

曲がりダクト内圧縮性流れに及ぼす曲率の影響

○尾崎幸玄, 前川博, 松尾裕一
 広大院, 広島大学, JAXA

Curvature effect on a compressible viscous flow in the curved duct with square section

by

Kougen OZAKI, Hiroshi MAEKAWA, Yuichi MATSUO

ABSTRACT

The curvature of the wall along the flow direction gives the fluid particles the centripetal force caused by the pressure gradients, which is essential to make the complicated secondary flow such as the Görtler vortices. In spite of several experimental and numerical researches for the incompressible curved flows, the mechanism causes the secondary flow pattern is not clearly explained. Analyzing the results obtained by direct numerical simulations of the compressible viscous flow in the curved duct for the Dean number $Dn = 271$, we demonstrate that flow helicity distributions signify the secondary flow well and that the acceleration differences between viscous and inviscid flows are essential to specify the area where the curvature effect of the wall governs the fluid particle motion. Finally, we indicate the generalized inflection points of the simulated flow velocity profiles.

1. 緒言

圧縮機など流体機械内部に一般的に見られる高曲率の複雑流路流れの特性を調査する目的から、基礎的研究の段階として流路の曲率が圧縮性流れに与える影響を空間発展直接数値シミュレーション (DNS) で解析した。簡単のため曲がりダクト形状は円筒座標系で記述される曲率一定および正方形断面とする。

正方形断面の曲がりダクト内流れに観測される二次流れ遷移は流入部の Reynolds 数 (Re 数) をダクト曲率で重み付けした Dean 数 (Dn 数) で予測される。曲率の小さな非圧縮性流れの場合では一般に Dn 数の増加と共に二次流れパターンは複雑化することが数値解析および実験で観測されている⁽¹⁻⁴⁾。ここで、流れが一定順圧力勾配で駆動されると近似できる場合には支配方程式系は二次元放物形の固有値問題に帰着される。Winters⁽⁵⁾の二次元問題で予測される二次流れ遷移の臨界 Dn 数は曲率の小さな場合の実験結果⁽¹⁻³⁾とおよそ良い一致を示している。Winters⁽⁵⁾はダクトのアスペクト比 (ダクト中心曲率半径/ダクト幅) 2.5 から 25 までの臨界 Dn 数を解析している。アスペクト比が十分に大きい場合の流れ (前述の実験観測⁽¹⁻⁴⁾はアスペクト比が 15) は垂直ダクト内のポアズイユ流れに近似されるため、二次流れ遷移は一定順圧力勾配の拘束条件で良い予測が与えられると考えられる。一方、助走区間を要素とするタービン流路のように工学場面に見られるアスペクト比の小さな場合については擬似圧縮性解法を用いたアスペクト比 2.3 の数値解析⁽⁶⁾がある。助走区間を含めての層流二次流れの空間発展構造が位相的ルールで検証され、曲がりダクト壁面に沿った圧力分布も示されている⁽⁶⁾が、助走区間の下流で発達した順圧力勾配値の収束値については解析されていない。圧力分布の解析は二次元放物形問題の評価のみならず、遠心不安定性が与える Dean 渦⁽¹⁻⁴⁾の形成メカニズムを説明する鍵となる。しかし実験観測⁽¹⁻⁴⁾でも重要なダクト壁面に沿った圧力分布は解析されておらず、速度場のみからの二次流れ安定性の議論に留まっている。

以上のように、高曲率の曲がりダクト内流れの研究については未だに確立されていない解析手法 (壁面に沿った圧力分布特性の解析など) が含まれ、二次流れ遷移予測はその形成メカニズムを含めて未解決の部分が非常に多い。内部流れの解析に対して数値解析は非常に強力なツールとなるが、二次流れを例に挙げると、その解析は慣例的に断面内速度ベクトルや縦渦度 (あるいは断面内流線) の二次元

構造までに留まっているように思われる。本研究では DNS より得られた高曲率曲がりダクト内流れの層流解データベースより、内部流れの支配的な縦渦構造を速度ヘリシティ密度で解析することで圧力分布特性などとの関係を明らかにした。その他、特に新たな解析手法として二次流れの駆動源が特定される、粘性流れと非粘性流れとの差で定義されるベクトルを提案する。

2. 支配方程式

曲率が一定である曲がりダクト内流れでは、二次流れ遷移の指標となる(1)式で定義される Dn 数が用いられる。本研究で選択したアスペクト比 2.5 の二次流れ遷移は、Winters⁽⁵⁾によれば不安定な 4-cell state または安定な 2-cell state⁽¹⁻⁴⁾が予測される。ただし本研究では DNS より得る定常層流解を解析することを目的としているので二次流れの安定性については追究しない。Dn 数を構成する流れの Re 数は流入平均速度、ダクト幅および基準動粘性係数を用いた(2)式で定義する。

$$Dn \equiv Re / \sqrt{R_c / 2l} = 271, \quad R_c / 2l = 2.5 \quad (1)$$

$$Re \equiv \bar{u}_0(2l) / \nu_0 = 428.5 \quad (2)$$

DNS で解く(3)式から(5)式に示す圧縮性流れの輸送方程式系を(2)式の Re 数で無次元化する。(3)式、(4)式および(5)式はそれぞれ連続の式、Navier-Stokes 方程式およびエネルギー方程式を表す。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{u}) = 0 \quad (3)$$

$$\rho \frac{D \bar{u}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) = \text{div} \sigma \quad (4)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \text{div}\{(e+p)\bar{u}\} = \frac{1}{(\gamma-1)RePr} \text{div}(\mu \text{grad} T) + \text{div}(\tau : \bar{u}) \quad (5)$$

