

低速流れの非定常計算における人工粘性の影響

向井純一
宇宙航空研究開発機構

Influences of Artificial Viscosity Terms on Unsteady Calculation of Low-Speed Flowfield

by
Junichi Mukai (JAXA)

ABSTRACT

When computational simulation for low Mach number flows is conducted with a compressible flow solver, its performance deteriorates in terms of both convergence speed and accuracy. The deterioration of accuracy is caused by excessive artificial viscosity in low Mach flow regions. In order to improve convergence of an iterative method, a local preconditioning method for low speed flow is frequently used. The preconditioning method minimizes the wave speed range between a particle wave and an acoustic wave. When the preconditioning method is applied to an upwind scheme, its artificial viscous terms need to be modified by preconditioning matrix. This modification cures the accuracy problem of calculated flows in the low-Mach flow regions. In this paper, the effects of the preconditioning method on unsteady calculation of flows around an airfoil are discussed.

1. はじめに

圧縮性流体用の計算コードで、低マッハ数流れの計算を行うと、音速と流速が大きく異なるために、解の収束性が悪くなってしまう。所謂 stiffness と呼ばれるこの問題を解消するための方法として、時間微分項に適当な行列をかけることで、計算上のみかけの音速を流れの速さと同程度にして解を求める前処理法⁽¹⁻⁶⁾が使われている。

また圧縮性流体コードによる低マッハ数流れ場解析におけるもうひとつの問題点として、対流項流束の評価に風上型のスキームを用いると、マッハ数が小さい領域において、運動量保存式に対する人工粘性の大きさが過剰になることが理論的に示されている^(2,7)。このことが原因で翼型周りなどの定常解析において、流れが低速になると正しい解が得られなくなることが知られている⁽⁷⁾。前処理法においては、前処理行列を用いて人工粘性項の修正を行うことで、この計算精度の問題も解消される。

このように圧縮性流体コードにおける低マッハ数流れでの計算精度の悪化については、定常計算においては解析例が存在するが、非定常計算においては渦の移流など簡単な例^(3,4,6)を除いては認められない。そこで本件究では、マッハ数 0.1 程度の翼型周り流れにおいて、通常の圧縮性コードでの計算結果と前処理法を用いた計算結果との比較を行うことで、人工粘性の違いが非定常解にどの程度影響を与えるかについて議論する。

2. 計算手法

前処理法を用いた有限体積法による非定常計算について、Euler 方程式を例にとって説明する。Navier-Stokes 方程式の場合は、単に粘性項を付加するのみでよい。前処理法では擬似時間 τ による擬似

時間項と前処理行列 Γ を導入して次の差分式を用いる⁽⁴⁾。

$$\Gamma \frac{W^{s+1} - W^s}{\Delta \tau} + \frac{3Q^{s+1} - 4Q^n + Q^{n-1}}{2\Delta t} + \frac{1}{V} \sum_{face} F^{s+1} = 0$$

$$Q = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, e), \quad W = (\rho, u, v, w, T)$$

ただし、ここでは時間微分項は片側 2 次精度で差分近似したものを考えた。なお、 V はセルの体積、 F はセル表面における流束、 n は物理時間を示すインデックス、 s は内部反復を示すインデックスである。

内部反復における時間進行法を行うに当たって、 s に関して差分式を次のように線形化する。

$$W^{s+1} = W^s + \delta W^s$$

$$\left[I + \frac{3\Delta \tau}{2\Delta t} \Gamma^{-1} \frac{\partial Q}{\partial W} + \Delta \tau \frac{1}{V} \Gamma^{-1} \sum \frac{\partial F}{\partial W} \right] \delta W^s = -\Delta \tau \Gamma^{-1} \left[\frac{3Q^s - 4Q^n + Q^{n-1}}{2\Delta t} + \frac{1}{V} \sum F^s \right]$$

$n+1$ ステップでの解は、 W^n までの解が求まっているとして、内部反復を行い、 W^s が十分収束した時点で $W^{n+1} = W^s$ とする。本研究では、内部反復の時間進行法に Matrix Free Gauss-Seidel 陰解法⁽⁸⁾を用いた。なお、比較のために行った前処理法を用いない通常の圧縮性コードでの計算においては、擬似時間項は付加せずに Newton 反復による陰解法を用いて計算している。

