

## 高精度マルチブロック計算のための一般化インターフェイス条件

住隆博, 黒滝卓司

宇宙航空研究開発機構/総合技術研究本部

絵山淳

(株)三向ソフトウェア開発

## Generalized Interface Conditions for Accurate Multiblock Computation

by

Takahiro Sumi, Takuji Kurotaki and Jun Hiyama

## ABSTRACT

In practical computations with structured grids around complex bodies, singular points can be frequently found where an abrupt grid change exists. These singularities pose troublesome problems when some high order and high resolution scheme is applied. An excellent theory has been proposed, which solve the above singular problem by decomposing a computational domain into two blocks along a line or a surface which contains the singular points and by imposing accurate characteristic-based interface conditions at the block interface. However, the original theory has limitations on the combination between the adjacent computational coordinate definitions, and these two coordinates have to be the same direction and the same coordinate index at the block interface. For more flexible coordinate arrangement, the original characteristic interface treatment is extended and generalized. Consequently, the coincidence of the computational coordinates in the adjacent blocks becomes unnecessary, and robust multi-block computations can be successfully realized. Numerical test analysis is performed for verification of the new theory, and excellent performance is confirmed.

## 1. はじめに

近年, コンパクトスキーム<sup>1)</sup>に代表される高精度・高解像度差分法による構造格子を用いた数値計算が盛んに行われている。コンパクトスキームはテイラー展開に基づいて構築されているために, 計算格子や物理量の分布が滑らかな場において極めて正確な解を与える。しかしながら, これらのスキームを一般座標に適用した場合, 例えば計算格子の分布や傾きが不連続であるような特異点周りにおいて数値的な振動がしばしば観察される。この問題を解決するために Kim ら<sup>2)</sup>は, 特異点を含む格子線もしくは格子面においてそれらを左右二つのブロックに分離し, それぞれのブロック内で差分計算を完結させ, ブロック境界(インターフェイス)上で左右の特性波振幅ベクトルを繋ぎ合わせるインターフェイス条件を導き, 単点で接合可能な高精度マルチブロック計算を実現した。この方法はインターフェイスに垂直な方向に対して一次的な取り扱いを行う他は何らのモデル化も必要とせず, Navier-Stokes 方程式より特性理論を用いて直接的に導かれる。原理的には対流項の固有値の符号に従って特性波振幅ベクトルを風上側から決定するという物理的考察に基づいている。

Kim らの理論は, インターフェイス上における特性量の時間発展の連続性に着目している。特性量は一般座標においてメトリクスを関数に持つために, 結果としてこの理論では左右ブロックのインターフェイス極限における計算座標定義の一致が必要となる。しかしながら, 実用的なマルチブロック計算において, この条件はロバストなブロック配置を実現する上での大きな制約となる。一般に, 隣接する二つのブロックにおいて, 計算座標の定義方向が相反する場合や, 異なる座標インデックスどうしの接合については, Kim らの理論の適用範囲外となる。最も身近な例として, 二次元翼周りの C 型格子後縁に見られるカットラインでは, 隣接する二領域の計算座標がカットライン極限で互いに逆方向となるために, Kim らの理論を直接適用することはできない。このように, 複雑な座標構成を想定する場合, 隣接するブロック間で座標系の定義が異なる場合の一般化されたインターフェイス条件を導出することは理論的な立場から見ても極めて興味深い。本報では従来理論を拡張することで, 任意の座標構成に対応できる一般化インターフェイス条件の導出を行う。さらに理論の検証と性能評価を目的として渦の対流問題による解析を実施する。

## 2. 一般化されたインターフェイス条件

Fig. 1 上は特異性を持つ計算格子の一例を示している。このような格子は傾きが急激に変化する点においてメトリクスの値が不連続となり, 高精度・高解像度差分法の適用における数値振動の要因となり得る。そこでこの問題を解決するために, Fig. 1 下に示すように特異線に沿って計算領域を左右の二つに分離し, それを単点で繋ぎ合わせるインターフェイス条件を考える。なお, 後の一般化により二つのブロックにおける計算座標は右手系であればどのように定義してもよい。ξ 方向に関して Navier-Stokes 方程式を以下のように書き表す。

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \xi_x \frac{\partial E}{\partial \xi} + \xi_y \frac{\partial F}{\partial \xi} + \xi_z \frac{\partial G}{\partial \xi} + C = 0 \quad (1)$$

ここで, 他方向の対流項およびすべての粘性項は生成項に含まれている。簡単のため(1)式は非保存系の表記をとっているが, 特に議論の一般性を失わない。次に, 保存変数, 原始変数, および特性変数から成るヤコビアン行列を定義する。