σ は応力テンソルを表し、ストークスの仮説を導入した(6)式の構成式で定義する。

$$\sigma \equiv -pI + \frac{1}{Re} \left[\mu \left\{ \text{def} \bar{u} - \frac{2}{3}(\text{div} \bar{u})I \right\} \right] = -pI + \frac{1}{Re} \tau \quad (6)$$

ここで def は変形速度テンソルの演算子を表す。(5)式に e で記述される量は(7)式で定義する総エネルギーを表す。

$$e = \frac{1}{2} \rho |\bar{u}|^2 + \frac{p}{\gamma-1} \quad (7)$$

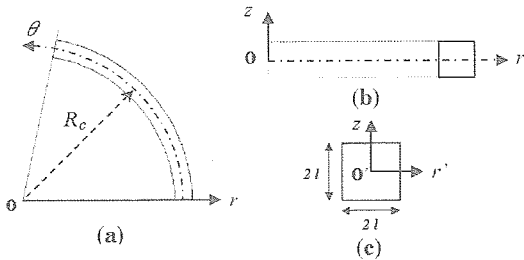


Fig.1 Schema of the curved duct described by the cylindrical coordinates

(3)式から(5)式に連立される輸送方程式系を閉じるため(8)式の状態方程式および(9)式の指数法則を用いる.

$$p = \rho T / \gamma \tag{8}$$

$$\mu = T^{2/3} \tag{9}$$

物性値は常温、標準圧力下の空気を選択する.

$$\gamma = 1.4, Pr = 0.72 \tag{10}$$

Fig.1に円筒座標系を示す. (1)式に用いる曲がりダクトの長さパラメータは R_c が曲がりダクト中心半径および l がダクト半幅を表す. 計算領域は等間隔格子を用い、各軸方向に $r \times \theta \times z = 81 \times 81 \times 41$ の格子点数を配置した. ここで、 z 方向については $z=0$ の r 軸上で z 方向微分係数を0と拘束させる. この拘束条件は z 方向速度成分について

$$u_z(-z) = -u_z(z) \tag{11}$$

$$\phi$$
 をその他の速度成分および流れのスカラー量として $\phi(-z) = \phi(z) \tag{12}$

で表される、 $z=0$ の $r-\theta$ 平面について z 方向に対称な流れを記述する. (11)式および(12)式は対象とする流れを限定する. 定常解を導出する際に断面内全てを考慮した場合、特に壁面近傍に分布する険しい速度勾配を伴う速度分布が要因となり、非対称な定常解が差分スキームの影響も含めて数値的な誤差で与えられることが予想される. (6)式に定義する応力テンソルの非対角成分は簡単に対称性を仮定していることから r 軸上で z 方向に非対称の分布は現れないものと仮定し、(11)式および(12)式の拘束条件を課したDNSが与える収束解は適切な定常層流解を表すとした.

ところで、擬似圧縮性解法⁽⁶⁾で導出されたアスペクト比2.3の収束解には、壁面に沿った圧力分布が示唆する速度助走区間の終端位置は 90° 付近である. 最大Mach数が0.7の弱い圧縮性流れを扱う本研究でも 90° 付近に助走区間が現れ、助走区間と発達した流れの区間がほぼ同じダクト長さとなることを予想して 180° 曲がりダクトを選択した.

3. 境界条件および初期条件

DNSの境界条件には無反射境界条件のNSCBC⁽⁷⁾を用いる. 解析するダクト内流れの計算領域は流入断面、流出断面および断熱滑りなし壁面の境界条件で構成される. それら境界条件について以下に簡単に述べる.

流入断面では(13)式の流入最大マッハ数 M_{max} を用いた(14)式の放物形主流速度分布を与える. 二次流れは流入断面で発生しないものとして(15)式を課す.

$$M_{max} = 0.7 \tag{13}$$

$$u_\theta(r, \theta = 0, z, t) = M_{max} (1-r^2)(1-z^2) \tag{14}$$

$$u_r(r, 0, z, t) = u_z(r, 0, z, t) = 0 \tag{15}$$

流入温度は流入速度が亜音速域であることから断面に一樣に温度 $T_m = 1$ と近似した.

流出断面では計算領域外からの流入波をLeleら⁽⁷⁾が推奨する数値的経験パラメータ $\sigma = 0.25$ を用いたモデル式より決定する.

断熱滑りなし壁面境界上では壁面に垂直な方向 i の熱流束について不浸透性を表す(16)式を課す.

$$q_i = -\frac{\mu}{(\gamma-1)Pr} \frac{\partial T}{\partial x_i} = 0 \tag{16}$$

DNSの初期条件には等温滑りなし壁面境界条件下で収束させた同Dn数流れの定常解⁽¹⁰⁾を与える. 支配方程式の空間差分に6次精度中心コンパクト・スキーム⁽⁸⁾および時間積分にオイラー法を用い、Dn=271の曲がりダクト内流れの定常層流解データベースを作成した.