前処理行列 Γ として Weiss 等⁽¹⁾のものをを用いた。その表式は、 h をエンタルピー、 c_p を定圧比熱として以下のようなになる。

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \rho'_p & 0 & 0 & 0 & \rho_T \\ u\rho'_p & \rho & 0 & 0 & u\rho_T \\ v\rho'_p & 0 & \rho & 0 & v\rho_T \\ w\rho'_p & 0 & 0 & \rho & w\rho_T \\ h\rho'_p - 1 & \rho u & \rho v & \rho w & \rho h_T + h\rho_T \end{pmatrix}$$

ここで、理想気体の場合には、

$$\rho_T = -\frac{\rho}{T}, \quad h_T = c_p, \quad \rho'_p = \frac{1}{U_r^2} + \frac{1}{h}$$

である。\$U_r\$は局所的な流速に応じて以下のように決める。

$$U_r = \begin{cases} \varepsilon c, & \text{if } |\mathbf{u}| < \varepsilon c \\ |\mathbf{u}|, & \text{if } \varepsilon c < |\mathbf{u}| < c \\ c, & \text{if } |\mathbf{u}| > c \end{cases}$$

ここで、\$\varepsilon\$は淀み点付近のように流速がほぼ0となるところで前処理行列が特異点を持つことを防ぐためのカットオフ値である。\$\varepsilon\$の値によって計算の安定性が左右され、外部流の場合では一様流のマッハ数と同じ程度に取れば良いとされているが、一般的にどのように与えれば良いのかはまだ知られていない。

このとき、\$\Gamma^{-1}\partial F/\partial W\$の固有値\$\lambda\$は、通常の圧縮性の方程式における固有値\$U, U, U, U+c, U-c\$とは異な

$$\begin{aligned} \lambda &= U, U, U, U+c', U'-c' \\ U &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, & U' &= U(1-\alpha), \\ c' &= \sqrt{\alpha^2 U^2 + U_r^2}, & \alpha &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{U_r^2}{c^2} \right) \end{aligned}$$

となり、低速領域における固有値の大きさが全て\$U\$のオーダーとなる。これに対し、通常の圧縮性の方程式では、低速領域では\$U \ll c\$であるため、固有値の大きさがアンバランスとなり、解の収束性と精度の悪化が認められている。また、超音速領域では常に\$U_r = c\$であり、このとき\$\Gamma = \partial Q/\partial W\$となるため、固有値は通常の圧縮性の方程式と同一のものになる。

対流項の評価は、Roe平均を用いたFlux Difference Splittingを用いた場合には、数値流束は次のように表すことができる。

$$\tilde{F} = \frac{1}{2}(F_R + F_L) - \frac{1}{2} \left| \frac{\partial F}{\partial W} \right| \Delta W$$

前処理法を使うことにより、音速の大きさが擬似的に変更されているため、人工粘性項も変更された波の速さに合わせて、前処理行列を用いて次の修正を施す。

$$\tilde{F}_{pre} = \frac{1}{2}(F_R + F_L) - \frac{1}{2} \Gamma^{-1} \left| \Gamma \frac{\partial F}{\partial Q} \right| \Delta Q$$

また本研究では、セル境界の両側での値\$F_R\$と\$F_L\$の評価に3次精度のMUSCL法を用いており、制限関数は使用していない。

本研究では計算コードとしてUPACS⁽⁹⁻¹¹⁾を用いた。なお粘性項の評価には2次精度中心差分を用いた。

3. 定常計算による比較

時間微分項が十分小さくなったとき、両計算方法における方程式の上での差異は、対流項の人工粘性のみである。そこでまず、低マッハ数流れでの人工粘性の振る舞いの違いを確認するために、NACA0012周りの流れについて定常計算を行った。亜音速流れにおいては、迎角とレイノルズ数を固定し、一様流の速さを小さくしていくと、翼にかかる抵抗は徐々に減少して一定値になるはずである。そこで、レイノルズ数を\$2.88 \times 10^6\$、迎角を2度とし、マッハ数を0.2, 0.1, 0.05, 0.01と変化させた計算を行った。乱流モデルはSpalart-Allmaras 1方程式乱流モデルを用いた。計算格子は約6.2万点のC型格子を用いた。