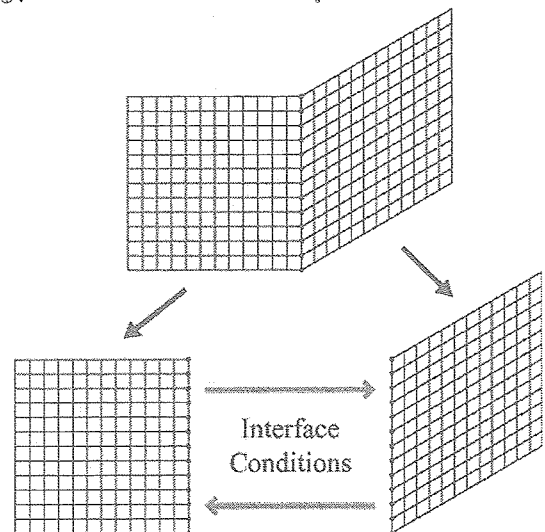


Fig. 1 A single domain with abrupt grid change (upper), and two decomposed domains with interface conditions (lower).

$$\mathbf{P} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{V}}, \mathbf{S} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{W}} \quad (2)$$

これらを用いて(1)式を次のように書き直す。

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{PSL} + \mathbf{C} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{SL} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{C} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \mathbf{L} + \mathbf{S}^{-1}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{C} = 0 \quad (5)$$

これらの式はそれぞれ保存変数, 原始変数, および特性変数に対する特性輸送方程式であり, 式中の特性波振幅ベクトルは次式で表される。

$$\mathbf{L} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{P}^{-1} \left( \xi_x \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi} + \xi_y \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \xi} + \xi_z \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \xi} \right) \quad (6)$$

Kim ら<sup>2)</sup>は隣接するブロックのインターフェイスにおける特性量の時間発展が等しいということに着目し, 次のインターフェイス条件式を導いた。

$$\frac{\partial \mathbf{W}^u}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{W}^d}{\partial t} \Leftrightarrow \mathbf{L}^u + \mathbf{S}^{-1}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{C}^u = \mathbf{L}^d + \mathbf{S}^{-1}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{C}^d \quad (7)$$

ここで, 添え字  $u, d$  はそれぞれインターフェイスにおける上流側と下流側を示している。ところで, 同じ考え方を(3)式に適用した場合, 次の条件式を得る。

$$\frac{\partial \mathbf{U}^u}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{U}^d}{\partial t} \Leftrightarrow \mathbf{P}^u \mathbf{S}^u \mathbf{L}^u + \mathbf{C}^u = \mathbf{P}^d \mathbf{S}^d \mathbf{L}^d + \mathbf{C}^d \quad (8)$$

この式は一見するところ(7)式と等価に見えるが, 次の条件,

$$\mathbf{P}^u = \mathbf{P}^d, \mathbf{S}^u = \mathbf{S}^d \quad (9)$$

を満たすときにのみ(7)式に帰着する。一般に, ヤコビアン  $\mathbf{P}$  の要素は原始変数から成り, 第一式は両ブロックにおけるインターフェイス上の物理量が同一のときにのみ成立する。一方, ヤコビアン  $\mathbf{S}$  の要素は原始変数と正規化されたメトリクスを含み, 第二式は上記の条件に加えて両ブロックのインターフェイス極限における計算座標の定義が一致するときのみに成立する。すなわち, (7)式は(8)式の特別な場合となる。一般化インターフェイス条件を構築するにあたり, (8)式を次のように書き直す。

$$\mathbf{L}^u = (\mathbf{S}^{-1})^u [\mathbf{S}^d \mathbf{L}^d + \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{C}^d - \mathbf{C}^u)] \quad (10)$$

$$\mathbf{L}^d = (\mathbf{S}^{-1})^d [\mathbf{S}^u \mathbf{L}^u + \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{C}^u - \mathbf{C}^d)]$$

このうち, 未知量および既知量をそれぞれ次のベクトル,

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{L}^u, \mathbf{L}^d), \mathbf{Y} = \mathbf{Y}(\mathbf{L}^u, \mathbf{L}^d) \quad (11)$$

にまとめると, 適当な係数行列  $\mathbf{M}, \mathbf{N}$  に対して,

$$\mathbf{X} = \mathbf{M}\mathbf{X} + \mathbf{N}\mathbf{Y} + \mathbf{Z} \quad (12)$$

で表される連立方程式系が得られ, 解析的に解くことができる。最後に, 変更を受けた特性波振幅ベクトル  $\mathbf{L}^*$  と(6)式から次式のように,

$$\xi_x \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi} + \xi_y \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \xi} + \xi_z \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \xi} = \mathbf{PSL}^* \quad (13)$$

対流項の修正が完了し, (1)式から計算領域内点と同様の手続きにより時間積分を行うことができる。

なお, 超音速条件に対しては全ての特性波振幅ベクトルが上流から下流へと同じ方向を向くため, 結果としてインターフェイスにおける全保存変数の下流側の値を上流側の値より従属的に決定する, すなわち,

$$\mathbf{U}^{d*} = \mathbf{U}^u \quad (14)$$

と等価となることが容易に確かめられる。

Table 1 Details of test cases in verification analysis.