4. $M=0.7$, $Dn=271$ の流れに及ぼされる曲率の影響

$z=0$ 上の代表的な半径軸方向位置 r' に固定したダクト長さ方向 θ に沿った圧力分布をおよび Fig.2(a)に、その θ 方向圧力勾配値分布を Fig.2(b)にそれぞれ示す. 擬似圧縮性解法⁽⁶⁾の結果に類似して $r'=1$ に位置する外壁面に沿った圧力分布には $\theta=38.25^\circ$ の位置にピークが現れ、助走区間の発達を表している. 外壁面上に現れる圧力ピーク分布は、Fig.2(b)に示す θ 方向圧力勾配値分布より単純なベル型曲線の構造を持つことが定量的に示される. 一方、 $r=R_c$ のダクト中心半径位置にある $r'=0$ および内壁面上に位置する $r'=-1$ に沿った圧力分布特性は複雑で、それぞれ 45° および 60° 付近の局所的な位置に逆圧力勾配値が分布している. ただし、それらの大きさは外壁面上の圧力ピークが持つ大きさに比べれば小さい. Fig.2(b)より、アスペクト比2.5のDn=271の流れでは $\theta=120^\circ$ 付近から圧力勾配値は一定に収束し始めており、収束値は半径軸方向位置 r' に依存していることが分かる. 次に、発達した助走区間を含む曲がりダクト内流れの断面内の解析結果を、外壁面上に圧力ピークが分布する位置 $\theta=38.25^\circ$ および助走区間終端付近の位置にある $\theta=121.5^\circ$ を代表的な断面に選択して示していく.

外壁面上に圧力ピークが分布する位置 $\theta=38.25^\circ$ の断面内について、Fig.3(a)に主流速度 u_θ 分布および Fig.3(b)に圧力分布をそれぞれ示す. また、Fig.3(a)および Fig.3(b)にそれぞれの分布と重ねて表示したベクトル分布は(17)式および(18)式で表されるベクトル分布をそれぞれ表す.

$$\vec{\tau} = -\frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) \vec{e}_i \tag{17}$$

$$\vec{\tau} = (-grad p)_i \vec{e}_i \tag{18}$$

断面内ベクトルなので総和規約は $i=r, z$ についてとる. (17)式および(18)式は(4)式の運動量方程式を構成する項であり、それぞれ移流項を右辺に移項した慣性力および圧力

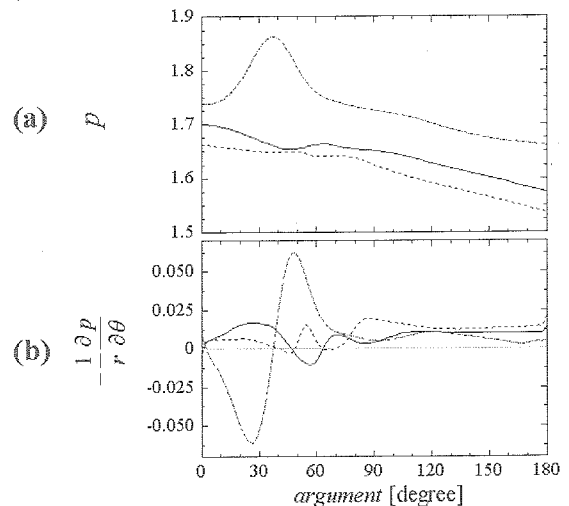


Fig.2 Distributions of (a) the pressure and (b) its θ -gradient on $z=0$ along θ . The chain, solid and dot lines indicate at $r'=1$ (outside wall), 0 (center) and -1 (inside wall), respectively.

勾配である。二次流れは特に遠心力として(19)式で定義される項が解析される。

$$\text{Centrifugal force} \equiv \rho \frac{u_\theta^2}{r} = - \text{Centripetal force} \quad (19)$$

r - θ 平面の極座標系で観測した場合、(19)式の遠心力は向きが逆で大きさが等しい向心力で表される。Fig.4に定常層流解データベースより算出した、 $z=0$ の r - θ 平面上に分布する加速度ベクトル (Navier-Stokes 方程式の移流項) を主流速度分布とともに示す。流入部は右側に位置する。曲がりダクト内流れは断面内圧力勾配が向心力として働き、主流がその慣性力方向を曲げられることにより形成される。曲げられた流れ方向は必ずしも θ 方向に平行ではなく、 r - z 断面から流れの構造を解析する場合にはメトリクス (計量) が考慮される。メトリクスの考慮により(19)式などの項が運動量方程式中に付加する形で現れるが、本質的には(4)式を構成する移流項である。従って、断面内では(4)式の移流項を右辺に移項した(17)式の見かけの加速度によって流れの構造を解析するのが自然である。

Fig.3(a)に示すように、 $\theta=38.25^\circ$ の断面内では主流速度の極大値分布は r 軸上にあり、 $r' \geq 0$ の領域にわたり加速度は全て r 軸方向について正の向きである。 $r' \geq 0$ の領域に分布する見かけの加速度ベクトルは $z=0.5$ 付近を境に z 方向の向きが反転して現れるが、これは Fig.3(b)に示す圧力分布が与える断面内圧力勾配ベクトルに依る。一方、 $r' < 0$ の領域に分布する見かけの加速度ベクトルには局所的に r 軸方向について負の向きが示される。Fig.3(b)の圧力分布と比較すると、これらのベクトルが分布する領域は $(r', z) = (-0.25, 0.75)$ 付近に極小値を持つ圧力分布に対応していることが分かる。ここで、同断面内の二次流れ構造を Fig.5(a)に断面内速度成分で構成されるベクトル分布、Fig.5(b)に(20)式で定義する速度ヘリシティ密度分布および Fig.5(c)に θ 方向圧力勾配値分布でそれぞれ示す。

$$h \equiv \vec{u} \cdot \vec{\omega} = u_i (\text{curl } \vec{u})_i \quad (20)$$

