの展開を行う。

定常制御の構成は三軸姿勢レート計測にR I G A、ピッチ角、ロール角計測に地球センサ、ヨー角アップデートに精太陽センサ、アクチュ

エータとしてリアクションホイール4式を用いる。ホイールの蓄積各運動量はスラスタによりアンローディングを行う。

南北軌道制御はイオンエンジンにより昇交点と降交点で各一本を噴射する。東西軌道制御は22 Nスラスタを2台同時噴射する。

3. 統合化設計

衛星制御器S Cは宇宙用に開発された世界初の64ビット高速M P Uを搭載している。S Cの設計思想は姿勢制御機能、テレメトリ／コマンド処理機能、衛星管理機能（ヒータ管理、バッテリー管理、F D I R等）の3分野を高速大容量のO B Cで統合化して処理を行うものである。このメリットとして衛星全体での高信頼化、更には電力軽減、スペース節約、軽量化が図れる。

統合化O B Cの重要な成果は、姿勢制御系のアルゴリズム処理の高速化が得られることで計算遅れが緩和し、柔構造物を制御ループに含むE T S—Ⅷ姿勢制御系において位相制御の帯域を十分に確保できる点にある。図3にE T S—Ⅷ統合化設計の概念図を示す。

宇宙用64ビットM P U¹⁾の仕様は、M I P SⅢをアーキテクチャとし、C言語を用い、25 M H z、命令32ビット、データ64ビット、アドレス32ビット（仮想64ビット）、64ビット浮動小数点演算、8 k Bキャッシュメモリ（命令／データ）、8ビットE D A C、耐放射線100 r a d、耐ラッチアップ36 M e v / c m²、大容量1 Mゲートアレイ、C C S D S 100 Mゲートアレイ等から成る。

4. 柔構造物の安定化

4—1. 柔構造物

E T S—Ⅷ衛星バスは大型展開アンテナ二基及び大型太陽電池パドル二翼の柔構造物を搭載しているため、姿勢の安定化においてこれらの柔構造物と衛星本体との干渉対策が課題となる。

このような大型柔軟構造物は、世界的にも設計事例に乏しく、柔構造パラメータの同定技術はほとんど未踏の分野と目されている。実用性の高い構造数学モデルの作成も容易でなく、実寸モデルによる計測を行うにも、あまりにも大きく地上試験では重力の影響が除去できない。従って、現技術水準で最も確からしく同定され

た柔構造パラメータをベースに、マージンを加味した安定化制御アルゴリズムを構築することが必須となる。

E T S—Ⅷにおける柔構造物特性の同定アプローチとしては、N T T / S P A D Eのような大型構造物解析用プログラムを用いて大型展開アンテナおよび大型太陽電池パドルの柔構造モデルを作成し、柔構造パラメータ（共振モード周波数、カップリング係数、ダンピング係数等）を求め、並行して試作モデルの振動試験を実施し、モデルの合わせ込みを行い、再度パラメータを計算するという検証サイクルを繰り返した。この間、試作モデルは縮小、部分、フルサイズと進めてエンジニアリングモデルE Mが製作されている。姿勢制御系の設計マージンとしては、この検証上と軌道上のモード周波数が2～3割の公差（バラツキ）に収まることが前提となる。また、ダンピング係数は0. 0 0 5のオーダーと推測している。

並進力の柔構造物に対するリスクは、A D E O S—1のフレキシブル展開パドルの付け根破断不具合が重大な教訓となったところであり、柔構造設計に留意している。

大型展開アンテナは、アンテナ鏡面部（1 4モジュールによる放物面）、ブーム（アンテナのマストに相当、約9 m）、保持解放機構（打ち上げ用に鏡面部は筒状に重ねて折り畳み、ブームは二つ折りに重ね、上下2カ所の左右アームで抱えて保持し、軌道上でアームを開いて解放）から成る。L D Rの展開は静止軌道上3段階で行われ、まず同時にブームを展開し直線に伸ばす。次に、東西L D Rの保持解放機構を解放する。その後、一方のL D R鏡面部を展開（1時間程度）してから他方の鏡面を同じように展開する。これらの展開動作は緩やかなものとしL D R展開時の反動トルクはホイールで吸収する。

4-2. アルゴリズム

これまでのモード解析の結果によれば、E T S—Ⅷにおける柔構造物の固有振動数はかなり低く、一次の振動モードのオーダーとしては、大型展開アンテナが0. 1 H z、太陽電池パドルが0. 0 8 H zとなっている。従って、E T S—Ⅷ姿勢制御系は、モード周波数が低くダンピングの小さい領域には位相安定制御、モ

ード周波数が高くセンサ、アクチュエータ、演算等の位相遅れの大きい領域にはゲイン安定制御を採用する。

定常モードにおいては、大型展開アンテナの総合ポインティング精度約1度を維持する必要がある、ピッチ／ロール／ヨー姿勢精度0. 0 5 / 0. 0 5 / 0. 1 5度を達成する。この安定化のためには柔構造物との干渉を抑制する必要がある。ホイールは、大面積の大型展開アンテナ等が受ける太陽輻射圧による外乱を吸収するが、この他の擾乱として、例えば、日陰と日照との変わり目での熱衝撃がある。加えて、アンローディング時や東西制御時におけるスラスタのパルス噴射が柔構造物への擾乱源となる。なお、スラスタの駆動時には姿勢誤差を小さく押さえるため噴射パルスに先行してフィードフォワード角運動量をホイール制御ループに印加する。

対策として、S Cの高速演算により制御帯域を広く取り、クロスオーバー周波数（位相余裕ゼロ）以下では位相制御、以上では利得制御を行うことでモード周波数帯での干渉を抑制する。このとき、柔構造物のモーダル解析におけるカップリング係数が或るしきい値に収まるというインタフェース条件を満足するならば、スラスタ噴射等の柔構造物への擾乱は衛星の姿勢を乱すことに至らない安定領域が得られる。この観点に立ち、衛星本体とのカップリング係数インタフェース条件を柔構造物設計ガイドラインとして設定し、大型展開アンテナと太陽電池パドルの構造設計が行われている。モード周波数については2～3割の公差に収まることが目標となっている。図4に柔構造インタフェース条件の概念図を示す。図5に柔構造を有する姿勢制御系の安定性解析の一例を示す。

4-3. 軌道上柔構造特性同定実験

大型柔構造物は地上の重力環境での全系の組立および試験がほとんど不可能なため、全系の柔構造特性が取得できない。何とか部分的に得られるデータも機構そのものがすでに重力の影響下にあり、そこから軌道上の無重力環境での振る舞いを確度高く推定するのは容易でない。

このことから、もし軌道上で全系での柔構造特性が同定できれば、設計段階で見積もられた

柔構造特性の評価が可能となる。また、こうした実測パラメータに基づき制御系のチューニングも可能となる。さらには、設計値と実測値との対比や評価により柔構造設計の手法の画期的な発展への糸口が期待される。

上記の視点に立ち、E T S—Ⅷでは航空宇宙技術研究所と宇宙開発事業団の共同研究として軌道上システム同定実験²⁾を計画中であり、衛星運用上、危険性がなく、かつ効率的で、できる限り定常運用で実施可能な軌道上同定法について検討が重ねられている。例えば、定常制御中の姿勢のステップ応答時の姿勢角や姿勢レートから柔構造特性パラメータを同定するアルゴリズムの検討が行われている。

なお、この同定実験では、姿勢制御系からの姿勢角・姿勢レート、衛星本体搭載の3軸加速度計、大型展開アンテナ鏡面の支持マスト搭載の3軸加速度計、太陽電池パネル搭載の面内／面外加速度計からの加速度データ等のテレメトリデータを利用する運びである。

5. F D I R

姿勢制御系のF D I R（故障検知、分離、処置）オンボード機能としては、センサやアクチュエータのコンポーネントからのデータを定周期で診断し、不具合を検知したら、故障部分を判別・分離し、冗長系に切り換える等の処置を系統的にS Cの自動処理により行う。

故障の自動処理は3段階に分類し、レベル1はS Cが正常でS Cソフトウェアで検知可能なコンポーネント故障であり故障部分の分離と冗長系への切り換えで自動再構成でき姿勢再捕捉の必要のないもの、レベル2はS Cが異常で冗長系への切り換えと共に姿勢再捕捉が必要となるもの、レベル3はS C切り換えでは対応できない、もしくは姿勢再捕捉に失敗する不具合であり緊急に電力確保の太陽捕捉モードに移行し地上の指令を待つもの、に大別される。

S Cの自動切り換えにおいて、各コンポーネントのステータス（冗長二系統の識別）の受け渡しはセーフティメモリ（リレー）で行う。

S Cソフトウェアによる主なコンポーネント診断項目は、ジャイロ：変化率、レート差、姿勢角、地球センサ：変化率、精太陽センサ：変化率、ホイール：制御誤差、スラスト：ホイー

ル角運動量チェック、A E F 姿勢：制御誤差、等となる。

6. 再プログラム機能

異常検知及びセーフティ処置のF D I R機能で解消できない不具合に対して再プログラミング機能が設けてある。再プログラムは地上で設計／検証し実行が可能であることを確認した上で、プログラム内容をマグニチュードコマンドで送信しS CのR A M再プログラム領域（1 2 8 K B程度）に書き込み実行させる。

例として、万が一、ジャイロの不具合で姿勢レート情報が得られなくなる場合には、再プログラムによりバイアスモーメントによる姿勢安定制御（地球センサでピッチ、ロール角検知、精太陽センサでヨー角アップデート、ピッチ軸に定バイアス角運動量）に切り換えることが想定される。

また、柔構造物のモード周波数が軌道上で同定された場合には制御系のチューニングが可能となる。

7. まとめ

大型柔構造物を有するE T S—Ⅷの姿勢制御系は、地上で特定することが難しい柔構造パラメータに範囲を設けて柔構造物の設計側とのインタフェースをとるアプローチを採用し、高速演算M P Uにより安定制御の帯域を広げると共に、制御系のチューニングも可能な再プログラム機能を備えた。打ち上げ後に、E T S—Ⅷで計画中の柔構造パラメータの軌道上システム同定実験には新たな成果が期待される。

参考文献

- [1] 松田純夫、久保山智司、市川信一郎：高性能6 4ビットM P Uの開発とその制御系への応用、第4 5回宇宙科学技術連合講演会論文集、講演番号01-2A13（2001）
- [2] 山口功、葛西時雄、木田隆、兒子健一郎、池田正文、井川寛隆：技術試験衛星Ⅷ型による軌道上システム同定実験のための予備検討（その3）--ステップ応答時の同定--、第4 4回宇宙科学技術連合講演会論文集、講演番号00-1F13（2000）

表 1. E T S—Ⅷの概要

| 主要諸元 | | 概 要 |
|-----------------------------|-----------|---|
| 打上げ | 時期 | 平成16年度 夏期 |
| | 場所 | 種子島宇宙センター |
| | ロケット | H-IIAロケット (静止3トン級) |
| 構造 | 重量 | 打上げ時 約5800Kg 静止軌道上初期 約2800Kg (うちパッシブ系 1100Kg) |
| | 形状 | 箱形構体の上部に給電部のアンテナタワーを設置 |
| 軌道 | | 静止軌道 東経146度 (暫定) 静止軌道投入 二液式 490N アポジエンジン |
| 設計寿命 | | 衛星バス系 10年 ミッション系 3年 |
| 姿勢制御 | 定常制御 | リアクションホイール (50Nm、4軸) を用いた三軸姿勢制御 (位相・利得制御併用による系構造物の共振抑制) |
| | 軌道制御 | 姿勢精度: ロール・ピッチ $\pm 0.05^\circ$ ヨ $\pm 0.15^\circ$ 東西制御: 二液式 22N スラスター 2x2 南北制御: 25 mN級イオンエンジン 2x2 |
| 発生電力 | | 約7.5kw (3年後夏至)、100 V安定化バス |
| 太陽電池パドル | | ハムボルトリチウム電池4枚2翼、縦折り収納 Si-NRS/BSF |
| 構体 | | ハムボルトリチウム電池 3段ジョイント構成 (バネ、バネ、推進系)、中央円筒式 (推進系・酸化剤タンク上下2段) |
| 熱制御 | | バネ・モジュール・南北連結ヒートパイプ搭載 |
| 化学推進系 | | 完全二液式 (MMH/MON3) AKB(1)、AKB(2) 22N (12) |
| データ・コマンド | | Sバンド、ノックアウト伝送 (CCSDS) |
| アンテナ・インテグ | | 総合精度 1 度以下 |
| ミッ シ ヨ ン 機 器 | 大型展開アンテナ | S帯アクティブアレイ (19mx17m) 2面、モジュール構成方式展開方式、モジュール数14、オフセット51.2度、アンテナ支持アーム、鏡面金メッキアルミニウム、面精度2.4mmRMS |
| | 高精度時刻基準装置 | S、L 2周波の測位・時刻比較装置、セシウム原子時計、1.1mバネアンテナ、S帯波導伝送線路実験バネ |
| | フィーダリンク装置 | 移動体通信・放送等のKa 帯バネリンク回路 (周波数 30/20GHz、0.8mバネバネ) |
| | 打上げ環境調整装置 | デジタリカルバネ展開、アンテナ展開の調整、加減速調整: 打上げ環境及び系構造バネの同定 |
| | 展開ジョーク | ヒートパイプ埋込みバネ0.4mx3mの展開状態試験 |