Case No.	Equations	Interface	Grid
1	Euler	Original I.C.	A
2	Euler	Averaging	A
3	Euler	Overlap	A
4	Euler	Generalized I.C.	B
5	Navier-Stokes	Original I.C.	A
6	Navier-Stokes	Generalized I.C.	B

### 3. 数値計算法

支配方程式には非定常 3 次元 Navier-Stokes 方程式もしくは非定常 3 次元 Euler 方程式を用い, 構造格子により有限差分的に離散化を行う。対流項と粘性項の差分には 6 次精度 Pade 型コンパクト差分スキームを用いる。時間積分は低容量型の 4 次精度 Runge-Kutta スキームにより陽的に行う。さらに, Gaitonde ら<sup>3)</sup>によって提案されている 6 次精度 Pade 型のコンパクトフィルタリングスキームを用いて高周波の数値振動の除去を行っている。

### 4. 結果および考察

インターフェイス条件の検証と性能評価を行うために, インターフェイスを通過する渦の対流問題を解く。一樣流中の渦は初期状態において以下で与えられる<sup>4)</sup>。

$$u = 1 - \frac{C(y-y_c)^2}{R^2} \exp(-r^2/2), v = \frac{C(x-x_c)}{R^2} \exp(-r^2/2),$$

$$p_\infty - p = \frac{\rho C^2}{2R^2} \exp(-r^2), r^2 = \frac{(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2}{R^2}$$

ここで,  $C$  は渦の強さを決めるパラメータ, および  $R$  は渦の特性半径であり, それぞれ 0.167, 0.2 としている。渦の最大旋回速度は一樣流の約 50% であり, 流れ場の全領域において亜音速となる。なお, 一樣流の温度, マッハ数, およびレイノルズ数はそれぞれ 300 K, 0.3, 10,000 である。

解析には Fig. 2 に示す二種類の計算格子を用いる。両者は隣接するブロックにおける計算座標の定義が異なる以外は, 全く同じ形状を持っている。すなわち, グリッド A では計算座標がインターフェイスを挟んで順方向に接続されており, グリッド B では逆方向に接続されている。隣接するブロックの両  $\xi$  軸間の成す角はグリッド A では 30 deg, およびグリッド B では 150 deg である。格子間隔はいずれの方向にも 1/60 であり, 1 ブロックあたりの格子点数は 121\*241 である。

渦は  $x$  軸に沿ってブロック U からブロック D へインターフェイスを横切って移動する。最初に渦の中心は時刻  $t=0$  において  $x=-1$  に位置し, 続いて時刻  $t=1$  においてインターフェイスを通過し, 最後に時刻  $t=2$  において  $x=1$  付近に到達する。計算におけるクーラン数は 0.8 であり, 全体で約 740 ステップを必要とする。

Table 1 に解析に用いるケースの詳細を示す。Case 1 から Case 4 までは, Euler 方程式を用いてさまざまなインターフェイスの取り扱いをテストする。Case 1 は Kim らによって提案されたオリジナルのインターフェイス条件<sup>2)</sup>, Case 2 はインターフェイスの隣接 2 点による平均化操作, Case 3 は 5 点の領域重ね合わせ<sup>3)</sup>, および Case 4 は今回新たに導出した一般化インターフェイス条件である。Case 5 と Case 6 の解析では Navier-Stokes 方程式への拡張をテストし, それぞれオリジナルのインターフェイス条件, および一般化インターフェイス条件を用いる。なお, 一般化インターフェイス条件の Case 4 と Case 6 のみグリッド B を意図的に適用する。