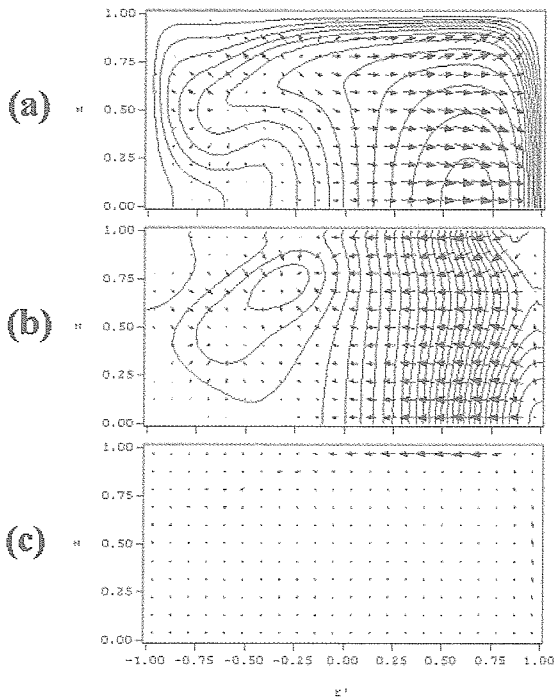


Fig.3 Vectors of (a) the acceleration with the streamwise velocity u_θ , (b) the pressure gradient with the pressure and (c) the difference acceleration in the section at $\theta=38.25$ degrees.

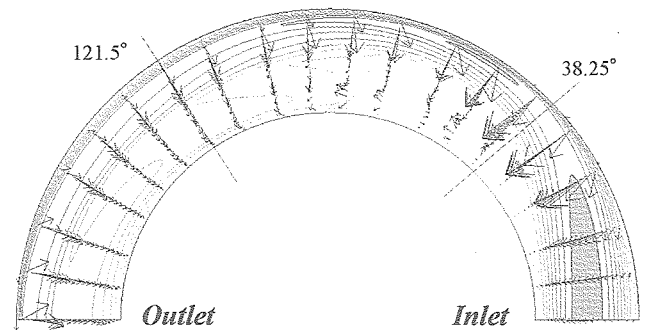


Fig.4 Vectors of the convection terms with the distribution of the stream-wise velocity u_θ on the r - θ plane at $z=0$.

以降では速度ヘリシティ密度 h をヘリシティと呼ぶ。 $\theta=38.25^\circ$ における二次流れの最大強さは同断面の主流極大値の 47%に達する。二次流れが非常に強いため、Fig.3(b)の圧力分布に $r' < 0$ で極小値が与えられるものと考えられる。ここで Fig.5(a)の断面内速度ベクトルが $z \geq 0$ の領域に描く反時計回りの大きな循環は Ekman 渦と呼ばれる。一方、 $z < 0$ の領域には大きさが等しく回転方向が逆回りの循環が形成される。断面全体では一対の Ekman 渦が形成され、二次流れパターンは 2-cell state と呼ばれている⁽¹⁻⁴⁾。Fig.5(a)との比較から、Fig.3(b)の $r' < 0$ にある圧力の極小値は Ekman 渦の内部に分布することが分かる。Fig.5(a)の二次流れパターンを Fig.5(b)のヘリシティ分布および Fig.5(c)の θ 方向圧力勾配値分布で観測すると、Ekman 渦の縦渦構造は $r' < 0$ で局所的に湾曲し、その近くでは順圧力勾配値の極大値が分布していることが分かる。Ekman 渦の $r' < 0$ に分布する順圧力勾配値は主流を駆動させている同断面内の順圧力勾配値よりも 1.7 倍ほど大きい。Fig.3(b)の断面内圧力勾配ベクトルの極大値分布の 12%である。ここで Fig.3(a)の主流速度分布と Fig.5(b)のヘリシティ分布とを比較してみると、 $r' < 0$ で内壁面および $z < 0$ にある逆回転の縦渦構造によって向きを変えられた二次流れが $r'=0$ 付近で主流速度のせん断層

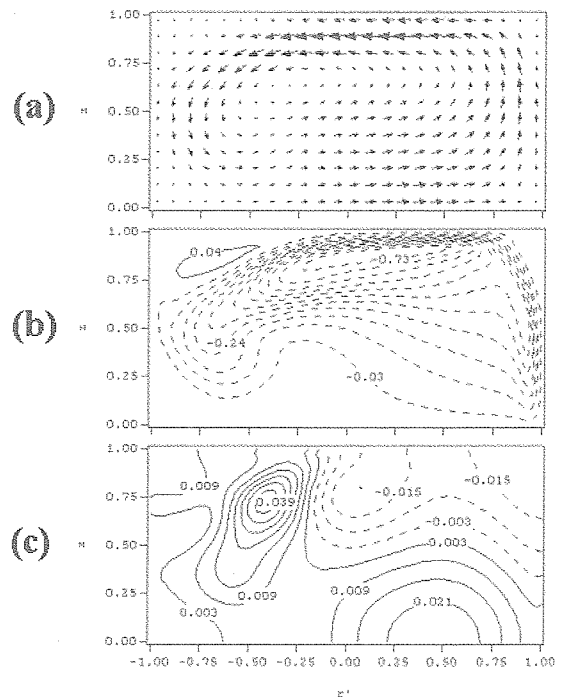


Fig.5 Patterns of the secondary flow observed by (a) the velocity components in the section and (b) the helicity at $\theta=38.25$ degrees. And (c) indicates contour of the pressure gradient of the azimuthal direction at the same section.