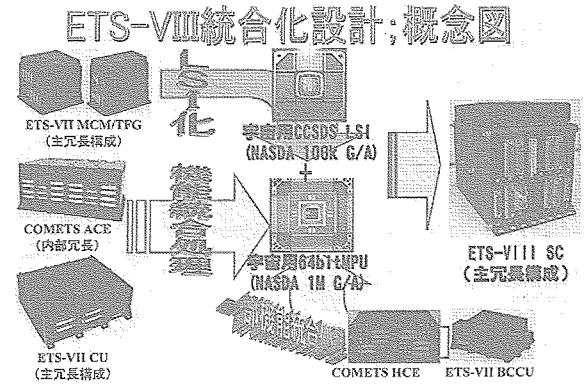


図 3. E T S—Ⅷ統合化設計の概念図

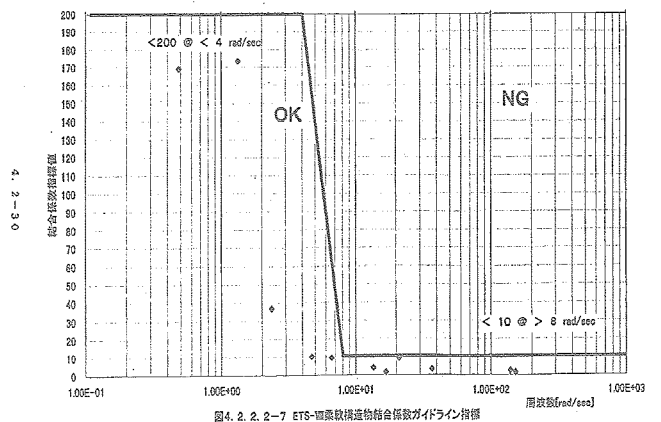


図 4. 柔軟構造インタフェース条件

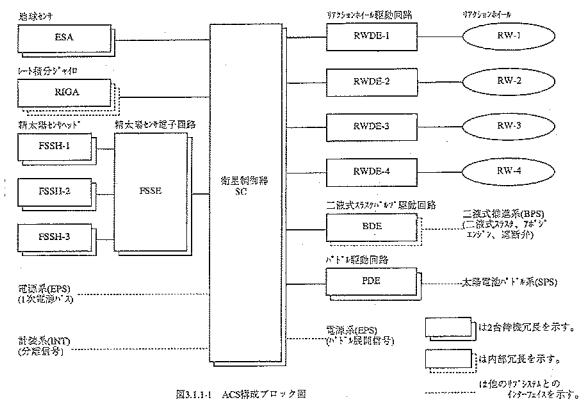


図 2. E T S—Ⅷ姿勢制御系のブロック図

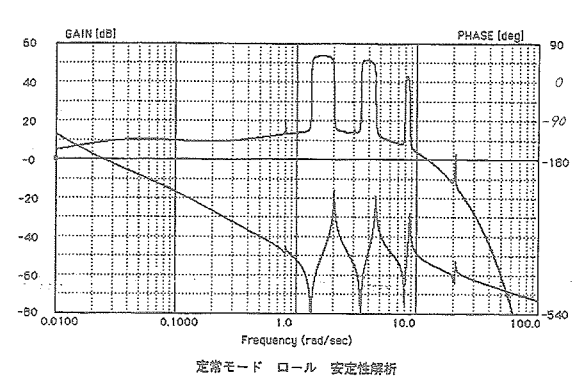


図 5. 柔軟構造を有する姿勢制御系の安定性解析

略語一覧

- AEF: Apogee Engine Firing
- BPS: Bipropellant Propulsion System
- FDIR: Failure Detection, Isolation & Reorganization
- LDR: Large Deployable Reflector
- MPU: Micro-Processor Unit
- MIPS: Mega Instruction Per Second

- OBC: On-Board Computer
- RIGA: Rate Integrating Gyro Assembly
- SC: Satellite Controller
- SPS: Solar Array Paddle System
- TDG: Tuned Dry Gyro

擾乱管理手法の検討～SELENE を例に

2002 年 3 月 12 日

NEC 東芝スペースシステム (株)

制御システム開発部 神谷 俊夫

概要

本検討で取り上げる衛星の擾乱管理とは、指向安定度ミッション要求を実現するための衛星内部の振動擾乱管理のことであり、衛星の指向安定度検討と対をなすものである。

本検討では SELENE で行っている擾乱管理手法を例に、理論の説明、手法の注意点などを示すこととする。

従来の方式では、観測機器からの指向安定度要求を等価的に周波数毎の擾乱トルクの許容振幅として、内部擾乱源から発生される擾乱トルクの管理を行っていることが多いが、この管理手法は本質的には単一周波数の正弦波擾乱しか管理できないという問題点があった。

SELENE では、衛星全体を柔軟衛星として定式化し、固有振動数の設計マージンまで考慮した共振倍率設定を行った上で、時間領域において衛星の相対的な指向変動の合計を見るという、全擾乱源に対し総合的かつ詳細な管理がグラフ上で行えるような擾乱管理手法を構築した。

そもそも、指向への影響を考えると以下のキーワードが擾乱管理の上で大変重要であるので、簡単な説明を以下に示す（一般的解釈とあっているかは未確認）。

- ・ 擾乱： 衛星の指向に影響を及ぼす力又はトルクの総称。
- ・ 内部擾乱： 擾乱のなかで発生源が衛星内部であるもの。
- ・ 内部擾乱源： それ自身が力又はトルクを発生する衛星内部の機器。
- ・ 外乱： 擾乱のなかで発生源が衛星外部であるもの。自然外乱、スラスト外乱などがあり、スラスト外乱は上記の内部擾乱ともいえるが一般にスラスト噴射は観測フェーズではあまり実施しないので擾乱管理対象にはしないことが多い。また自然外乱は周期が長いため（SELENE では月一周回（118 分）周期）AOCS の姿勢制御により指向安定度への影響は十分抑制され他の擾乱に比べ影響は小さい。
- ・ 剛体： 柔軟性をもたない（力により変形しない）物体。
- ・ 柔軟物： 柔軟性をもつ（力により変形する）物体。周波数毎に挙動が変化することが剛体と異なる点。それ自身は力は発生しないので擾乱源ではないが、外部から加わる力の波の周波数が柔軟物の固有振動数に近い場合、柔軟物の固有振動が励起され「外部から柔軟物へ加わる力」＜「柔軟物が外部へ及ぼす力」となりうるため擾乱の増幅源となりうる。力学的なモデリング上は太陽電池パドルなどの柔軟物もスロッシングなどの推奨モデルも同じ柔軟物として扱う。
- ・ 固有振動数： 物体の材質、形状と拘束条件により求められる柔軟物固有の共振周波数。モードと

もいう。固有振動数より十分低い周波数の力に対して柔軟物はほぼ剛体とみなした場合と同じ挙動を示し、固有振動数より十分高い周波数の力に対してはそのモードに対する有効質量分が慣性系に対して運動しなくなるため有効質量分は存在しないこととほぼ等しくなる。一般に柔軟物は理想的には無限個の固有振動数をもつ分布定数系であるが、力学的なモデリングでは便宜上有限個の固有振動数をもつ系で近似して扱う。一般に低次モード（低い周波数の固有振動）ほど有効質量が大きく（つまり振動が励起しやすく）高次になるほど有効質量が小さい（つまり振動が励起しにくい）ため高次モードほど影響は小さいと考えて良い。

擾乱管理を行うための必要な管理項目を明らかにするため、各周波数領域に存在する指向安定度への影響要因などを模式的に表す。

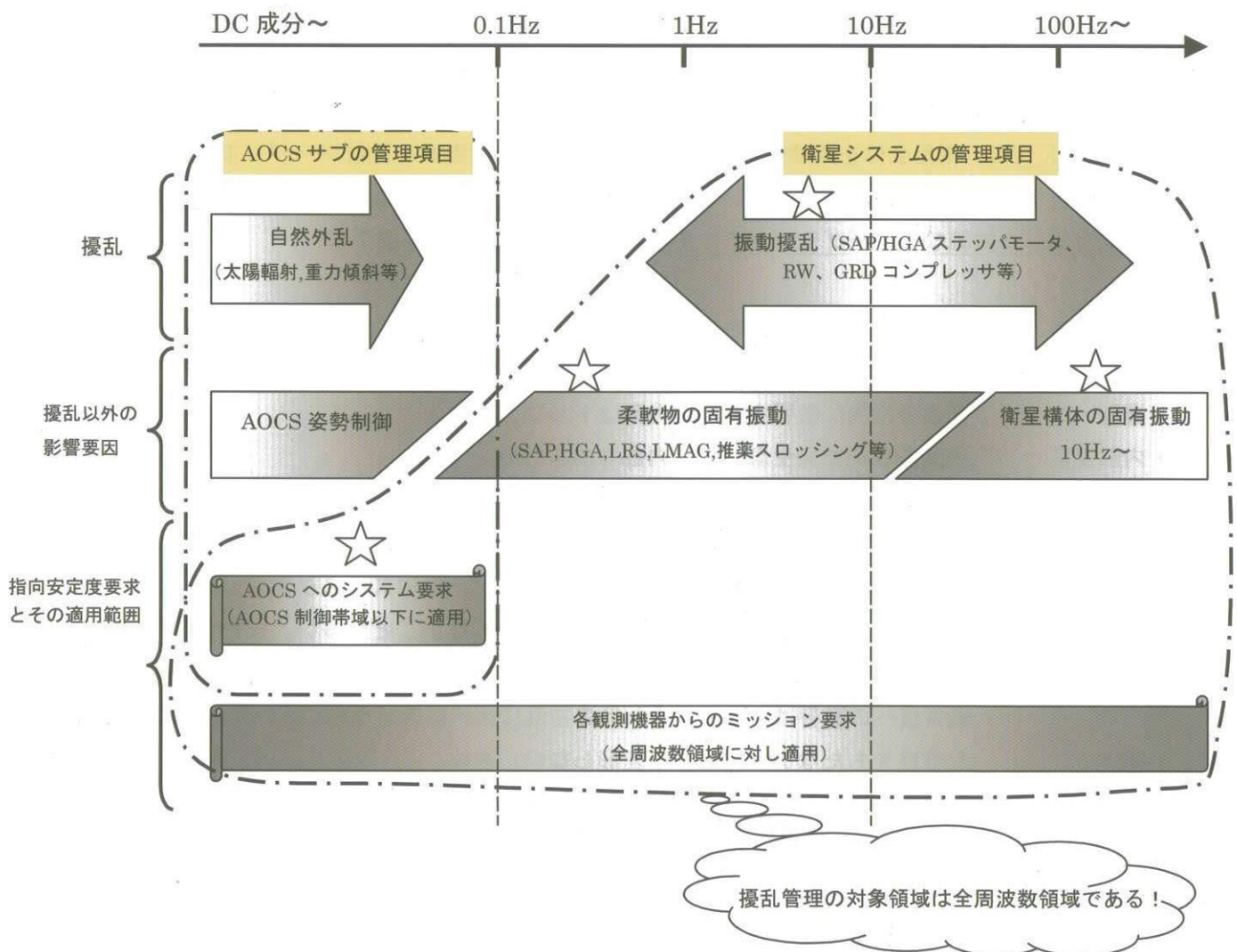


図1 指向安定度要求と各影響要因の周波数分布 (SELENE)