両者の計算結果より得られた抵抗係数\$C_d\$を圧力抵抗\$C_{dp}\$と摩擦抵抗\$C_{df}\$に分けて比較したものを表1に示す。前処理法を用いた結果ではマッハ数が小さくなると徐々に抵抗が減少しているのに対して、通常の圧縮性コードでの結果は逆に抵抗が大きくなっている。両者の結果とも、どのマッハ数においても摩擦抵抗はほぼ一定値であり、抵抗の傾向の違いは圧力抵抗からの寄与である。圧力抵抗は一様流流速が小さくなるとともに減少し、一定値に近づくはずなので、この通常の圧縮性コードでの傾向は非物理的なものである。また全ての計算結果は、ほぼマシンゼロまで収束させているので、通常の圧縮性コードにおいて圧力抵抗が増大しているのは、流れが非常に遅い場合に人工粘性の大きさが増えたことが原因である。図1に示したのは、それぞれの結果における圧力係数(\$C_p\$)の空間分布である。通常の圧縮性コードの結果では、後縁付近の等高線が非物理的に折れ曲がっていることから、人工粘性の増大が翼のこの部分での圧力場に大きな影響を与えていることが確認できる。

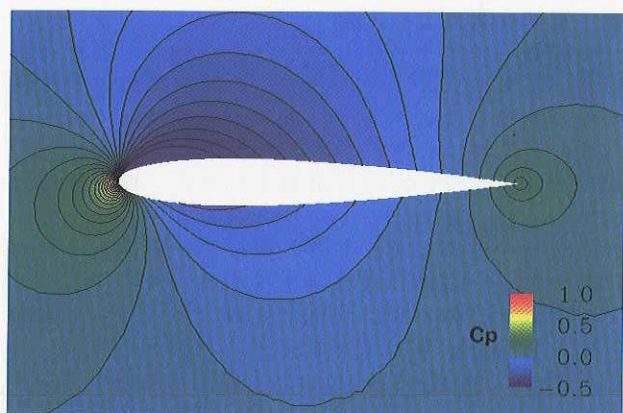
表1. NACA0012 定常計算 抵抗係数の比較
(単位は count)

Mach	\$C_d\$ Precond.	\$C_{dp}\$	\$C_d\$ w/o Precond.	\$C_{dp}\$
		\$C_{df}\$		\$C_{df}\$
0.2	95.0	19.6	95.2	19.8
		75.4		75.4
0.1	94.9	19.1	96.4	20.6
		75.8		75.8
0.05	94.8	19.0	98.9	23.1
		75.9		75.7
0.01	94.8	18.9	114.9	40.9
		75.9		74.0

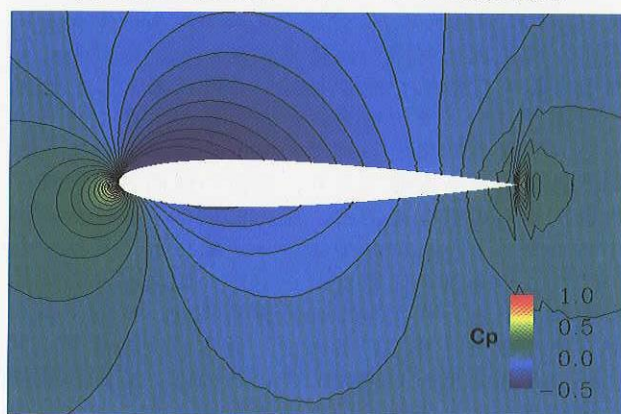
4. 非定常計算での計算結果

4-1 2次元計算

NACA64A-006周りの流れについて、前処理法を用いたコードと通常の圧縮性コードで2次元非定常計算を行って結果を比較した。計算条件はレイノルズ数が\$5.8 \times 10^6\$、迎角8度、マッハ数0.17である。乱流モデルは用いていない。計算格子点数は約3万点でこの種の剥離流れの非定常現象をシミュレートするには粗いものを用いている上、二次元計算であるた