に到達することが分かる。二次流れ強さは最大でも同断面内の主流速度極大値の47%程度であるため、二次流れが主流速度のせん断層を横切って外壁面に到達するとは考え難い。従って二次流れに沿った流体粒子はその後、主流を駆動する順圧力勾配に沿って下流に運ばれると考えられる。これを示すように、Fig.4の $z=0$ における $r-\theta$ 平面上の加速度分布には特に $\theta=38.25^\circ$ より下流の位置で $r'<0$ の領域に発達していく θ 方向の加速度が分布している。

ところでFig.5(a)に示す二次流れの強さは上壁面上で局所的に大きく現れる。非圧縮性流れの数値解析⁽¹⁻⁴⁾でも同様に上壁面上で二次流れが強まることが示されているがその要因は解決されていない。特に力が働かない限り、速度の発達は説明されないので再び、(17)式および(18)式の断面内における力を考える。断面内の内部領域では粘性の働きが壁面近くに比べて非常に小さいと考え、断面内における内部領域の力の釣り合い式は(17)式および(18)式から

$$0 = -\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) + (-\nabla p), \quad (21)$$

である。ただし(21)式の釣り合い式は流れに与える時間発展項の寄与が十分に小さい定常層流解に適用が限る。一方、壁面近傍では粘性の働きが加わるので(21)式は成り立たない。ここで流れ方向を i 方向とし、流れがその方向に垂直な面に位置する壁面に向けて形成されている場合を考える。この時の壁面周りの流体粒子に働く力を f_i と置くと、(4)式に示す運動量方程式から力 f_i は(22)式で求まる。

$$f_i = -\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) + (-\nabla p)_i = -\frac{1}{Re}(\text{div} \boldsymbol{\tau})_i, \quad (22)$$

(22)式の右辺は Navier-Stokes 方程式の粘性項を負の値で返す記述となっているが、これは(17)式と同様に見かけの加速度であることを表している。(22)式は壁面近傍の粘性流れと内部領域の非粘性流れとの差で現れるベクトルで表されるため、以降では簡単に(22)式のベクトルを粘性差ベクトルと呼ぶ。

$\theta=38.25^\circ$ の断面に分布する粘性差ベクトルの分布をFig.3(c)に示す。内部領域では粘性の働きは小さいために粘性差ベクトルはほぼ0である。一方、壁面上では特に上壁面上に粘性差ベクトルの極大値が分布しており、その粘性差ベクトルが向く位置の下流ではFig.5(a)に示す断面内速度ベクトルの極大値が分布している。以上から、粘性差ベクトルが二次流れの局所的な加速を説明することが分かる。その他、粘性差ベクトルは壁面応力で定義されることから壁面上にも値を返す特徴を持つ。非圧縮性流れの数値解析⁽¹⁻⁴⁾を見ても二次流れが2-cell stateである場合は断面内速度ベクトルの極大値は上壁面近傍に分布するため、上壁面上で圧力および応力を測定することで2-cell state二次流れの強さが見積もられる可能性がある。

空間的に加速または減速する流れがある場合、圧縮性流れでは膨張または圧縮の構造が現れる。これは圧縮性を考慮した(3)式の連続の式が記述するもので、時間発展項の寄与が十分に小さい流れまたは定常流れの場合には(22)式で表される。

$$\bar{\mathbf{u}} \cdot \text{grad} \rho = -\rho \text{div} \bar{\mathbf{u}} \quad (22)$$

(22)式の右辺にある速度場の発散量 $\text{div} \mathbf{U}$ は正值の場合には膨張構造、負値の場合には圧縮構造を表す。

二次流れの場合、膨張または圧縮の構造は粘性差ベクトルまわりの領域にあると考えられる。簡単に、密度の空間勾配は強い遠心力によって θ 軸および z 軸方向よりも r 軸方向について卓越して現れると仮定すれば、(22)式は(23)式に近似される。

$$u_r \rho_r = -\rho \text{div} \bar{\mathbf{u}} \quad (23)$$

ここで ρ_r は密度の r 軸方向勾配を表す。遠心力により密度分布は外壁面側に単調に増加すると仮定すれば ρ_r は常に正值をとる。この場合、密度の空間輸送を表す(23)式の左辺は r 軸方向速度の方向のみに依存する。一方、密度 ρ は常に正值をとるため、結果、(23)式右辺は $\text{div} \mathbf{U}$ の性質だけから決定される。二次流れが2-cell stateである場合、 r 軸上では $u_r > 0$ であり、上壁面上では $u_r < 0$ である。従って(23)式より、 r 軸上では圧縮、上壁面上では膨張の構造であることが導かれる。Fig.6に $\theta=38.25^\circ$ の断面内における速度場の発散量 $\text{div} \mathbf{U}$ の分布を示す。図中の青および赤の領域はそれぞれ圧縮構造および膨張構造を表し、実線はそれらの境界である $\text{div} \mathbf{U} = 0$ を表す。Fig.5(a)の二次流れベクトル分布とFig.6の $\text{div} \mathbf{U}$ 分布との比較より、(23)式の近似は適当であると言える。

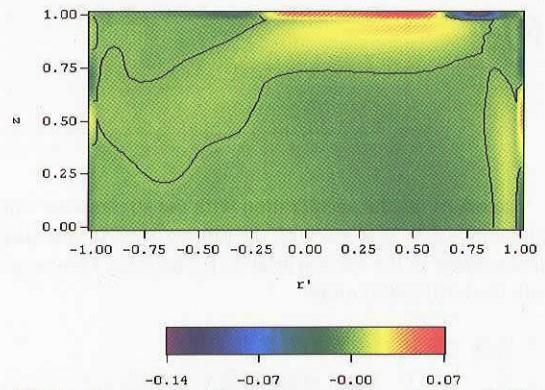


Fig.6 Distribution of the divergence of the velocity field in the section of $\theta = 38.25$ degrees. The color regions of blue and red indicate flow structures of the compression and the expansion, respectively. And the solid line indicates $\text{div} \mathbf{U} = 0$.