図 1 に示した各要因を総合評価して擾乱管理を遂行せねばならない。ただし SELENE の場合、高周波擾乱を適用外として AOCS の制御帯域以下の長い時定数をもつ影響要因（自然外乱など）にのみ適用される AOCS サブシステムへのシステム要求（ 0.003deg/sec ）が別途明示されている。従って、衛星システムとしての擾乱管理においては、AOCS 制御帯域以下の長い周期の指向安定度は全てシステム要求 0.003deg/sec 相当分に含まれるものとして評価できるため、周期の長い自然外乱などは直接管理する必要はない。直接の管理対象となるのは☆印のついた振動擾乱と構造特性となる。つまり、指向安定度ミッション要求を満たすべく☆のついた項目を総合管理するのが衛星システムの擾乱管理であるといえる。

1. 指向安定度と指向変動との関係

一般に人工衛星の指向制御性能を示すパラメータとしては、①指向制御精度、②指向安定度、③指向決定精度の3つが重要なパラメータとして挙げられる。①、③は一般に角度の次元で定義されるが、②は基本的にはある時間当たりの変動角（つまり、広義には角速度）の次元で定義されるものの各ミッション毎にその定義は曖昧である。本章では指向安定度と指向変動との関係を明らかにすることにより指向安定度の定義をより明確にすることを目的とする。

撮像ミッション等の取得される画像のぶれが問われるミッションからの指向要求として、「ある時間Tの間の相対的な指向変動が $\Delta\theta$ (0-p) 以内であること」があるが、このような指向要求を指向安定度要求と呼び、「ある時間Tの間の相対的な指向変動 $\Delta\theta$ (0-p)」を指向安定度と呼ぶこととする。次に指向安定度と指向誤差との関係を以下で明らかにする。

まず簡単のため、指向誤差 θ が振幅 a (>0) の単一周波数 ω [rad/sec]の正弦波で次式のように表されると仮定する。

$$\theta(t) = a \sin(\omega t) \quad \text{式 1-1}$$

すると、ある時間Tの間の指向安定度 $\Delta\theta$ (0-p) は次のようになる。

$$\Delta\theta = \text{Max} |\theta(t+\tau) - \theta(t)| / 2 \quad (\text{ただし、}\tau \in [0, T]) \quad \text{式 1-2}$$

これを解くことによって、次を得る。

$$\Delta\theta = \begin{cases} a \sin(\omega T/2) & \left(T < \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\omega} \text{ のとき} \rightarrow \omega < \frac{\pi}{T} \text{ のとき} \right) \\ a & \left(T \geq \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\omega} \text{ のとき} \rightarrow \omega \geq \frac{\pi}{T} \text{ のとき} \right) \end{cases} \quad \text{式 1-3}$$

したがって、指向安定度要求「ある時間Tの間の相対的な指向変動 $\Delta\theta$ (0-p) 以内であること」は指向誤差 θ が振幅 a の単一周波数 ω の正弦波で表せるならば次の要求と等価である。

$$a \leq \begin{cases} \Delta\theta / \sin(\omega T/2) & \left(\omega < \frac{\pi}{T} \text{ のとき} \right) \\ \Delta\theta & \left(\omega \geq \frac{\pi}{T} \text{ のとき} \right) \end{cases} \quad \text{式 1-4}$$

SELENEの観測機器からの指向要求一覧を表1-1に示す。表1-1の指向安定度要求を使い周波数 ω と振幅 a の関係を示したのが図1-1である。

$\omega T \ll 1$ の時、図1-1の折れ線のような近似線が引け、式1-4は次のように書ける。

$$a \leq \begin{cases} 2\Delta\theta / (\omega T) & \left(\omega < \frac{2}{T} \text{ のとき} \right) \\ \Delta\theta & \left(\omega \geq \frac{2}{T} \text{ のとき} \right) \end{cases} \quad \text{式 1-5}$$

$\text{max} |\theta| = a$, $\text{max} |d\theta/dt| = a\omega$ の関係から式1-5を書き換えると次のように

なる。

$$\begin{cases} |\dot{\theta}| \leq 2\Delta\theta/T & \left(\omega < \frac{2}{T} \text{ のとき} \right) \\ |\theta| < \Delta\theta & \left(\omega \geq \frac{2}{T} \text{ のとき} \right) \end{cases}$$

式 1-6

以上により、指向安定度要求は本質的には $\omega = 2/T$ [rad/sec]（即ち $f = 1/(\pi T)$ [Hz]）を境界周波数として、それより低周波では指向レートの、それより高周波では指向角度振幅の要求になっていることが分かり、したがって、指向変動が図 1-1「指向安定度要求を用いた周波数領域での指向角度振幅規定」の下側の包絡線を越えない指向角度振幅と単一周波数をもつ正弦波であるとき、指向変動は指向安定度要求を満たすことがいえる。

<参考>

もし、要求が「ある時間 T の間の相対的な指向変動 $\Delta\theta$ (p-p) 以内であること」ならば、 $\Delta\theta$ は次のように書け、

$$\Delta\theta = \begin{cases} 2a \sin(\omega T/2) & \left(T < \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\omega} \text{ のとき} \rightarrow \omega < \frac{\pi}{T} \text{ のとき} \right) \\ 2a & \left(T \geq \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\omega} \text{ のとき} \rightarrow \omega \geq \frac{\pi}{T} \text{ のとき} \right) \end{cases}$$

式 1-3'

式 1-4、式 1-5 は次のようになる。

$$a \leq \begin{cases} \Delta\theta / (2\sin(\omega T/2)) & \left(\omega < \frac{\pi}{T} \text{ のとき} \right) \\ \Delta\theta / 2 & \left(\omega \geq \frac{\pi}{T} \text{ のとき} \right) \end{cases}$$

式 1-4'

$$a \leq \begin{cases} \Delta\theta / (\omega T) & \left(\omega < \frac{2}{T} \text{ のとき} \right) \\ \Delta\theta / 2 & \left(\omega \geq \frac{2}{T} \text{ のとき} \right) \end{cases}$$

式 1-5'

表 1 - 1 SELENE の指向要求一覧

| 項目 | | 機器 | 軸 | 要求値 |
|--------------------|-----------|-----------|--|---|
| 指向制御精度 | | LISM (SP) | SP のクオストラック方向 | 0. 14deg (0-p) |
| | | XRS | ロール軸 | 0. 15deg (0-p) |
| | | | ピッチ軸 | 0. 15deg (0-p) |
| | | | ヨー軸 | 0. 15deg (0-p) |
| 指向安定度 [p-p] | 短周期 | LISM (TC) | ロール軸 | $2.7 \times 10^{-6} \text{rad}/6.5 \text{msec}$ |
| | | | ピッチ軸 | $2.7 \times 10^{-6} \text{rad}/6.5 \text{msec}$ |
| | | | ヨー軸 | $2.7 \times 10^{-6} \text{rad}/6.5 \text{msec}$ |
| | 短周期 | LISM (MI) | ロール軸 | $5.7 \times 10^{-6} \text{rad}/13 \text{msec}$ |
| | | | ピッチ軸 | $5.7 \times 10^{-6} \text{rad}/13 \text{msec}$ |
| | | | ヨー軸 | $5.7 \times 10^{-6} \text{rad}/13 \text{msec}$ |
| | 短周期 | LISM (SP) | ロール軸 | $1.4 \times 10^{-4} \text{rad}/91 \text{msec}$ |
| | | | ピッチ軸 | $1.4 \times 10^{-4} \text{rad}/91 \text{msec}$ |
| | | | ヨー軸 | $1.4 \times 10^{-4} \text{rad}/91 \text{msec}$ |
| | 中周期 | UPI | ロール軸 | 0. 015deg/sec |
| | | | ピッチ軸 | 0. 015deg/sec |
| | | | ヨー軸 | 0. 015deg/sec |
| | 中周期 | LMAG | ロール軸 | 0. 1deg/sec |
| | | | ピッチ軸 | 0. 1deg/sec |
| | | | ヨー軸 | 0. 1deg/sec |
| | 中周期 | LISM (TC) | ロール軸 | $2.9 \times 10^{-3} \text{rad}/40 \text{sec}$ |
| | | | ピッチ軸 | --- |
| | | | ヨー軸 | $2.9 \times 10^{-3} \text{rad}/40 \text{sec}$ |
| 長周期 | LISM (TC) | ロール軸 | $2.9 \times 10^{-3} \text{rad}/118 \text{min}$ | |
| | | ピッチ軸 | --- | |
| | | ヨー軸 | $2.9 \times 10^{-3} \text{rad}/118 \text{min}$ | |
| 指向決定精度 [3σ、慣性系] | | XRS | ロール軸 | 0. 03deg |
| | | | ピッチ軸 | 0. 03deg |
| | | | ヨー軸 | 0. 03deg |

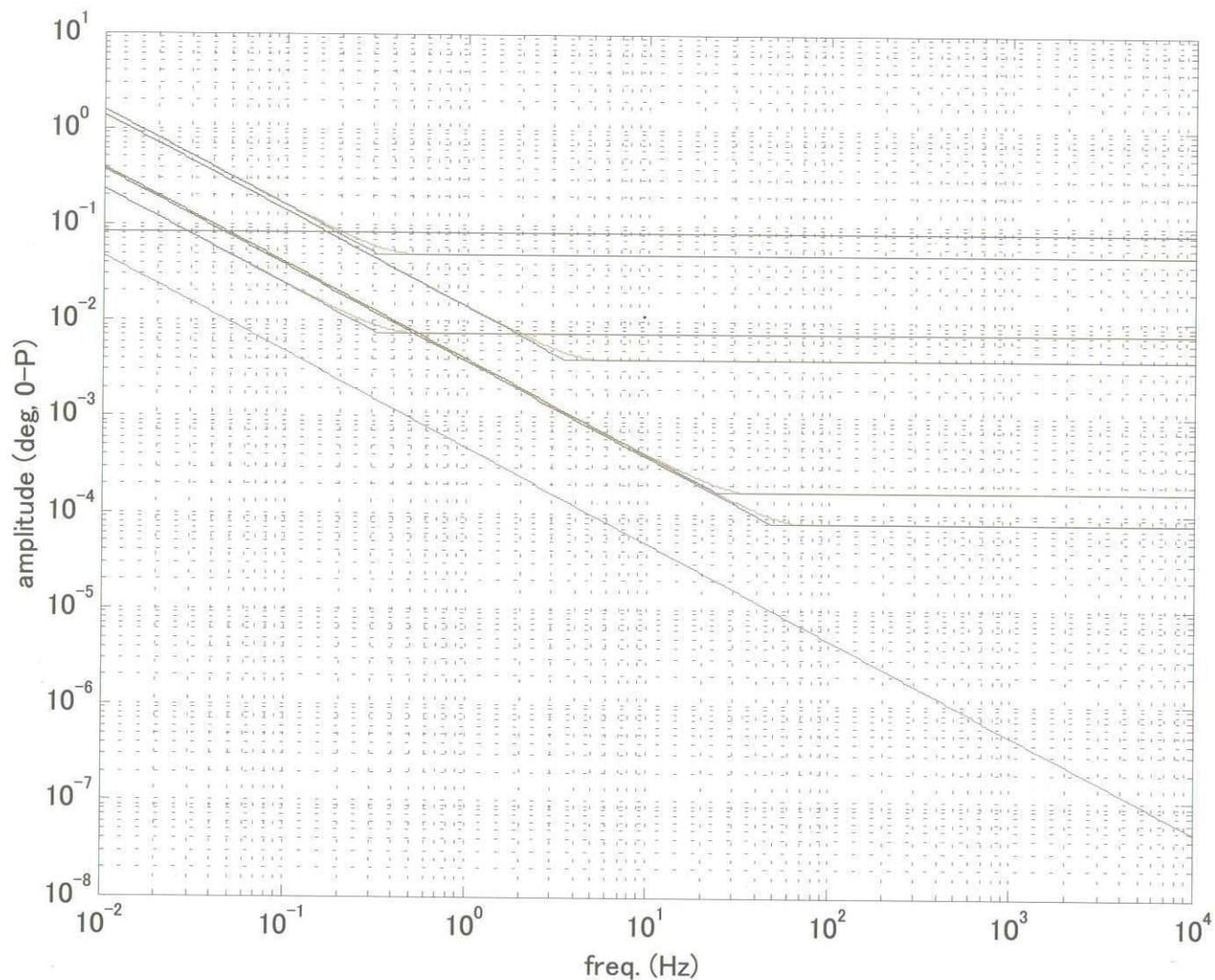


図 1-1 指向安定度要求を満たす許容指向角度振幅規定 (SELENE)