(a) 前処理法を用いたコードでの計算結果



(b) 通常の圧縮性コードでの計算結果

図 1. 圧力係数の空間分布

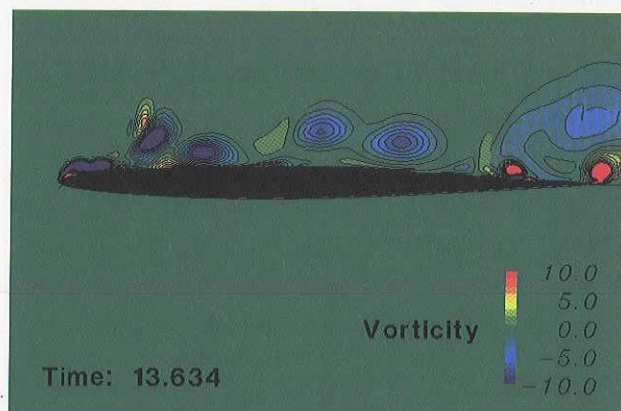
め、得られる結果は正しく流れ現象を表現してはいない。しかし、発生した渦の大きさなど、計算により得られた流れ場の特徴について比較を行うことで、両計算による解の性質が明確に比較でき、実規模計算を行う際の適応性が議論できる。

図 2 はそれぞれの結果についての瞬時の渦度分布である。この条件における NACA64A-006 周りの流れは前縁付近から層流剥離する。剥離した流れは、せん断層を形成して渦を巻き始めるが、通常の圧縮性コードで計算を行うと、前処理法を用いて計算した結果に比べ、剥離せん断層が安定しており、比較的下流側の位置で渦が巻き始める。また発生した渦自体の大きさも大きい。

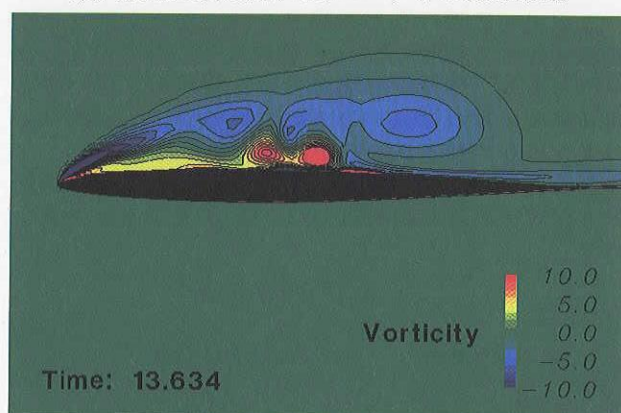
図 3 は対流項を中心差分と人工粘性に分けて考えたときの主流に対して垂直方向の人工粘性項の大きさをそれぞれの結果の瞬時場について比較したものである。通常の計算法では、前縁付近のせん断層に沿って人工粘性項が大きくなっている。これは、せん断層を跨いで流れの向きが逆方向になっており、せん断層に沿って流れが遅い領域があることに起因する。この遅い流れ領域での過剰な人工粘性がせん断層を安定化させ、渦の巻き始める位置が下流側へと遅れる。

さらに発生した渦についても、その中心付近では流速が遅い領域が存在するので、人工粘性による散逸の効果のために個々の渦が大きくなっている。図 4 は、翼表面での圧力係数分布の時間平均値である。流れが渦を巻くとその中心付近の圧力は低下するが、