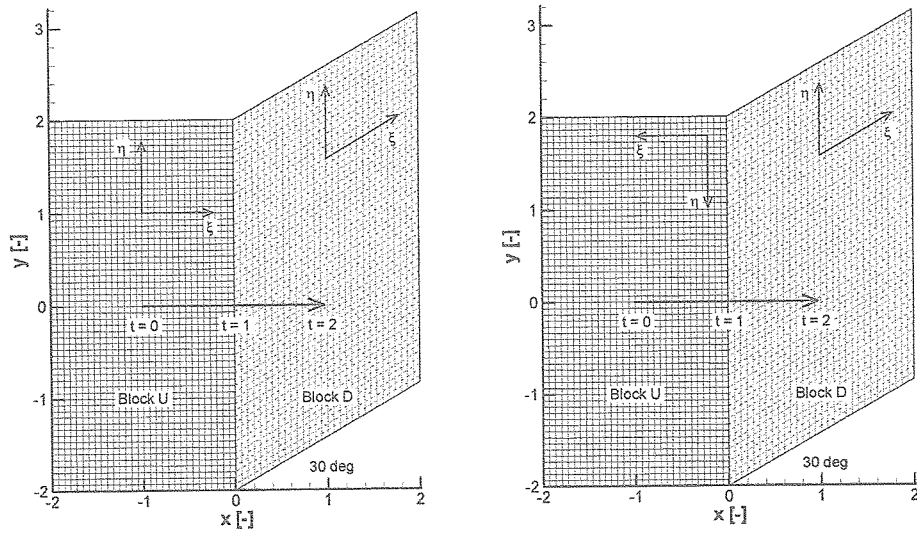


Fig. 2 Computational grid systems and coordinate definitions used in test analysis, grid A (left) and grid B (right).

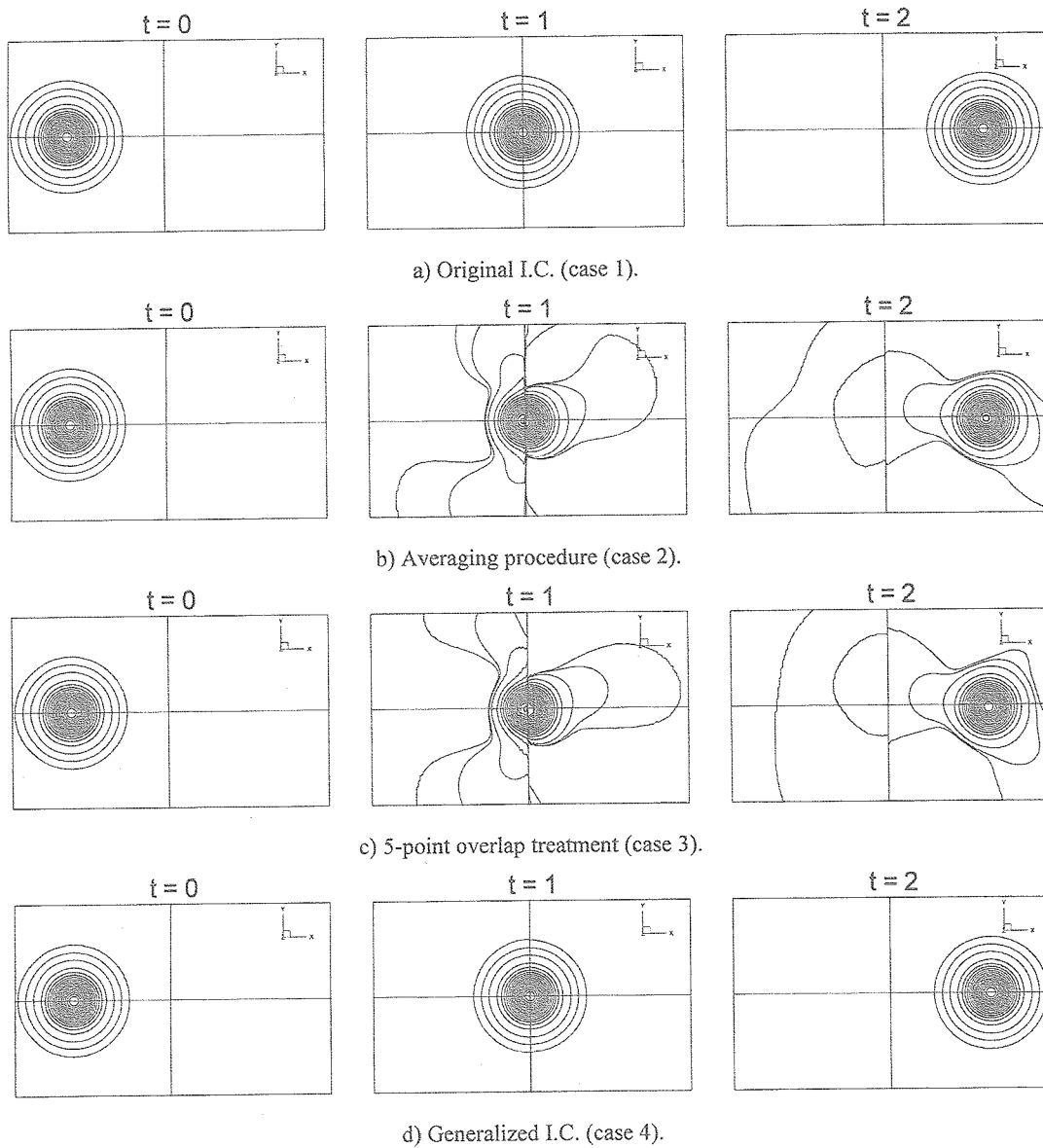


Fig. 3 Pressure distributions at three instants (Euler eqs.).