2. 指向変動と擾乱振幅との関係

剛体が振幅 a 、単一周波数 ω の正弦波で振動するために必要なトルク τ のトルク振幅 $\max |\tau|$ は、剛体の指向角を θ とすると以下ようになる。

$$\theta(t) = a \sin(\omega t) \quad \text{式 2-1}$$

$$\begin{aligned} \max |\tau(t)| &= \max |I d^2 \theta / dt^2| \\ &= \max (I \omega^2 |\theta|) \\ &= I \omega^2 a \quad (I: \text{慣性能率}) \end{aligned} \quad \text{式 2-2}$$

図 1-1 「指向安定度要求を用いた周波数領域での指向角度振幅規定」で規定した指向角度振幅 a 、周波数 ω の関係を式 2-2 に代入することにより、剛体が単一周波数の正弦波で振動すると仮定したときの指向安定度要求を満たすための擾乱トルク振幅許容ライン（周波数－トルク振幅関係）が引ける。許容ラインの下側の包絡線が剛体が全ての指向安定度要求を満たすための許容トルクラインである。

以上の手順により剛体近似した衛星に対して指向安定度要求を満たすための内部擾乱トルクの許容ラインが引けるが、あくまで剛体近似かつ単一正弦波での振動を仮定しているので扱いに注意が必要である。

SELENE では以下の点を考慮して上記の許容ラインを求めた。

1. 問題となる内部擾乱トルクは数 Hz 以上の周波数成分が主であり、この場合 10Hz 以下の低い一次固有振動数をもつ柔軟物は振動がほとんど励起されない（ないものとほぼ等しい）ことを想定して、慣性能率 I は 10Hz 以下の一次固有振動数をもつ柔軟物（SAP,HGA,LRS,LMAG）及び燃料を取り除いた値を用いた。
2. 柔軟物または構体パネルによる振動の励起を加味するために、全周波数域に渡り一律 20 倍の共振倍率 Q を採用した。

<ここで用いた共振倍率 Q とは>

10Hz 以下の一次固有振動数をもつ柔軟物を除く衛星全体が剛体として振動した時の入力トルクと衛星本体の振動の関係を共振倍率 1 倍とし、何らかのモードの励起により本体と逆位相の柔軟物の励振が生じることで、慣性空間で見ると本体の振動振幅が増幅されることがあるが、この増幅率を共振倍率 Q としている。共振倍率 Q は一般に周波数 ω の関数 $Q(\omega)$ である。

この共振倍率 Q の考えを取り込むと式 2-2 は次式となる。

$$\max |\tau(t)| = I \omega^2 a / Q \quad (I: \text{共振倍率 1 倍に相当する慣性能率をもつ剛体}) \quad \text{式 2-3}$$

図 2-1、図 2-2、図 2-3 に SELENE の初期検討結果として内部擾乱トルク振幅の許容ラインを示す（○□△などのプロットは別途解析または実測した内部擾乱トルクである）。黒の実線が許容ラインである。

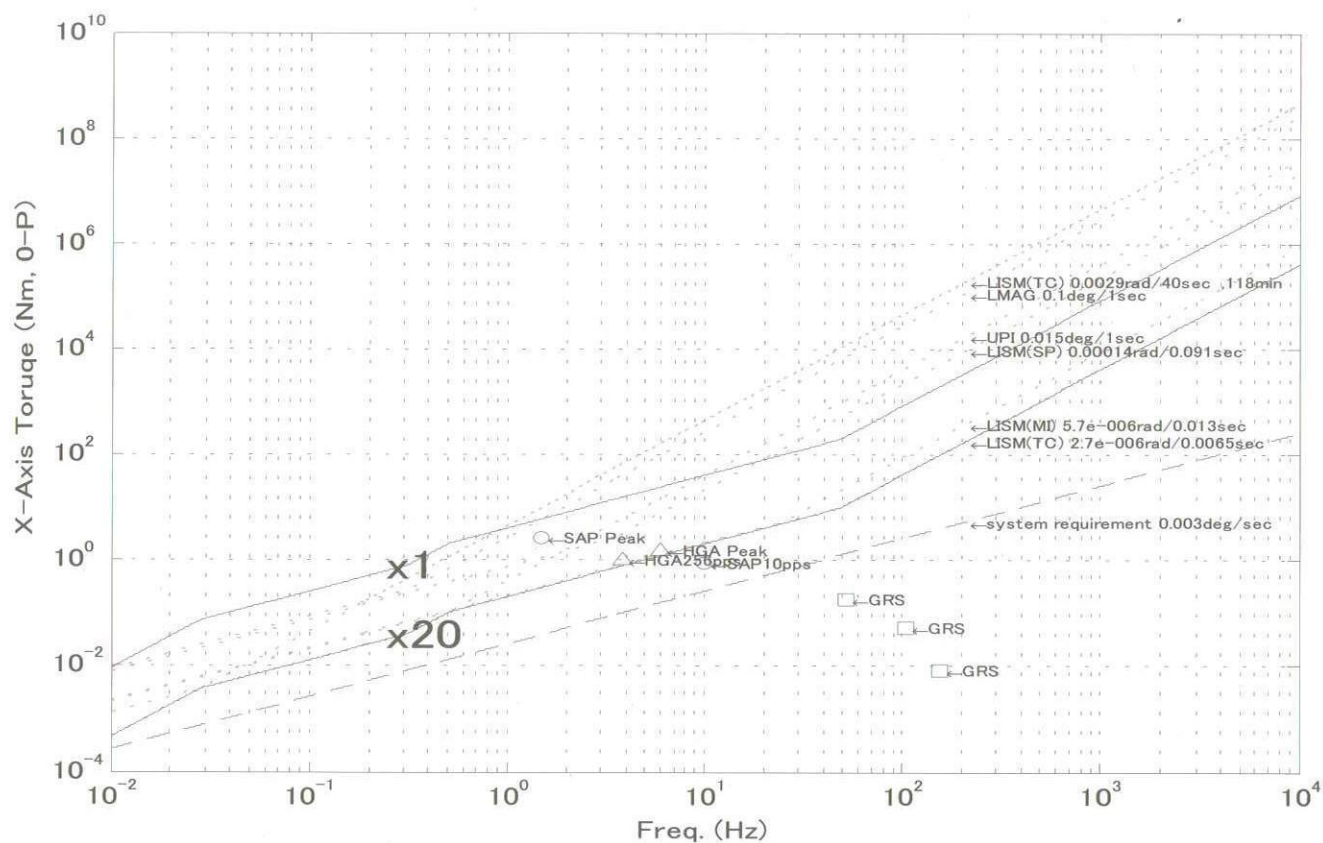


図 2-1 指向安定度要求を満たす許容擾乱トルク振幅規定 (SELENE、X 軸)

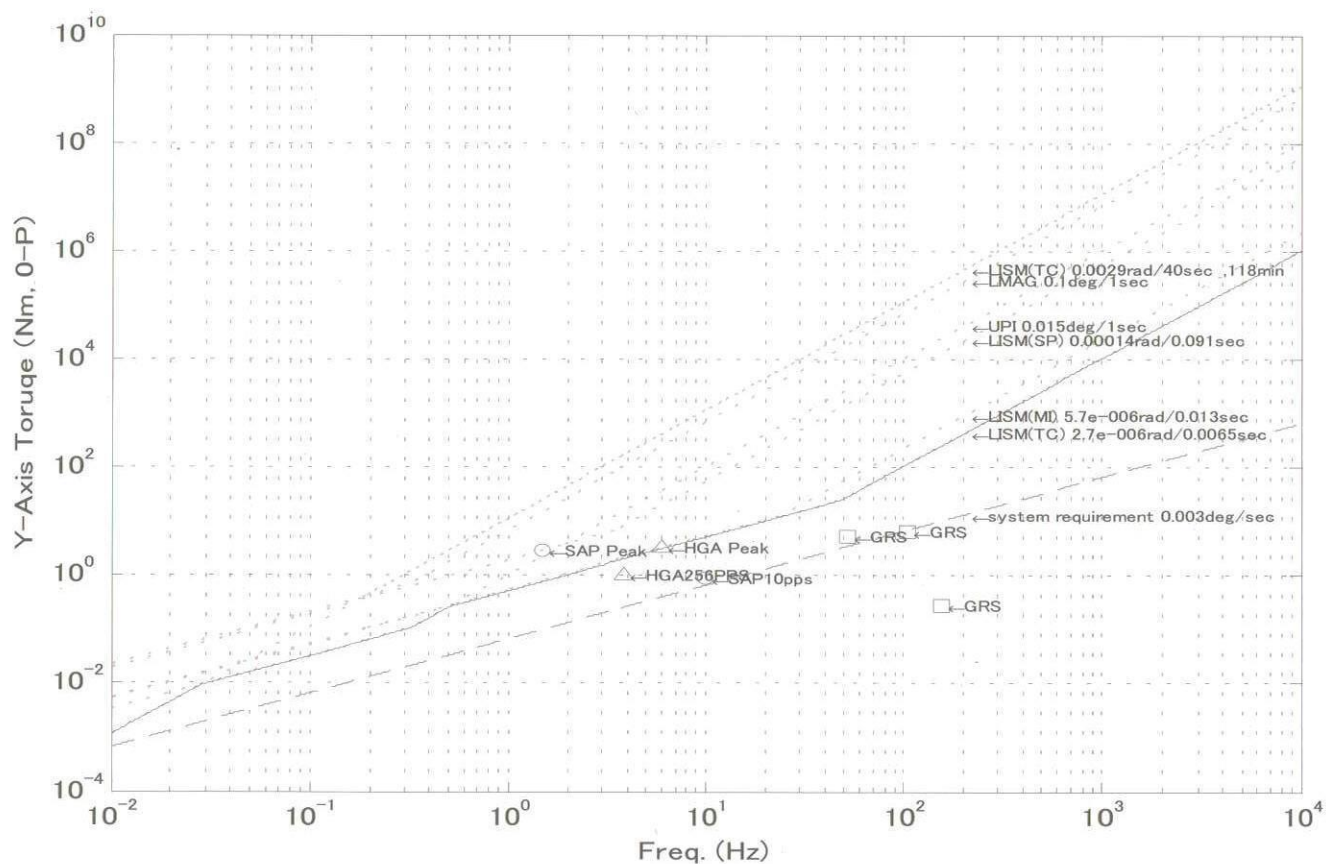


図 2-2 指向安定度要求を満たす許容擾乱トルク振幅規定 (SELENE、Y 軸)