この図からも、前処理法を用いていない計算では渦を巻き始める位置が比較的下流側にあるため、翼表面の負圧のピークも 40%コード長付近に認められる。

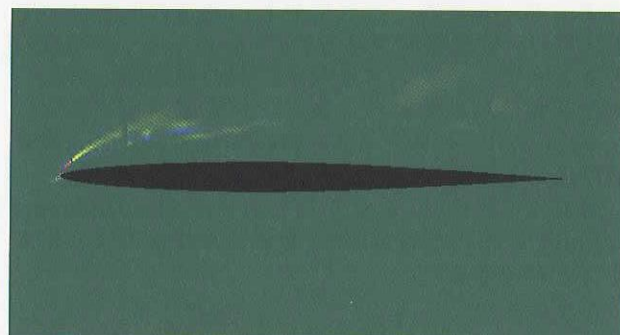


(a) 前処理法を用いたコードでの計算結果

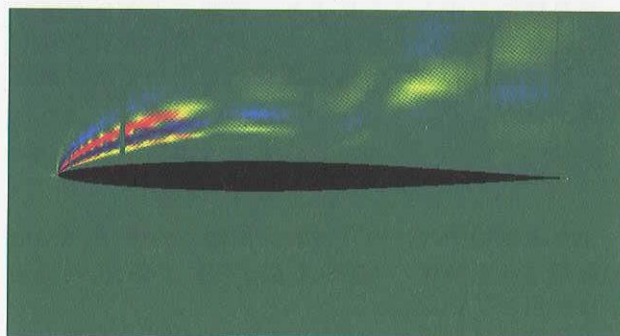


(b) 通常の圧縮性コードでの計算結果

図 2. 渦度分布の瞬時場



(a) 前処理法を用いたコードでの計算結果



(b) 通常の圧縮性コードでの計算結果

図 3. 流れと垂直方向の人工粘性項の大きさ

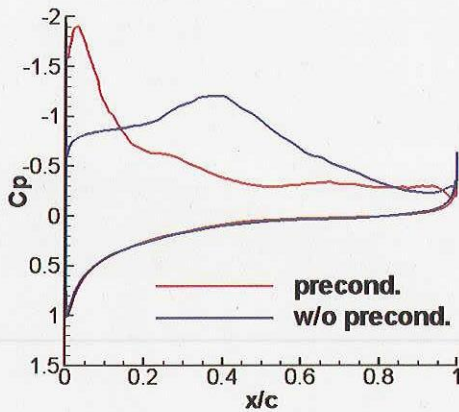


図4. 翼表面での時間平均圧力係数分布の比較

4-2 実規模3次元計算

前節では前処理法を用いた場合と用いない場合での非定常計算結果の違いを明確にするため、単純な流れ場について比較を行った。両者の計算結果の違いは、人工粘性の大きさに起因するものなので、格子の解像度を上げれば、人工粘性の大きさの差が小さくなり、両者の結果は近づくことが予想される。そこで、この節では現状行われている規模のLES計算における、マッハ数0.1程度の翼周りの流れで、結果にどのような影響があるかを実用性の観点から調べる。

翼型形状はLRN(1)-1007で、翼厚7.3%、反り比5.9%の翼型である。解析条件はマッハ数を0.1、翼弦長(c)と一様流速を基準としたレイノルズ数は 0.3×10^6 とし、迎角は $\alpha = 12.0$ 度とした。この条件において流れは前縁付近から剥離し、その後乱流に遷移し再付着することが実験により確かめられている。

計算格子にはC型格子を用いた。解析領域はスパン方向に $0.1c$ の長さを取り両端に周期境界条件を課した。遠方境界は翼から $30c$ 離れた位置に設定した。翼回り方向、翼面垂直方向、スパン方向の格子点数はそれぞれ551点、98点、31点である。このうち翼面には上面側に351点、下面側に101点の格子を配置した。また翼上面側の流れ方向の格子幅は、最大でもスパン方向の格子幅程度になるようにした。なお総格子点数は約170万点になっている。翼断面での計算格子を図5に示す。この格子の翼上面側の格子の解像度については、翼垂直方向が $y^+ \leq 1$ 、流れ方向とスパン方向にそれぞれ $x^+, y^+ \leq 100$ になっており、現状行われるLES解析で使われる計算格子の解像度に近いものになっている。

LES解析手法としては、SGSモデルに標準Smagorinskyモデルを用い、 $C_s = 0.1$ とした⁽¹²⁾。壁面近傍ではVan Driestのダンピングを用いた。なお、時間刻み幅は無次元時間で $dt = 2 \times 10^{-4}$ として計算を行った。

両計算結果について、ある瞬間での渦度の絶対値の等値面の比較を図6に、半スパン断面での圧力場の比較を図7に示す。ここでの計算結果においても前節の結果と同様に、通常の圧縮性コードで計算したものは、発生した個々の渦構造が前処理法を用い

て計算したものより大きくなっている。その結果、渦中心付近での負圧が大きくなるため、全体的な圧力変動の大きさも大きくなっている(図8)。

図9は、等高線でグリッドスケールでの乱れエネルギーの時間平均値を、白い線で時間平均流れ場の流れ方向の速度が0である領域を表したものである。LESモデルには乱流遷移のモデルは入っていないが、グリッドスケールにおいてそれと同等の現象が捉えられており、両者の結果とも前縁付近に剥離泡が観察される。前節で示したのと同様に、通常の圧縮性コードによる結果では流れが遅い領域において人工粘性が過大になるために、剥離せん断層が安定化して乱流エネルギーの発達が遅れている。その結果として剥離泡の再付着点位置が下流側へと遅れ、剥離泡の長さが長くなっている。また、図10に示したように全体的な表面圧力係数分布の時間平均値についても明確な違いが認められる。