次に、助走区間終端付近の位置にある $\theta=121.5^\circ$ の断面について示す。Fig.7(a)に主流速度 u_θ 分布と見かけの加速度ベクトル、Fig.7(b)に圧力分布と圧力勾配ベクトルおよびFig.7(c)に粘性差ベクトルをそれぞれ示す。ここで、Fig.7のベクトル分布の極大値はFig.3に示す上流 $\theta=38.25^\circ$ の37%になる。また、Fig.7の等値線図に灰色で示した領域は極大値分布を表す。

Fig.7(a)が示すように、主流速度 u_θ 分布は上流よりも複雑化し、その極大値は r 軸上以外にも分布、外壁面側コーナー付近にある極大値が断面内で最大値をとる。 $r' < 0$ に分布する主流速度分布の極大値は、Fig.5(c)に分布する上流の θ 方向圧力勾配値の極大値分布が与えたものと説明される。二次流れが与える圧力分布への影響はFig.7(b)から明らかのように、上流のFig.3(b)のように $r' < 0$ の領域に強く縦渦構造を与える程には発達しておらず、 z 方向勾配が局所的に小さく現れる程度である。Fig.7(c)の粘性差ベクトルは上壁面以外ではほぼ0となっており、上壁面上で極大値が $r' \geq 0$ および $r' < 0$ にそれぞれ一つずつ現れている。

同断面内の二次流れ構造をFig.8(a)に断面内速度成分で構成されるベクトル分布、Fig.8(b)にヘリシティ分布およびFig.8(c)に θ 方向圧力勾配値分布でそれぞれ示す。二次流れも主流速度分布と同様に、下流のFig.8は上流のFig.5と比べて複雑化している。二次流れ強さは同断面に分布する主流速度極大値分布の19%である。上流で大きな循環を形成していたEkman渦は上壁面上に弱く分布する。このEkman渦はFig.8(a)の断面内速度ベクトル分布からは判別し難いが、Fig.8(b)のヘリシティ分布からは粘性差ベクトルに対応するように $r' \geq 0$ および $r' < 0$ にそれぞれ一つずつ極小値を

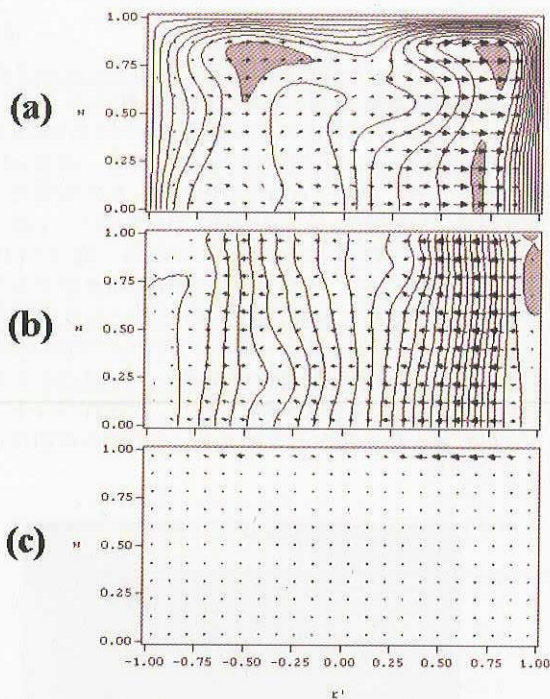


Fig.7 Vectors of (a) the acceleration with the streamwise velocity u_θ , (b) the pressure gradient with the pressure and (c) the difference acceleration in the section at $\theta=121.5$ degrees. Gray regions indicate the local maximums.

持った渦層であることが分かる。

ここで、上流で 2-cell state の簡単な構造であった二次流れが下流で複雑化していることを説明するためにヘリシティ分布の空間発展構造を Fig.9 に示す。ただし、可視化の都合から $z \leq 0$ のダクト領域について示す。Fig.9 の手前はダクト流入部を示し、緑およびオレンジの色で示す等値面は大きさの絶対値が等しく、紙面に対してそれぞれ時計回りおよび反時計回りの縦渦構造を表している。縦渦の空間発展構造を以下に概略する。

流入断面直後より壁面曲率の影響を受けて底面上にヘリシティ層が形成され始め、主流がさらに外壁面に近づくとき外壁面上にも縦渦構造が発達し始める。ほぼ直後には内壁面上にも縦渦構造が発達し始める。Fig.5 に示したように、 $\theta=38.25^\circ$ 付近から二次流れと主流のせん断層とが干渉し始め、ヘリシティ層の $r < 0$ に湾曲した分布を与える。 $Dn=271$ の流れではヘリシティ層に湾曲を与える強い二次流れを壁面上で十分に拡散させることができず、結果、Fig.9 の $\theta=90^\circ$ 手前で観測されるヘリシティの分岐構造が現れる。この分岐の過程で誘導速度により分岐したヘリシティと底面上に分布するヘリシティ層との間に逆回転のヘリシティが $\theta=135^\circ$ 付近までにかけて与えられる。