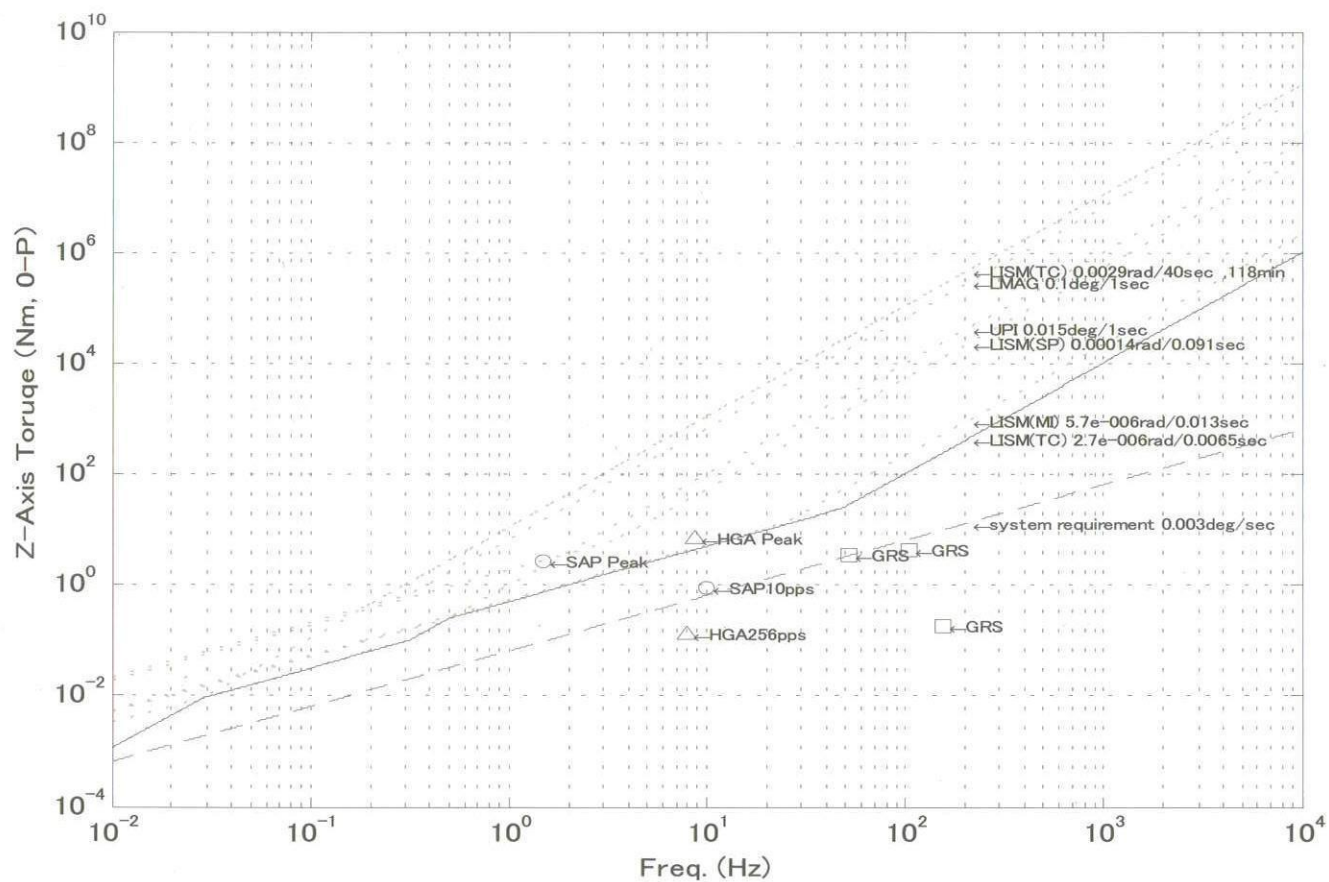


図 2-3 指向安定度要求を満たす許容擾乱トルク振幅規定 (SELENE、Z 軸)

3. 柔軟物を考慮した共振倍率 Q の規定

2章で仮定した「共振倍率全域一律」の条件は、「衛星が全周波数域に渡り何らかの固有振動を有する系である（どの周波数でも必ず構造共振が起こる）」と仮定するのと等価な非現実的で厳しい条件であるため、共振倍率全域一律の条件を以下のように見直すことにより、現実の柔軟衛星ダイナミクスモデルに則した共振倍率 Q の規定を行う。

- ・ 構体の一次モードは SELENE では 11Hz～12Hz（ロケット I/F 要求 10Hz 以上）
- ・ 構体の高次モードの固有振動数は（精度の高い）解析が困難

という理由から、可能な範囲で極力現実の柔軟衛星モデルに近づけるために共振倍率 Q を以下のように規定する。

- ・ 10Hz 以下 : 共振倍率 Q を柔軟衛星ダイナミクスモデルから規定
- ・ 10Hz（構体一次モード）以上 : 共振倍率 Q = 20

まず、柔軟物の柔軟特性から共振倍率 Q を規定するために、付属物モード法により衛星全体を柔軟衛星の free-free モデルとして定式化を行う。詳細は省くが、衛星全体を剛体と考えた剛体モード M と剛体モードに対し相対的な柔軟性を有する柔軟物 m_i に分けて以下のように定式化を行う。

各柔軟物を 1 自由度系と仮定すると、衛星全体の重心の慣性系に対する剛体モード変位 X 、 θ と剛体モードに対する柔軟物 i の相対変位 x_i 、 ψ_i を使い、衛星全体の並進、回転、弾性変形に対する運動方程式が次式のように書ける。

各柔軟物を 1 自由度系と仮定したときの運動方程式

$$\begin{cases} \text{全機並進: } M\ddot{X} + \sum_i m_i \ddot{x}_i = F \\ \text{全機回転: } I\ddot{\theta} + \sum_i I_i \ddot{\psi}_i = N \\ \text{弾性変形: } m_i (\ddot{x}_i + \ddot{X} + \ddot{\theta} \times l_i) + 2\xi_i \sqrt{m_i k_i} \dot{x}_i + k_i x_i = F_i \quad (i=1,2,\dots : \text{柔軟物 No.}) \end{cases}$$

式 3-1

ここで、

M : 衛星全体の質量

m_i : 柔軟物 i の質量

x_i : 柔軟物 i の重心の剛体モード変位に対する相対並進変位 @機体系

ψ_i : 柔軟物 i の重心の剛体モード変位に対する相対回転変位 @機体系

X : 衛星重心の並進変位 @時々刻々の機体系に平行な慣性系（原点：全機重心）

θ : 衛星重心の回転変位 @時々刻々の機体系に平行な慣性系

F : 衛星全体に加わる外力 @時々刻々の機体系に平行な慣性系

N : 衛星重心回りに加わるトルク @時々刻々の機体系に平行な慣性系

F_i : 柔軟物 i に加わる外力 @時々刻々の機体系に平行な慣性系

l_i : 衛星重心から柔軟物 i の重心までの距離ベクトル @機体系

k_i : 柔軟物 i のバネ定数

ξ_i : 柔軟物 i の減衰比

である。ただし弾性変形の方程式で、衛星本体の回転による円心方向の慣性力の項

$m_i((d\theta/dt) \times ((d\theta/dt) \times l_i))$ 及びコリオリ力の項 $2(d\theta/dt) \times (dl_i/dt)_B$ は式が非線形になること及び3軸衛星においては微小項であるという理由からここ（及び解析）では無視する。

次に柔軟物 i の相対変位 x_i を以下のように級数展開（モード展開）する。

$$x_i = \sum_n \phi_{in}(r) \eta_{in}(t) \quad (n=1,2,\dots : \text{モードNo.}, r: \text{柔軟物の根本からの距離})$$

式 3-2

ここで、 ϕ_{in} はモード形状（固有関数ベクトル）、 η_{in} はモード振幅（モード変位）と呼ばれる。

式 3-2 を式 3-1 に代入し柔軟物をモード展開し、 ϕ_{in} をマスメートルの正規化条件で式変形すると、次式を得る。

各柔軟物をモード展開したハイブリッドシステムの運動方程式

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{全機並進: } M\ddot{X} + \sum_i \left\{ \sum_n g_{in} \ddot{\eta}_{in} \right\} = F \\ \text{全機回転: } I\ddot{\theta} + \sum_i \left\{ \sum_n (h_{in} + a_i \times g_{in}) \ddot{\eta}_{in} \right\} = N \\ \text{弾性変形: } \ddot{\eta}_{in} + 2\xi_i \omega_{in} \dot{\eta}_{in} + \omega_{in}^2 \eta_{in} + g_{in}^T \ddot{X} + (h_{in} + a_i \times g_{in})^T \ddot{\theta}_{in} = \int_r \phi_{in}^T F_i dr^3 \\ (i=1,2,\dots : \text{柔軟物No.}, n=1,2,\dots : \text{モードNo.}) \end{array} \right.$$

式 3-3

ここで、

a_i : 衛星重心から柔軟物 i の取り付け点までの距離ベクトル

$g_{in} = \int_r \phi_{in} \rho_i dr^3$: 柔軟物 i の n 次の並進結合係数

$h_{in} = \int_r r \times \phi_{in} \rho_i dr^3$: 柔軟物 i の n 次の回転結合係数

ρ_i : 柔軟物 i の質量密度

である。

以上のように、柔軟構造を有する衛星全体を柔軟モード変位と剛体モード変位が混在する「ハイブリッドシステム」として扱い、付属物モード法により free-free モデルとして定式化したものが式 3-3 である。

式 3-3 において、「入力をトルク N 、出力を剛体モードの発生トルク $I d\theta^2/dt^2$ とする入出力関係」が共振倍率 Q であり、共振倍率 Q を周波数応答解析により算出したものが図 3-1、図 3-2 である。つまり図 3-2 が構体パネル面上で発生した擾乱トルクが柔軟物により何倍になるかを規定した共振倍率 Q を表す。

<共振倍率について> (SELENE の場合)

・ 10 Hz 以下においては、構体の一次モード以下のため、構体自体の共振はなく柔軟物の共振による本体の反共振だけを考える。柔軟物を含む衛星全体が剛体として振動した時の入力トルクと衛星本体の振動の関係を共振倍率 1 倍とし、柔軟モードの励起により本体と逆位相の柔軟物の励振が生じることで、慣性空間で見ると本体の振動振幅が増幅されたり、もしくは本体と同位相の柔軟物の励振が生じることで、本体の振動振幅が減衰されたりするが、この増幅率または減衰率を共振倍率 Q としている。(図 3-2)

・ 10 Hz より高い周波数においては、SAP,HGA,LRS,LMAG,燃料らの柔軟物は高次モードに達し、つまり近似的には SAP,HGA,LRS,LMAG,燃料を除く衛星本体だけに対し、運動方程式は成り立つといえることから、SAP,HGA,LRS,LMAG,燃料を除く衛星本体が剛体として振動した時の入出力関係を共振倍率 1 倍とし、構体自体の共振による出力の増減率を共振倍率 Q としている。(SELENE では一律 20 倍を採用)

この共振倍率 Q を用いて、指向安定度要求を満たす許容擾乱トルク振幅を規定し直したものが図 3-3 ~ 図 3-5 である。黒の実線が許容ラインである。これにより、構体の一次モード以下の周波数領域における共振倍率 Q の規定は主要な柔軟物が考慮された現実の柔軟衛星ダイナミクスモデルに則した値となった。