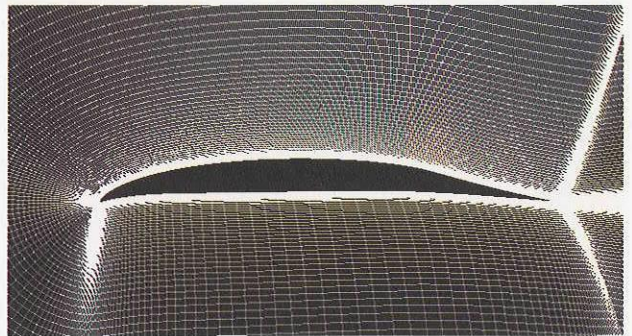
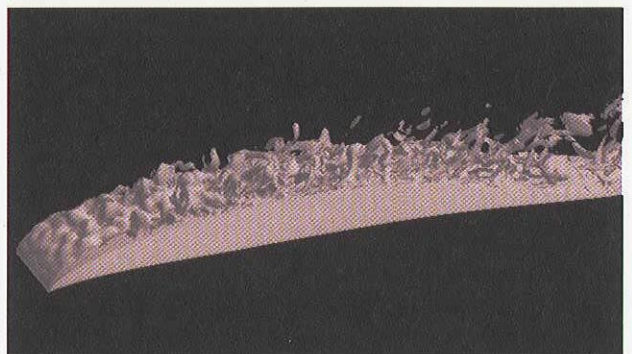
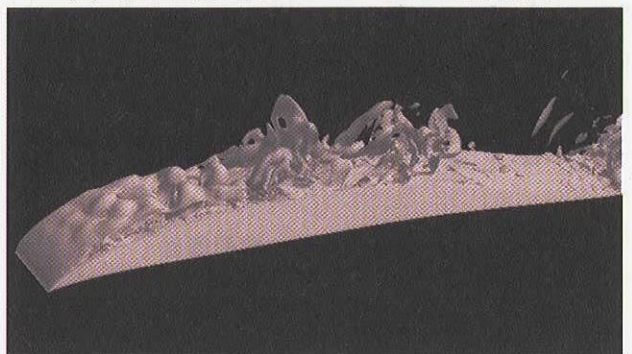