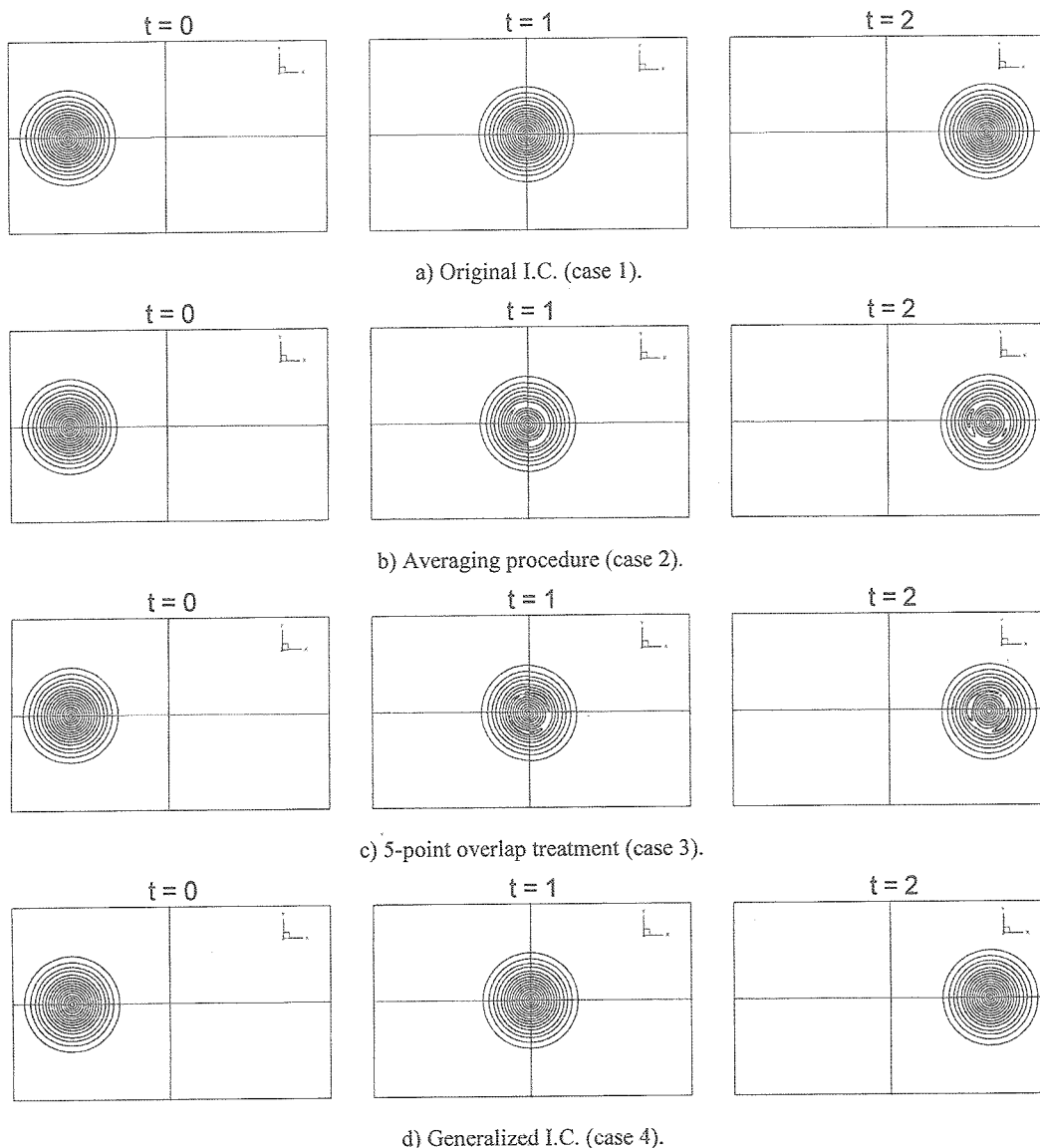


Fig. 4 Swirl velocity distributions at three instants (Euler eqs.).