ヘリシティ分布の空間発展構造により、曲がりダクトの助走区間で支配的な縦渦の形成メカニズムは以上のように説明される。補足として、助走区間で形成される縦渦構造は底面上の縦渦構造を除き、下流で主流速度のせん断層と干渉するために減衰していく。Fig.10 に $\theta=121.5^\circ$ の断面に現れる膨張および圧縮構造を示す。実線の閉曲線で示される内部領域の分布は弱い圧縮構造を表しており、前述のようにこの圧縮構造は二次流れと主流のせん断層との干渉で与えられる。

最後に、定常層流解データベースより圧縮性を考慮した速度変曲点について解析した。Fig.11 および Fig.12 にそれぞれ $\theta=38.25^\circ$ および $\theta=121.5^\circ$ の断面内の変曲点分布を示す。ここで、図(a)および図(b)はそれぞれ(24)式の主流速度

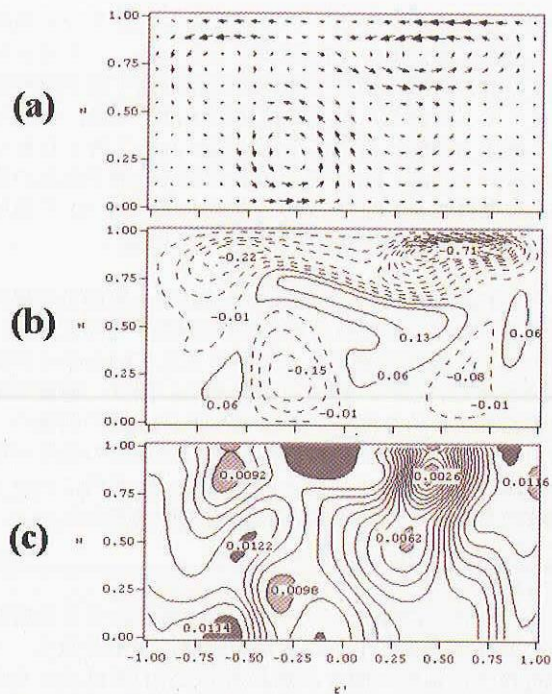


Fig.8 Patterns of the secondary flow observed by (a) the velocity components in the section and (b) the helicity at $\theta=121.5$ degrees. And (c) indicates contour of the pressure gradient of the azimuthal direction at the same section. Regions of dark or light gray represent the local maximum or the local minimum.

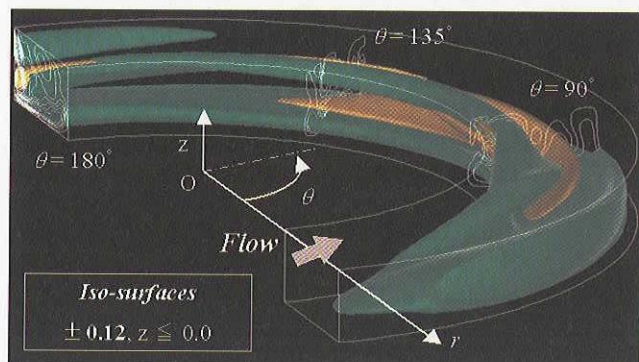


Fig.9 The 3-dimensional structure of the helicity in the half bottom region of the curved duct, the front section is the inlet. Green and yellow regions indicate the helicity of clockwise and counter-clockwise direction, respectively.

勾配および(25)式を満たす速度変曲点の分布を表す。

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\rho \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) = 0 \quad \text{または} \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) = 0 \quad (24)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho \frac{\partial u_\theta}{\partial x_i} \right) = 0 \quad (25)$$

図中には r 軸および z 軸方向の分布についてそれぞれ実線および破線で示す。

Fig.11 に示す $\theta=38.25^\circ$ の断面では、Fig.3(a)に示したように r 軸上に主流速度の極大値が分布することから外壁面近傍に険しい主流速度勾配が現れる。険しい速度勾配が分布する外壁面近傍では r 軸方向の変曲点が分布しており、さらに $z \geq 0.5$ の外壁面近傍には逆圧力勾配が分布していることが Fig.5(c)の θ 方向圧力勾配値分布より分かるため、助走区間での強い遷移が予想される。一方、Fig.12 に示す下流では外壁面側のコーナー近くに r 軸および z 軸の各軸方向について険しい速度勾配が分布しているが、変曲点と重なる領域は上流に比べて小さく、Fig.8(c)の θ 方向圧力勾配

値分布は断面内にわたり正值をとるため、下流が持つ遷移の構造は非常に弱いものと結論される。

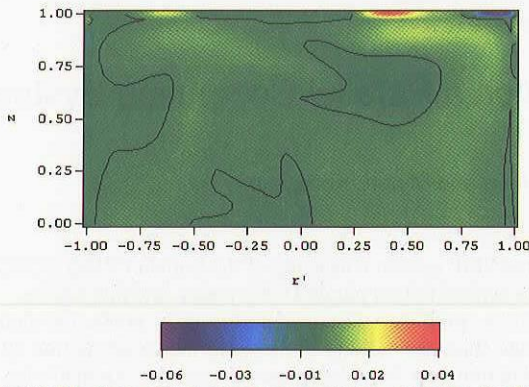


Fig.10 Distribution of the divergence of the velocity field in the section of $\theta = 121.5$ degrees. The color regions of blue and red indicate flow structures of the compression and the expansion, respectively. The solid line indicates $\text{div } U = 0$.