図5. 計算格子 LRN(1)-1007

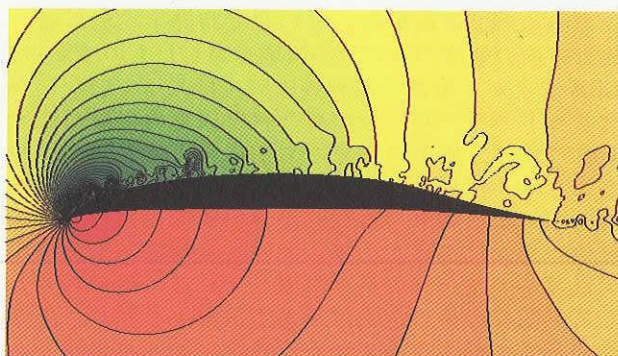


(a) 前処理法を用いたコードでの計算結果

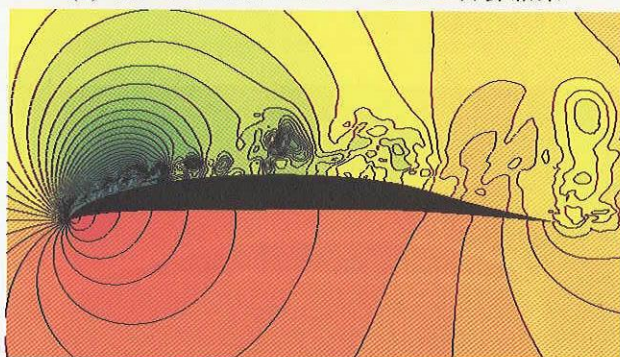


(b) 通常の圧縮性コードでの計算結果

図6. 渦度の絶対値の瞬時場の比較

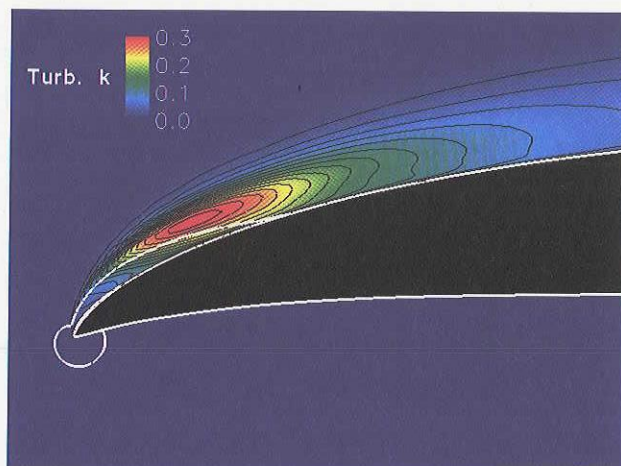


(a) 前処理法を用いたコードでの計算結果

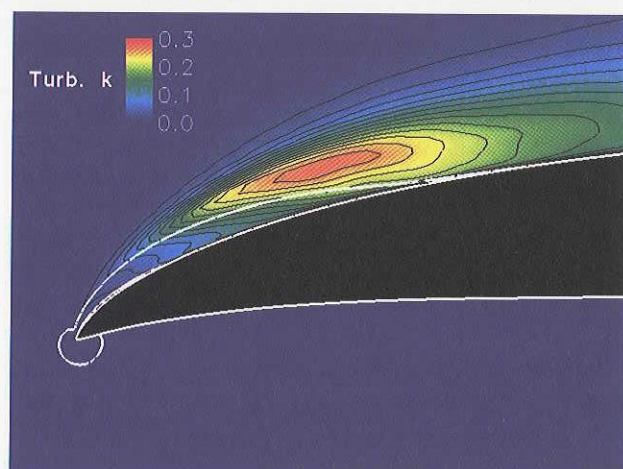


(b) 通常の圧縮性コードでの計算結果

図7. 圧力分布の瞬時場の比較



(a) 前処理法を用いたコードでの計算結果



(b) 通常の圧縮性コードでの計算結果

図9. 乱流エネルギーと逆流領域の比較

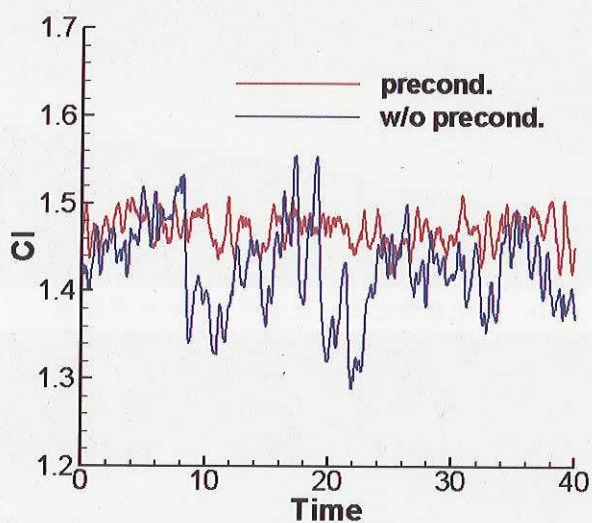


図8. 揚力係数の時間履歴

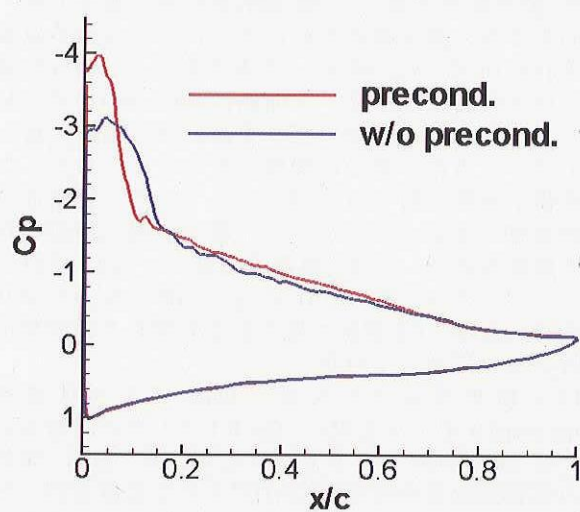


図10. 翼表面での時間平均圧力係数分の比較

5. まとめ

低マッハ数流れの非定常計算における通常の圧縮性流体解法と前処理法を用いた解法との結果の違いを比較した。

まず、NACA0012 周りの流れ場を計算することによって、Roe の FDS を用いた通常の圧縮性流体解法では、低速流れの領域で人工粘性が過大になり、計算精度が悪化するが、前処理法を用いた解法では、翼に働く抵抗のマッハ数依存性の傾向が正しく計算できることが示された。

次に、この低速流れ領域での人工粘性の振る舞いの違いによる非定常計算結果に対する影響を明確にするために、NACA64A-006 周りの 2 次元非定常計算を行った。その結果、前縁付近より剥離したせん断層が渦を巻く位置と発生した渦の大きさについて、2 つの計算法で大きく違いが出ることを確認できた。このため、平均表面圧力係数分布の時間平均値についても明らかな違いが現れた。

これらの両者の計算結果の違いは低速領域における人工粘性項の大きさの違いによるものであるため、格子の解像度を上げると両者の結果は近づくことが予想される。そこで最後に、現状行われている規模の LRN(1)-1007 周りの LES 非定常計算において、通常の圧縮性解法と前処理法を用いた解法でどの程度結果に違いが出るかを比較した。その結果、前処理法を用いた解法の方が小さい渦構造まで解像できており、時間平均の表面圧力係数分布においても両者に明確な違いが認められた。この計算において一様流のマッハ数は 0.1 であったが、同じ解像度の格子を用いてさらに低速の流れを計算した場合、その結果の差は顕著になる。また、この計算より速い流れ計算においても、非定常剥離流れで重要な物理現象となる剥離せん断層や渦中心などにはマッハ数が低い領域が常に存在するので、解全体に与えるそこからの影響も無視することが出来ないと推測される。

参考文献

- (1) J. M. Weiss and W. A. Smith, "Preconditioning Applied to Variable and Constant Density Time-Accurate Flows on Unstructured Meshes", *AIAA paper* 94-2209, 1994