Fig. 3 および Fig. 4 に Euler 方程式による四つのケースの圧力分布と旋回速度分布を示す。ここで、水平中心軸は渦中心が沿いながら移動する  $x$  軸を示しており、一方、垂直中心軸はブロック U とブロック D の境界であるインターフェイスを示している。特性理論によるインターフェイス条件を用いた Case 1 では、渦は一様流中をスムーズに移動し、初期状態から最終状態に至るまで完全な形状を保っている。一方、平均化操作を用いた Case 2 ではインターフェイス通過時に非物理的な数値振動が発生し、計算領域内部までその影響が伝播している様子が分かる。重ね合わせ法を用いた Case 3 でも数値振動がインターフェイス通過時に発生しており、Case 2 と同様の現象が観察される。特に、これら振動の生じる二つのケースでは、インターフェイス通過後に解はある程度復元するものの、渦の形状は歪みさらに渦中心が水平軸からずれているのが確認でき、渦の保存が完全には成立していないことが分かる。ところが、一般化インターフェイス条件を用いた Case 4 では、インターフェイス通過時に数値的な振動は確認されず、渦は完全に形状を保ちつつ対流し、Case 1 と同等の結果が得られている。これらの様子をより詳細に見るために、Fig. 5 にそれぞれの時

刻における水平中心軸上での圧力と旋回速度の断面分布を示す。特性理論に基づくインターフェイス条件を用いた Case 1 と Case 4 では、いずれの時刻においても分布形状は変化せず、渦が完全に保存されている様子が分かる。一方で、特性理論的な取り扱いを行っていない Case 2 と Case 3 では、インターフェイス通過時における解の著しい振動が確認できる。ところで、Fig. 3 と Fig. 4 の比較、もしくは Fig. 5 の観察から、インターフェイスの取り扱いの影響は速度場よりも圧力場に対して顕著に現れていることが分かる。このことは音響解析など圧力場に対して特に関心を払う計算に対してマルチブロック計算を適用する際には、インターフェイスの取り扱いに十分に注意を払う必要があることを示している。

Fig. 6 と Fig. 7 は Navier-Stokes 方程式に特性理論に基づくインターフェイス条件を適用したケースであり、それぞれ圧力分布と旋回速度分布を示している。ここでは Kim らによるオリジナルのインターフェイス条件と、今回導出した一般化インターフェイス条件の二つのケースの比較を行う。いずれも Euler 方程式の場合と同様に、渦はインターフェイス通過の際に数値的な反射を起こさず、スムーズに移動