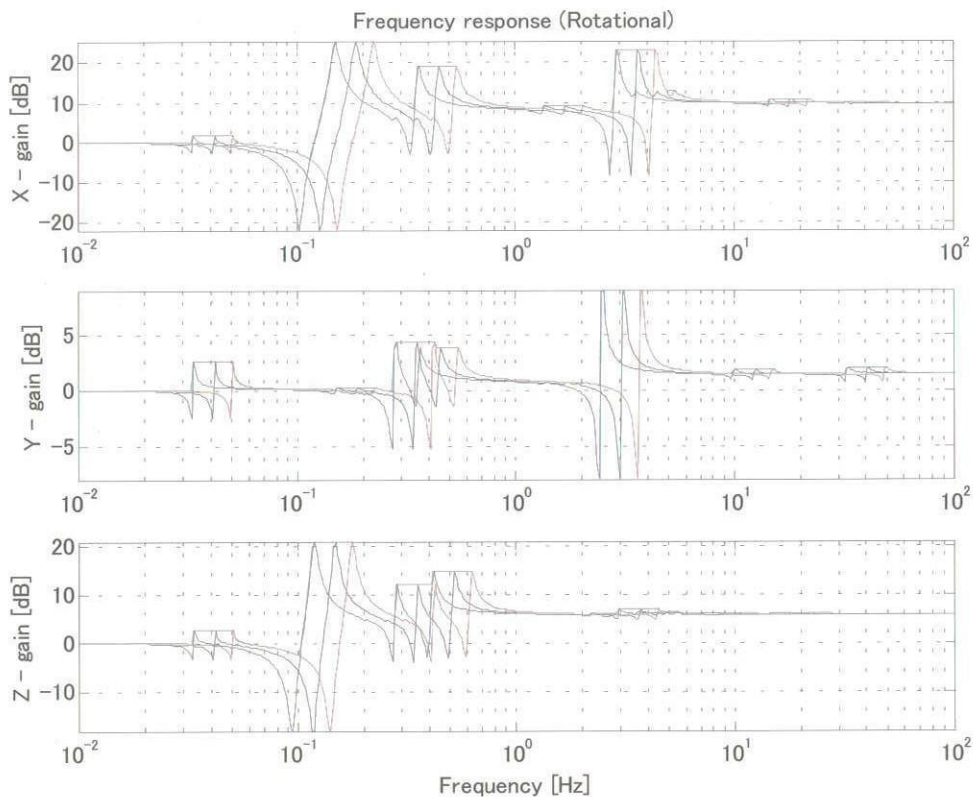


図3-1 共振倍率 $Q(\omega)$ (SELENE、固有振動数マージン 20%、SAP 角=90deg)
 (黒線:ミナル値、赤線:ミナル+20%、青線:ミナル-20%、緑線:マージン $\pm 20\%$ の最大包絡線)
 ↓SAP 角 0,90,180,270deg に対する上図の緑線の最大包絡線を取ったらこうなる

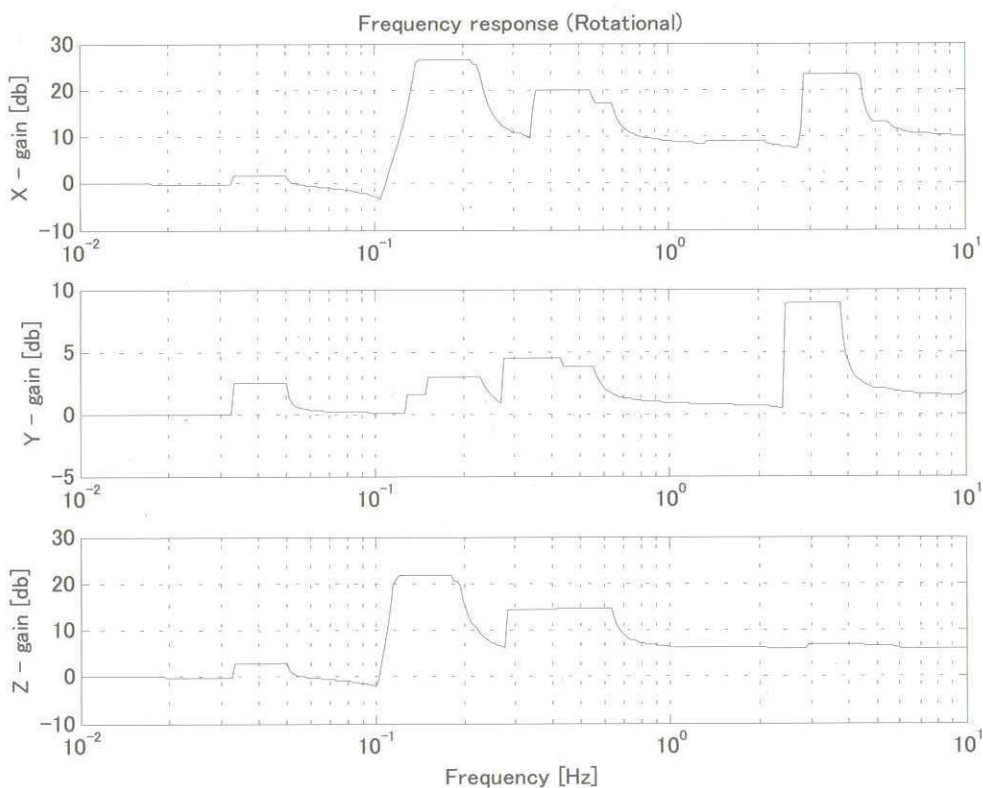


図3-2 共振倍率 $Q(\omega)$ (SELENE、トルク-トルク入出力関係)

注意) SAP 角により SAP のモード形状の極性が変わる (X/Zでの交換が起こる) ため、SAP 角=0deg,90deg,180deg,270deg の各周波数応答に対する最大包絡線を共振倍率 Q としている。

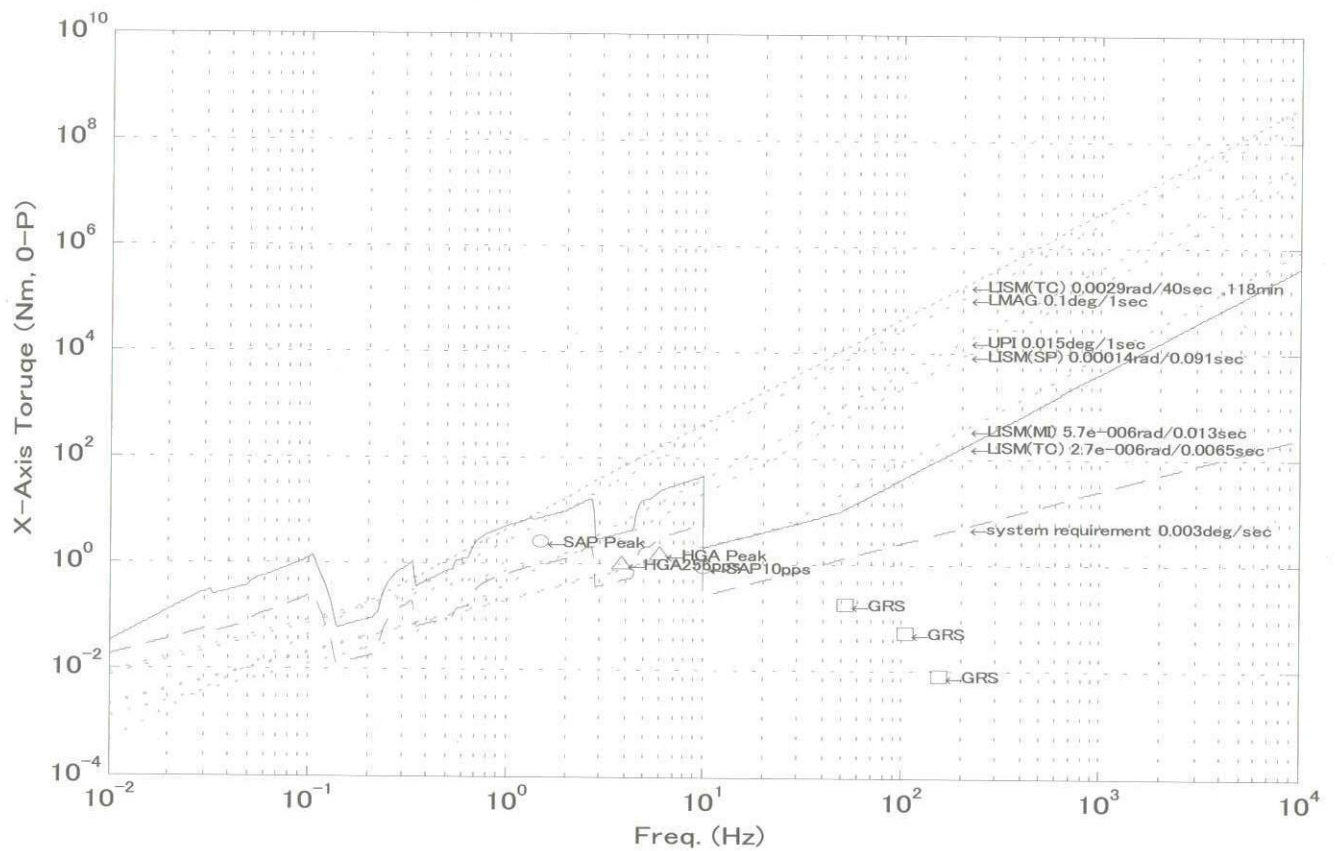


図 3-3 指向安定度要求を満たす許容擾乱トルク振幅規定 (SELENE、X 軸)

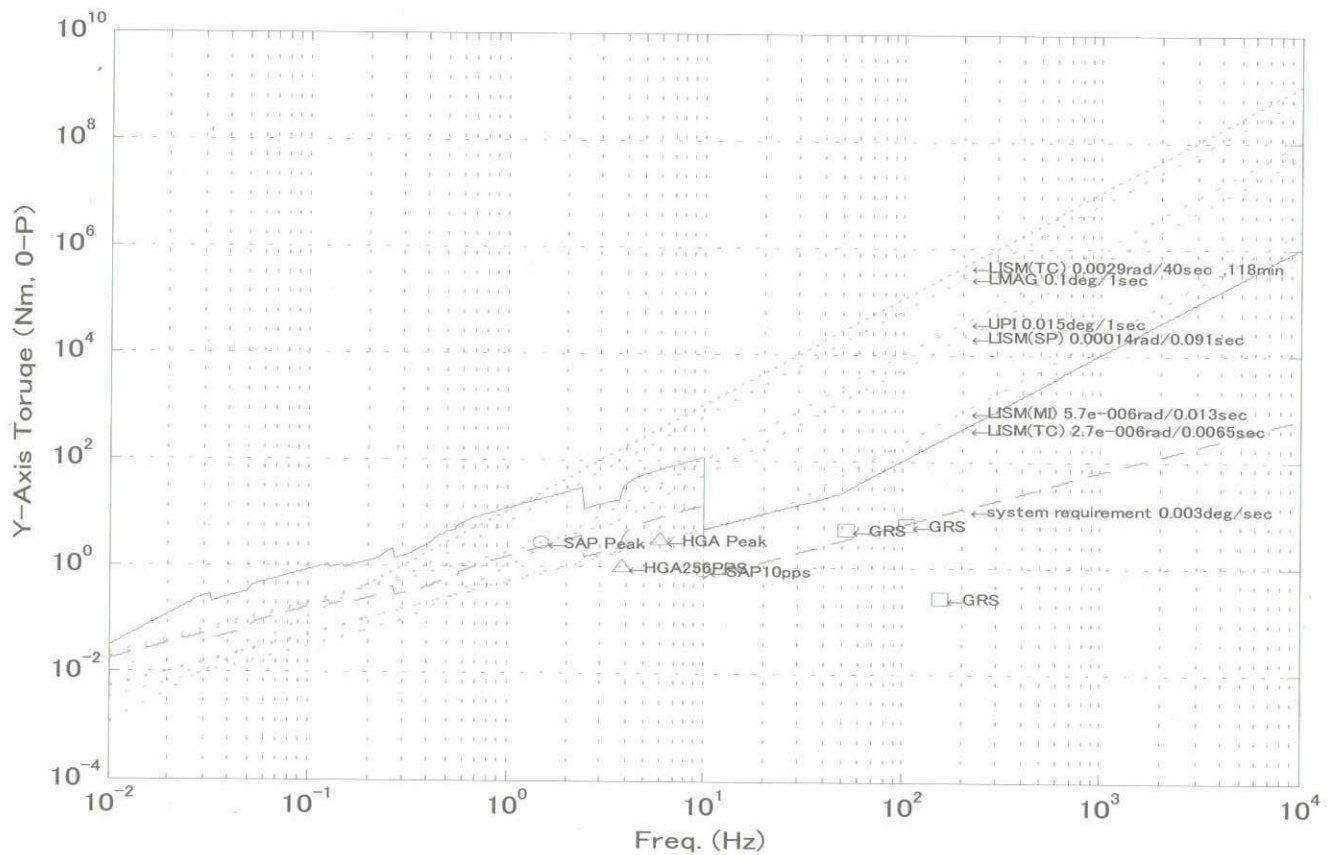


図 3-4 指向安定度要求を満たす許容擾乱トルク振幅規定 (SELENE、Y 軸)