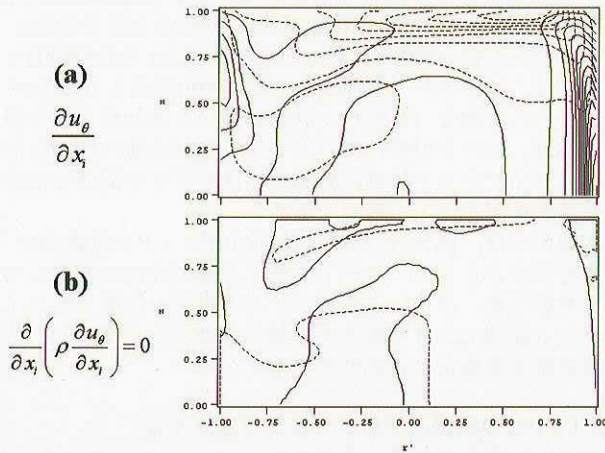


Fig.11 Contours of (a) and (b) indicate the velocity shear of u_θ and the generalized inflection point of u_θ in the section of $\theta = 38.25$ degrees. Here, contours with the solid line and the broken line indicate the gradient direction of r and z , respectively.

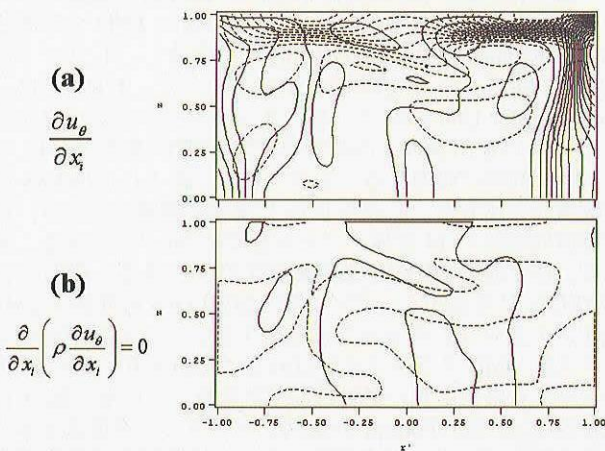


Fig.12 Contours of (a) and (b) indicate the velocity shear of u_θ and the generalized inflection point of u_θ in the section of $\theta = 121.5$ degrees. Here, contours with the solid line and the broken line indicate the gradient direction of r and z , respectively.

5. まとめ

圧縮性 DNS より $Dn=271$ および $Mach=0.7$ の高曲率 (ダクト曲率 $\delta^{-1}=2.5^{-1}$) 曲がりダクト内高速流れの層流解を求め、そのデータベースより速度助走区間の流れを解析して以下の知見を得た。

- (1) 流れ方向圧力勾配値は助走区間の終端以降で一定値に収束する傾向にあるが、その大きさは r の位置に依存している。 180° の位置にある流出部付近では外壁面側よりも内壁面側に分布する流れ方向圧力勾配値の方が大きく現れるが、これは助走区間で現れる強い渦構造が下流に与える影響と思われる。一方、助走区間における流れ方向圧力勾配値は空間的に大きく変動し、断面内では外壁面側のコーナー領域に逆圧力勾配値が分布する。この領域ではさらに、外壁面近傍に険しい速度勾配を持つ変曲点が分布することから強い遷移の構造が示唆される。
- (2) 縦渦構造をヘリシティ分布で解析し、断面内の流れ方向圧力勾配値の極値分布および速度発散分布との関係が明らかになった。特にヘリシティ分布の空間発展構造の解析から、助走区間で分岐する Ekman 渦の構造が下流に複雑な二次流れを与えることが分かった。さらに、この縦渦構造と主流のせん断層との干渉がダクトの内部領域に圧縮構造を与えることが分かった。

参考文献

- 1) Bara, B., Nandakumar, K. and Masliyah, J. H.: An experimental and numerical study of the Dean problem: flow development towards two-dimensional multiple solutions, *J. Fluid Mech.*, 244 (1992) 339-376
- 2) Mees, P. A. J., Nandakumar, K. and Masliyah, J. H.: Instability and transitions of flow in a curved duct: the development of two pairs of Dean vortices, *J. Fluid Mech.*, 314 (1996) 227-246
- 3) Mees, P. A. J., Nandakumar, K. and Masliyah, J. H.: Secondary instability of flow in a curved duct of square cross-section, *J. Fluid Mech.*, 323 (1996) 387-409
- 4) Mees, P. A. J., Nandakumar, K. and Masliyah, J. H.: Steady spatial oscillations in a curved duct of cross-section, *Phys. Fluid*, 8 (1996) 3264-3270
- 5) Winters, K. H.: A bifurcation study of laminar flow in a curved tube of rectangular cross-section, *J. Fluid Mech.*, 180 (1987) 343-369
- 6) Soh, W. Y.: Developing fluid flow in a curved duct of square cross-section and its fully developed dual solutions, *J. Fluid Mech.*, 188 (1988) 337-361
- 7) Poinso, T. J. and Lele, S. K.: Boundary conditions for direct simulations of compressible viscous flow, *J. Comput. Phys.*, 101(1992) 104-129
- 8) Lele, S. K.: Compact finite difference schemes with spectral-like resolution, *J. Comput. Phys.*, 103(1992), 16-42
- 9) 渡辺大輔, 小泉博義, 前川博: 曲がり管における縦渦構造の不安定性, 第14回数値流体力学シンポジウム, B03-2, 2000
- 10) Ozaki, K. and Maekawa, H.: Curvature effects in the curved duct for the compressible viscous flow, *ICAS congress 2004*, 3.6.1(2004)