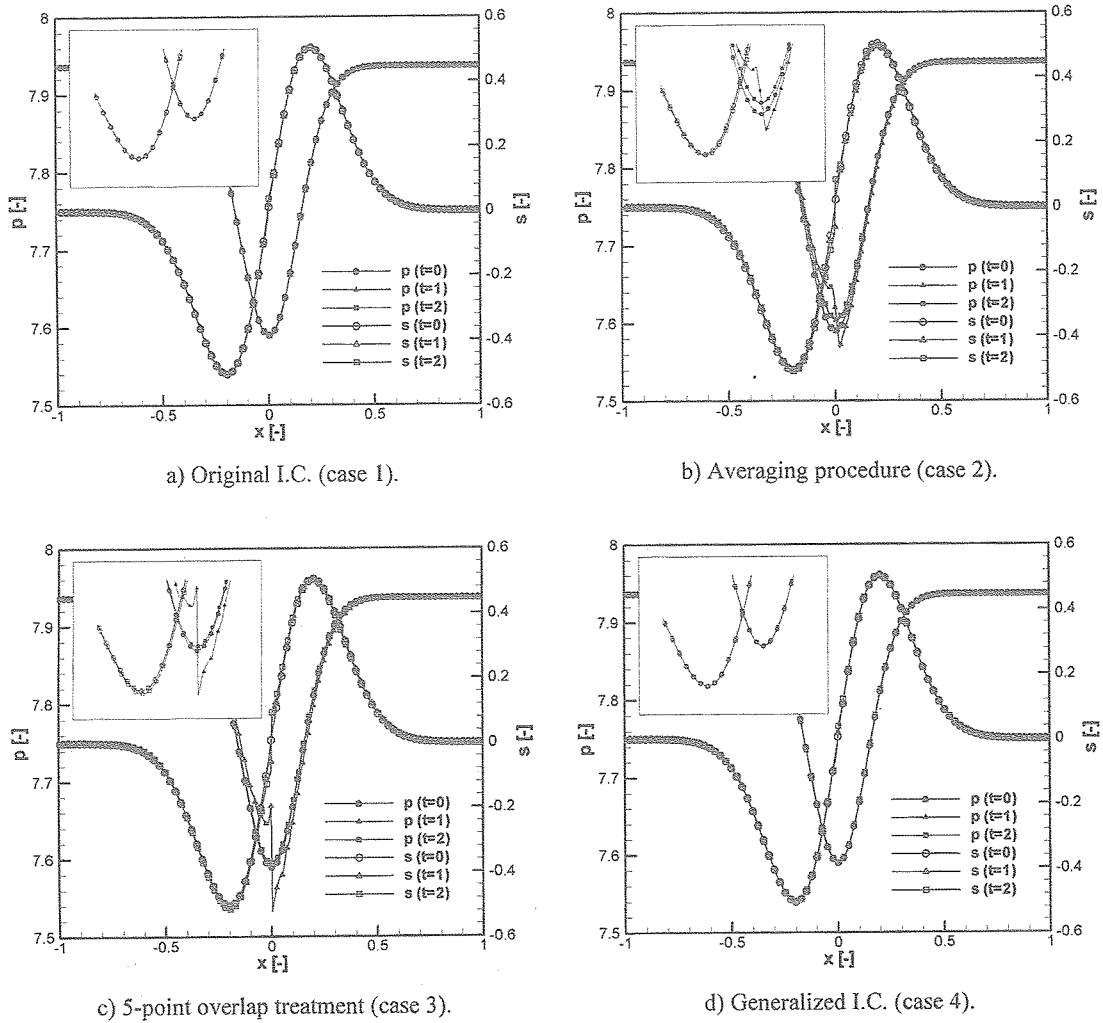


Fig. 5 Pressure and swirl velocity distributions along horizontal centerline (Euler eqs.).

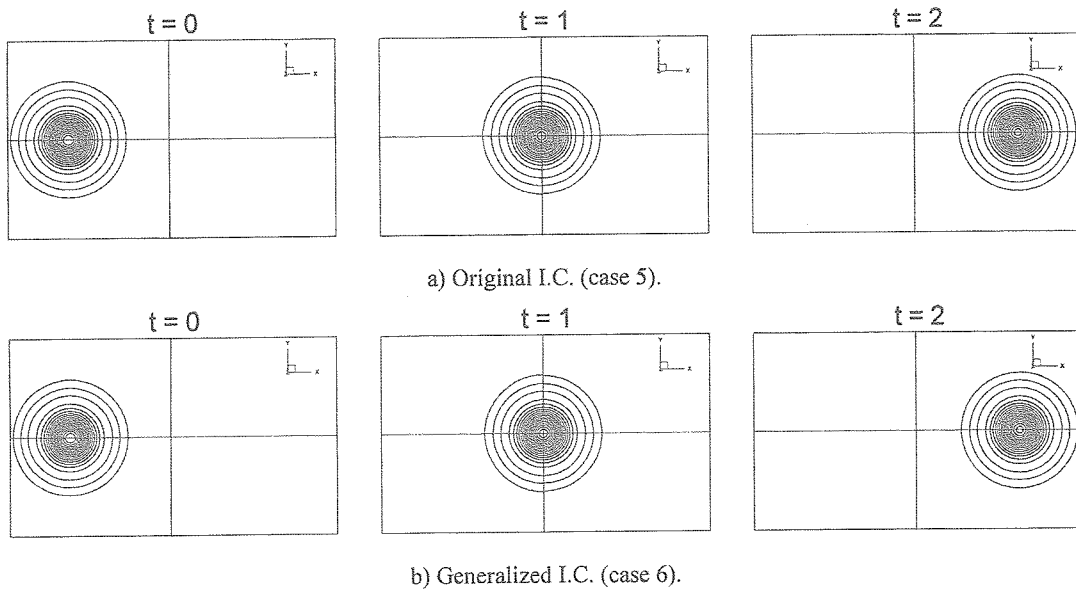


Fig. 6 Pressure distributions at three instants (Navier-Stokes eqs.).