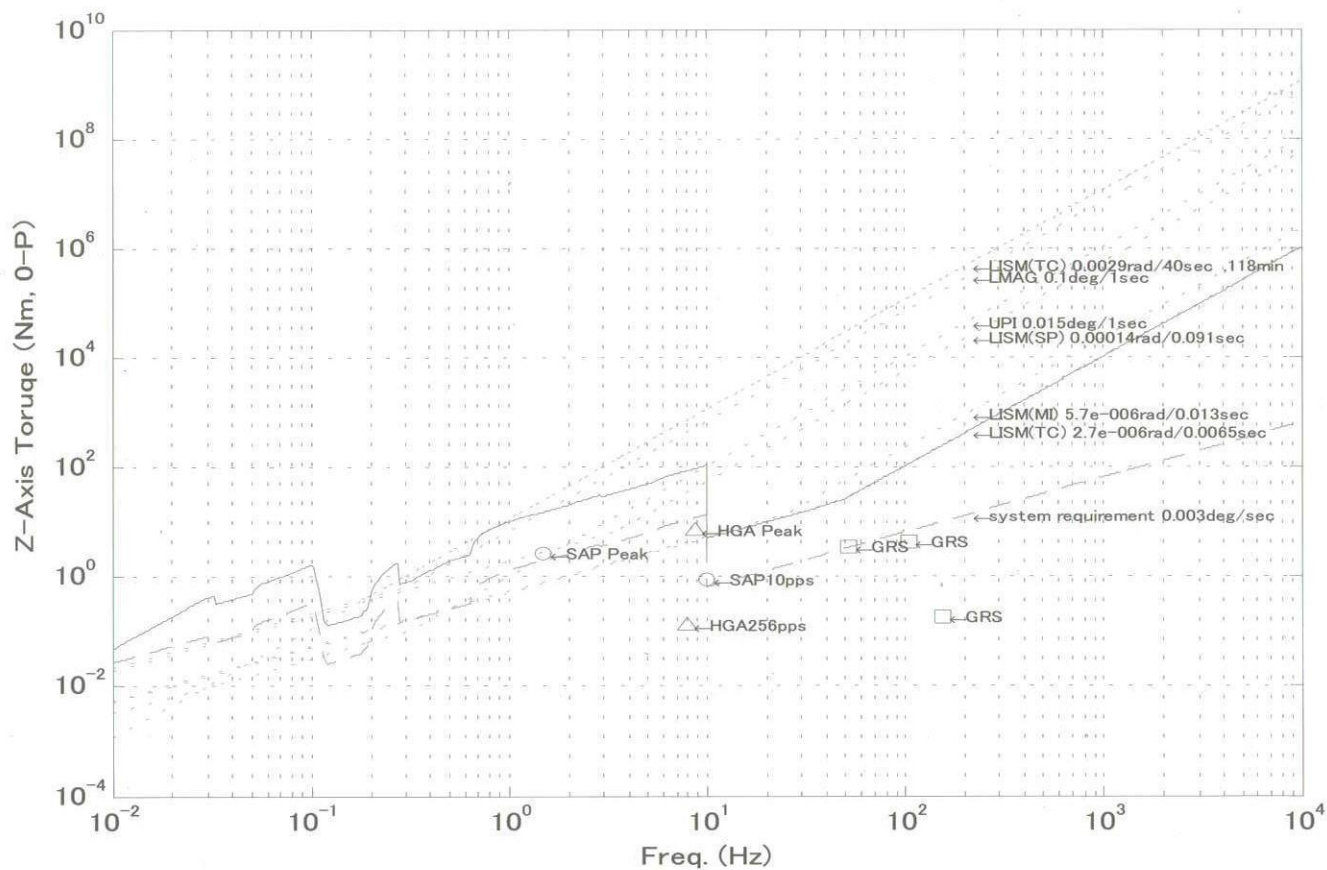


図 3-5 指向安定度要求を満たす許容擾乱トルク振幅規定 (SELENE、Z 軸)

4. 時間領域における相対的指向変動の管理

3章の結果得られたグラフは次のような特徴がある。

<長所>

- ・それぞれの擾乱トルクレベルと指向安定度要求を満たすための許容トルクレベルの関係が周波数領域上のグラフで明瞭であり、擾乱源サブシステムに対し周波数領域での許容トルク値として提示する場合には便利（ただし、擾乱源が複数の場合は各擾乱源への配分を考えることが必要）。

<短所>

- ・そのままでは単一周波数の正弦波擾乱を発する1つの擾乱しか管理できない。複数擾乱を想定して配分を考えたとしても本質的には厳密でない。

本章ではこの短所を克服するべく、別の視点から全擾乱に対する総合的な管理手法を提案する。

3章の共振倍率 Q を用いると以下のことがいえる。

内部擾乱源 n が「周波数 f_n [Hz]、振幅 τ_n [Nm]」の擾乱トルクを全機重心回りに発生する

↓等価的にいいかえると

衛星の共振により「周波数 f_n [Hz]、振幅 $Q_n \tau_n$ [Nm]」のトルクが衛星（＝共振倍率1倍に相当する慣性能率をもつ剛体）の重心回りに加わる

ここで共振倍率 Q_n は擾乱の周波数 f_n の関数 $Q_n = Q(f_n)$ である（図3-2参照）。

このことから、擾乱源 n による衛星の指向変動 $\theta_n(t)$ は次式のようになる。

$$\begin{aligned} \begin{cases} \theta_n(t) = a_n \sin(\omega_n t) \\ Q_n \tau_n = I_n \ddot{\theta} \end{cases} \\ \rightarrow a_n = \frac{Q_n \tau_n}{I_n \omega_n} \\ \therefore \theta_n(t) = \frac{Q_n \tau_n}{I_n \omega_n^2} \sin(\omega_n t) \end{aligned}$$

式4-1

ここで、

$\omega_n = 2\pi f_n$ [rad/sec] : 擾乱の周波数

I_n [kgm²] : 共振倍率規定の1倍に相当する慣性能率

である。

したがって、「ある時間 T の間の擾乱源 n による相対的な指向変動 $\Delta \theta_n(0-p)$ 」は次式となる。

$$\begin{aligned} \cdot T < \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\omega_n} \quad \left(\text{つまり } T < \frac{\pi}{\omega_n} \right) \quad \text{のとき} \\ \Delta \theta_n(T) = \frac{Q_n \tau_n}{I_n \omega_n^2} \sin\left(\omega_n \frac{T}{2}\right) \end{aligned}$$

式4-2

$$\begin{aligned} & \cdot T \geq \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\omega_n} \left(\text{つまり } T \geq \frac{\pi}{\omega_n} \right) \quad \text{のとき} \\ & \Delta \theta_n(T) = \frac{Q_n \tau_n}{I_n \omega_n^2} \end{aligned}$$

式 4-3

ゆえに、「ある時間 T の間の全擾乱源による相対的な指向変動 $\Delta \theta$ (0-p)」は次式のようにになる。

$$\Delta \theta(T) = \sum_n \Delta \theta_n(T)$$

式 4-4

重ね合わせには各擾乱の位相を考慮する必要があるが、SELENE では厳しい側の LS 値評価としている。

ただし、以下のことに注意する。

- ・ 擾乱源 n が複数の周波数 ω_{n1} 、 ω_{n1} 、…の合成波であるときは、各周波数による指向変動 $\Delta \theta_{n1}$ 、 $\Delta \theta_{n2}$ 、…を式 4-2、式 4-3 と同様に場合分けして求めることにより、 $\Delta \theta_n$ は次式のようにになる。

$$\Delta \theta_n(T) = \Delta \theta_{n1}(T) + \Delta \theta_{n2}(T) + \dots$$

式 4-5

- ・ 擾乱源 n が単一ラインスペクトルの擾乱パターンである場合も、複数の擾乱パターン a,b,c... を発生しうるときは、各擾乱パターンによる指向変動 $\Delta \theta_{na}$ 、 $\Delta \theta_{nb}$ 、…を式 4-2、式 4-3 と同様に場合分けして求めることにより、 $\Delta \theta_n$ は次式のようにになる。

$$\Delta \theta_n(T) = \max \{ \Delta \theta_{na}(T), \Delta \theta_{nb}(T), \dots \}$$

式 4-6

図 4-1 ～図 4-3 に SELENE での解析結果を示す。時間 0[sec]の時の指向角を 0[rad]としある時間における衛星全体の相対的な指向変動角を黒の実線で示し、各ミッションの指向安定度要求を×でプロットしている。横軸は周波数成分を表しているのではなく、ある瞬間からの経過時間 T を表していることに注意する。縦軸は指向誤差量 $\Delta \theta$ である。各擾乱による高周波の指向変動の他に、システム要求 0.003deg/sec を満たすべく動作する姿勢制御系 (AOCS) による低周波の指向変動分を別途上積みしていることに注意する。

各ミッションの指向安定度要求を×でプロットしているので、このグラフにより要求スペックを満たしているか否かが一目瞭然である。総合的な要求スペック判定はもちろん、各ライン (点線) から各擾乱源の影響の大小が簡単に比較できるような評価グラフになっている。

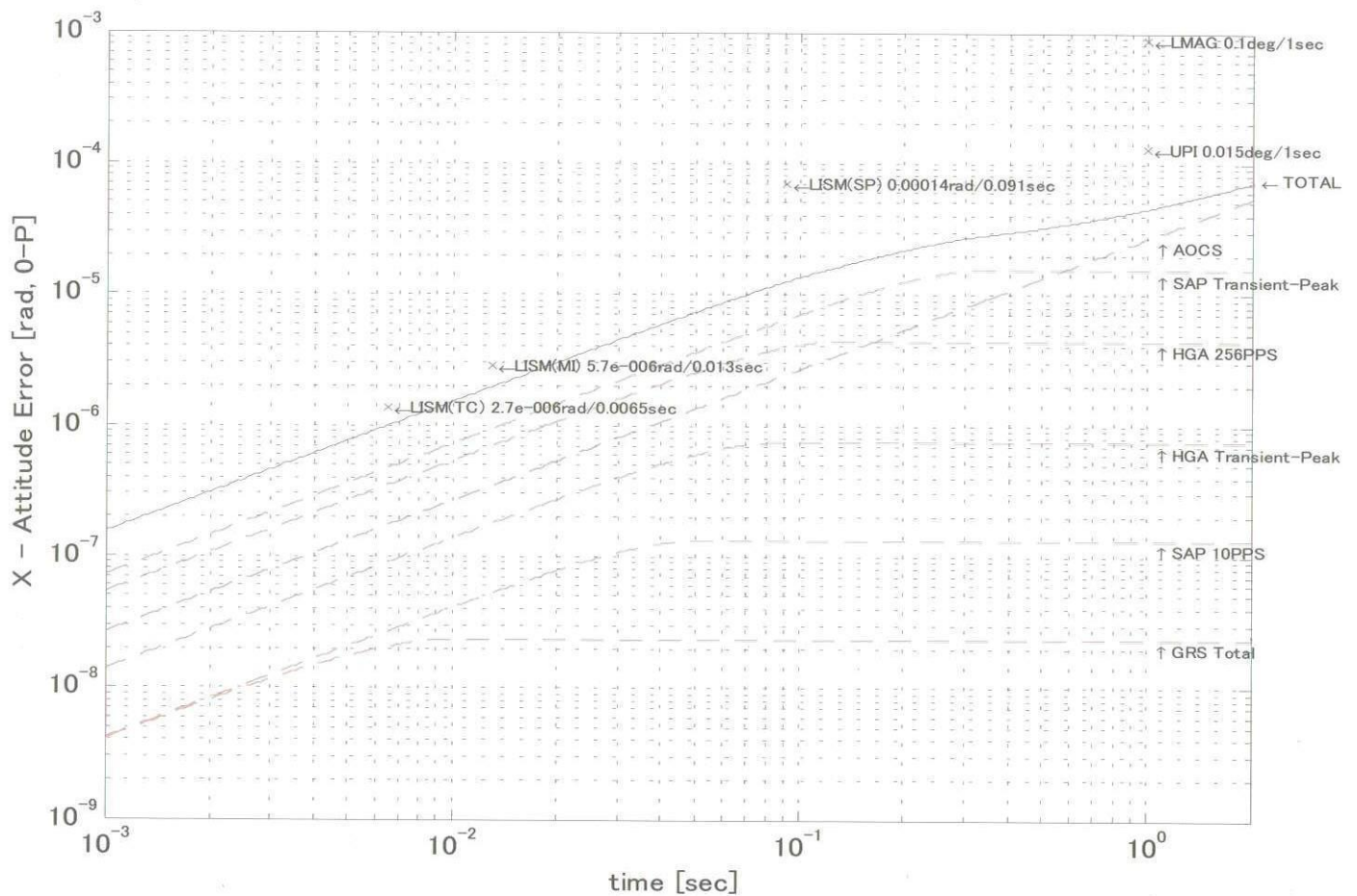


図 4-1 時間領域における相対指向変動角と観測機器指向安定度要求 (SELENE、X 軸、横軸: T、縦軸: $\Delta \theta$)