- (2) E. Turkel, "Preconditioning Techniques in Computational Fluid Dynamics", *Annual Review of Fluid Mechanics*, 31, 385-416, 1999
- (3) E. Turkel and V. N. Vatsa, "Choice of Variables and Preconditioning for time Dependent problems", *AIAA paper*, 2003-3692, 2003
- (4) S. Venkateswaran and C. L. Merkle. "Dual Time Stepping and Preconditioning for unsteady Computation", *AIAA paper* 95-0078, 1995
- (5) S. Venkateswaran and C. L. Merkle. "Efficiency and accuracy issues in contemporary cfd Algorithms", *AIAA paper*, 2000-2251, 2000
- (6) 向井純一, 他, "前処理法による非定常低速流れの数値解析の精度", 航空宇宙数値シミュレーション技術シンポジウム 2003 論文集, 宇宙航空研究開発機

構特別資料 JAXA-SP-03-002, 2004, pp.137-142

- (7) C. Viozat, "Implicit Upwind Schemes for Low Mach Number Compressible Flows", *INRIA Report*, No.3084, 1997
- (8) 嶋英志, "構造/非構造格子 CFD のための簡単な陰解法", 第 29 回流体力学講演会講演集, 1997, pp. 9325-328
- (9) Takaki, R., Yamamoto, K., Yamane, T., Enomoto, S. and Mukai, J., "The Development of the UPACS CFD Environment," *High Performance Computing, Proceedings of ISHPC* 2003, Springer, 2003, pp. 307-319.
- (10) <http://www.ista.jaxa.jp/aet/cfd/cfd-e01.html>
- (11) Imamura, T., Enomoto, S., Kato, H., Yokokawa, Y., and Yamamoto, K., "Numerical Simulation of NACA0012 Wingtip Flow Leading to Noise Generation", *AIAA paper* 2005-2864, 2005
- (12) Smagorinsky, J., "General Circulation Experiments with the Primitive Equations", *Mon. Weath. Rev.*, Vol.91, No.3, pp.99-164