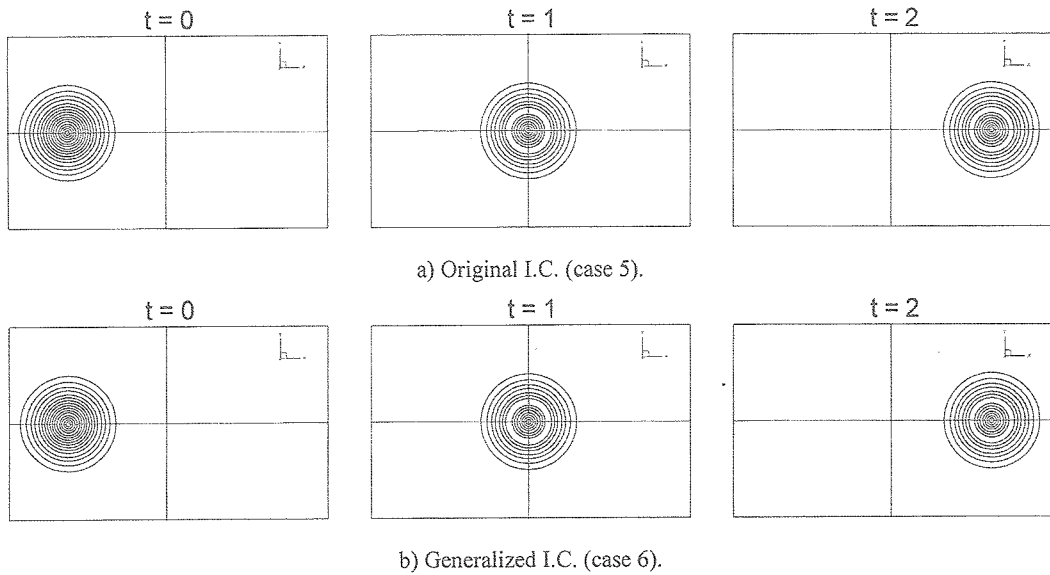


Fig. 7 Swirl velocity distributions at three instants (Navier-Stokes eqs.).

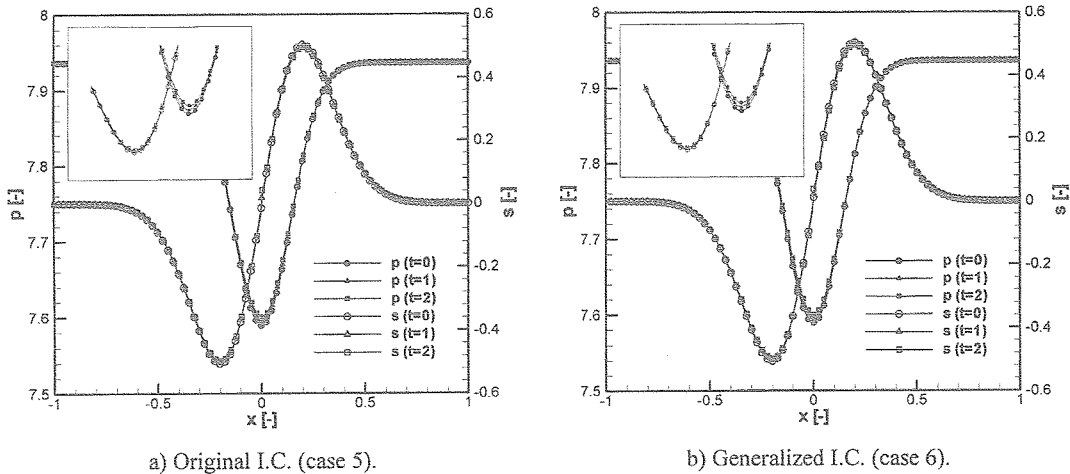


Fig. 8 Pressure and swirl velocity distributions along horizontal centerline (Navier-Stokes eqs.).

している。このことは、インターフェイス条件が Euler 方程式同様 Navier-Stokes 方程式においてもうまく機能していることを示している。次に、Fig. 8 に水平中心軸上での圧力分布と旋回速度分布を示す。詳細に見ると、圧力と旋回速度の両ピークが時間の経過とともに、若干ながら減衰している様子が確認できる。この傾向は Euler 方程式の場合では観察されないため、純粋に Navier-Stokes 方程式の分子粘性によってもたらされた減衰と考えられる。さらに、Case 5 と Case 6 の分布形状に差異はほとんど確認されず、このことは、従来理論の一般化が成功裏に実現していることを示している。

## 5. 結論

高精度・高解像度差分法をマルチブロック計算に適用する際に重要となる特性理論に基づくインターフェイス条件について従来理論の一般化を行った。これにより、隣接するブロックのインターフェイス極限における計算座標定義の一致が不要になり、自由な座標構成でのブロック接合が可能になった。渦の対流問題に対して一般理論の性能評価を行い、従来理論と比較して同等の結果を得た。

## 参考文献

- 1) S. Lele, Compact Finite Difference Schemes with Spectral-like Resolution, *J. Comput. Phys.* 103 (1992) 16-42.
- 2) J. Kim and D. Lee, Characteristic Interface Conditions for Multiblock High-Order Computation on Singular Structured Grid, *AIAA J.* 41 (2003) 2341-2348.
- 3) D. Gaitonde and M. Visbal, Pade-Type Higher-Order Boundary Filters for Navier-Stokes Equations, *AIAA J.* 38 (2000) 2103-2112.
- 4) M. Visbal and D. Gaitonde, On the Use of Higher-Order Finite-Difference Schemes on Curvilinear and Deforming Meshes, *J. Comput. Phys.* 181 (2002) 155-185.
- 5) C. Hirsch, *Numerical Computation of Internal and External Flows*, volume 2, John Wiley & Sons (1990).