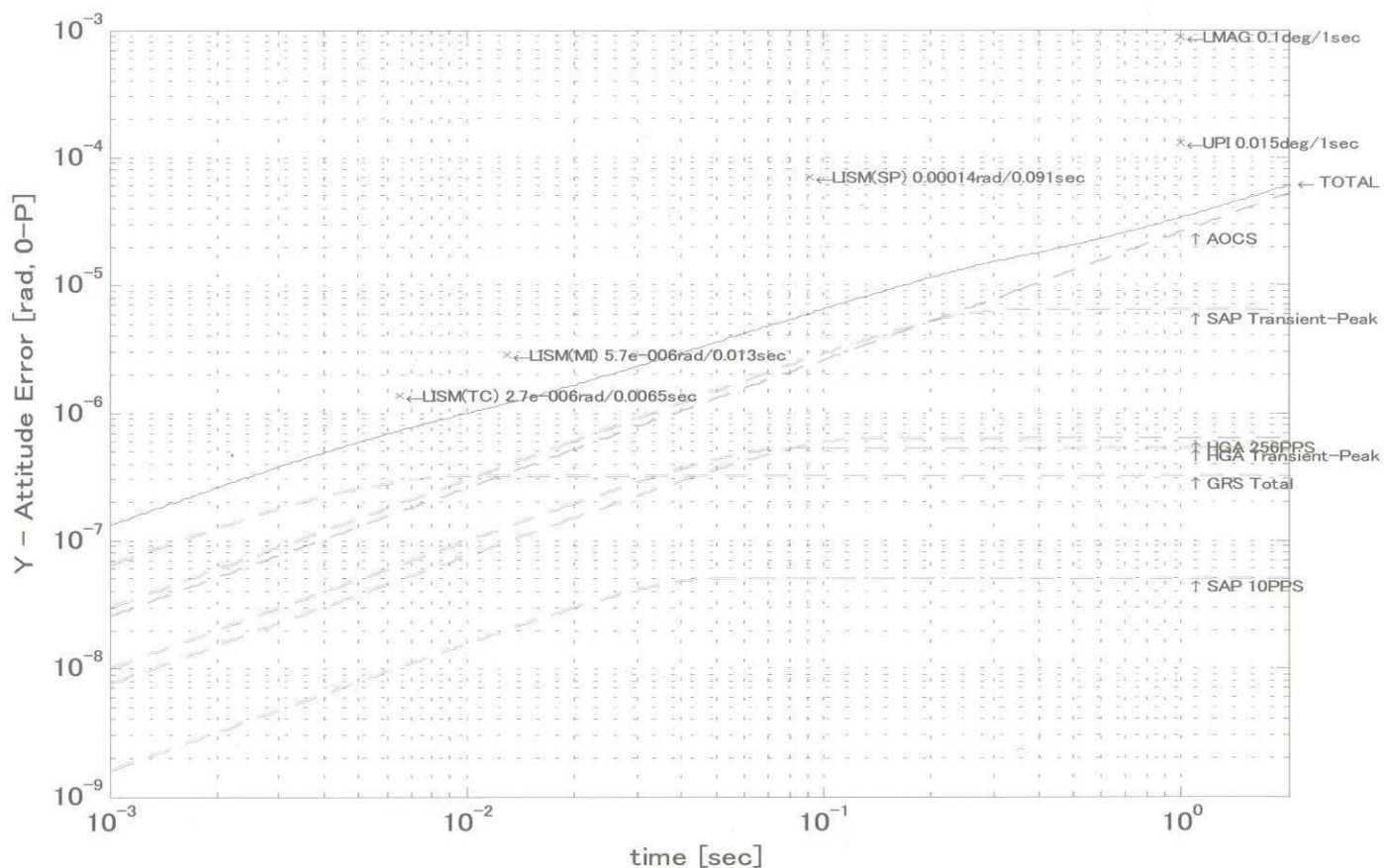


図 4-2 時間領域における相対指向変動角と観測機器指向安定度要求 (SELENE、Y軸、横軸：T、縦軸： $\Delta\theta$)

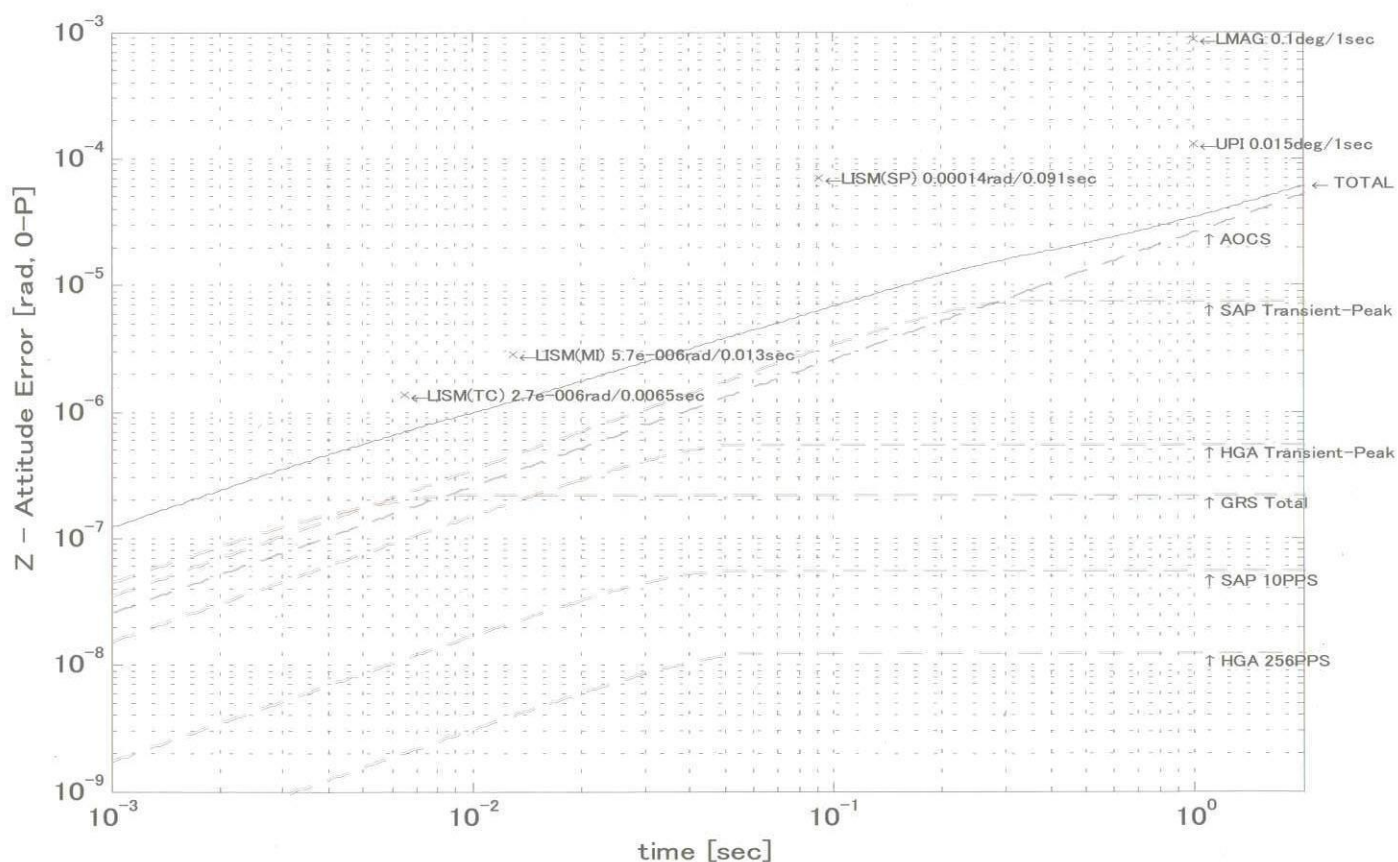


図 4-3 時間領域における相対指向変動角と観測機器指向安定度要求 (SELENE、Z軸、横軸：T、縦軸： $\Delta\theta$)

5. まとめ

4章で提案した手法により、詳細な衛星ダイナミクスモデルに基づく総合的な擾乱管理がグラフ上で行えることが分かった。4章は正弦波擾乱の場合の例であるが、この手法は単一擾乱、複数擾乱によらず、いかなる擾乱波形に対しても時間領域での指向誤差量が分かりさえすればそれを積み上げることによって総合的な指向安定度検討（擾乱管理）ができるという点が優れている。

1～3章の手法では出力は「周波数－許容トルク」関係のグラフであり、異なる周波数の擾乱に対しては各々の擾乱の周波数と振幅の兼ね合いで議論する必要があるため、そのままでは複数の擾乱源に対する総合的な擾乱管理ができないのだが、4章の手法では、3章の手法を拡張した時間領域での評価法により任意の擾乱に対して有効な総合擾乱管理が可能になった。

以上により擾乱管理手法としては、

- ・ 3章の手法は、厳密性を欠くため擾乱の性質などに応じ適当なマージンを確保した上で許容ラインを設定する必要があるが、擾乱源側に対して発生トルクの許容ラインとして提示する用途に適する。
- ・ 4章の手法は、各擾乱データから指向安定度ミッション要求の実現性を総合的に評価する用途に適する。

ということがいえ、3章と4章の手法をそれぞれの用途で使い分けることにより総合的な擾乱管理が可能となる。

擾乱管理を行う際の注意点をあげる。

- ・ 要求側の観測機器との I/F 点を明確にし、衛星上のどの点での指向安定度管理を行うかをはっきり規定する。
- ・ 共振倍率は、「剛体モードで発生するトルク／入力トルク」というトルク対トルクの倍率を表すため（2章の共振倍率の規定法を参照のこと）、擾乱トルクは構体パネル面との I/F 点で発生する値に換算すること（例；SELENE-HGA）。
- ・ 定常的には発生しない過渡的な擾乱（例；SELENE-SAP 駆動開始時の過渡的擾乱、HGA スルー駆動時の過渡的擾乱等）の評価法は衛星固有の調整事項ではあるが、発生頻度まで加味して運用上問題となるかどうかを検討するのがシステム設計の立場から望ましい。

今後の課題としては高周波領域での構体パネルの振動モードのモデル化検討などがあげられる。衛星実機を用いて実測した擾乱測定試験としては OICETS 微小振動試験などがある。

<参考文献>

- [1] 鈴木、吉田：「地球観測衛星の指向性能の規定法について」、第31回宇宙科学技術連合講演会講演集、(1987)
- [2] 神谷、栗井、川勝：「SELENE 内部擾乱の指向安定度への影響検討と内部擾乱管理」、第45回宇宙科学技術連合講演会講演集、(2001)

宇宙航空研究開発機構特別資料 JAXA-SP-05-025

発 行 平成 18 年 3 月 1 日

編集・発行 宇宙航空研究開発機構

〒182-8522 東京都調布市深大寺東町 7-44-1

URL : <http://www.jaxa.jp/>

印刷・製本 (株) 東京プレス

本書及び内容についてのお問い合わせは、下記にお願いいたします。

宇宙航空研究開発機構 情報システム部 研究開発情報センター

〒305-8505 茨城県つくば市千現 2-1-1

TEL : 029-868-2079 FAX : 029-868-2956

© 2006 宇宙航空研究開発機構

※ 本書の一部または全部を無断複写・転載・電子媒体等に加工作することを禁じます。



本書は再生紙を使用しております。