

# 初期データに起因するスプリアス解について

岸 恭子, 高橋 匡康

(宇宙航空研究開発機構 総合技術研究本部)

## On the spurious solutions caused by initial data

by

Kyoko KISHI, Tadayasu TAKAHASHI

### ABSTRACT

In this article we focus our attention on two dimensional cavity flows governed by the Navier-Stokes equations for incompressible viscous flows and corresponding mathematical model. The initial state of the cavity problem is approximated by impulsive start which contains discontinuity of velocity field. We show the existence of constraints for initial values by considering theoretical properties of solution to the cavity problem.

## 1. 序論

流体の非定常現象に対する数値シミュレーションを行うためには、流体運動を記述する支配方程式に適切な初期条件及び境界条件を組み合わせた数学モデルを立て、これを離散近似することにより数値解を得ることになる(図1)。このとき、特に流体の非定常現象の発生及び発達を正しく捉える上で、解析対象となる流体現象に応じた初期状態を表す適正な初期条件を与えることが重要である。また数学モデルにおいては、この初期条件の下で運動方程式系の可解性が保証されるかどうかを解析することが必要である。

本稿では特に、Impulsive start に代表される不連続的な速度分布を初期条件とする初期値境界値問題について、非圧縮性 Navier-Stokes 方程式系の可解性という視点から、近似的な初期値を与える場合の拘束条件を導出し、それに応ずる初期データの生成方法について考察する。

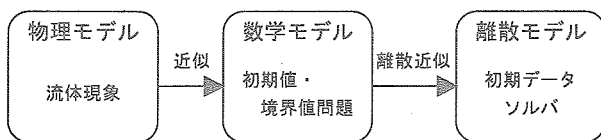


図 1: 流体現象の数値シミュレーション

## 2. 数学モデルとしてのキャビティ問題

本節では、初期値境界値問題の一例としてよく知られているキャビティ流れにおける初期条件について考察する。

キャビティ流れとは、下の図2に示すような矩形領域内部の静止流体に対し、上部境界に一定速度を与えた場合、それに伴って生ずる流体現象を解析する問題である ([1], [4], [5], [7])。

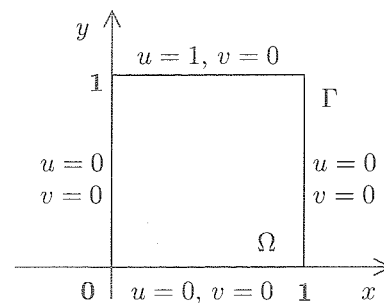


図 2: Lid-driven cavity problem

実際には、ある時刻  $t_0$  まで上部の速度境界条件を  $u = 0$  から  $u = 1$  に至るまで非定常的に増加させ、 $t > t_0$  では一定速度  $u \equiv 1$  を与えるという物理モデル (A) を考えるのが自然である。但し、数値計算によってこの問題を扱う場合には、初期条件として上部境界付近に Dirac 型の不連続性を持った速度分布を与える、所謂 Impulsive Start のモデル (B) を解くのが一般的である。このような近似手法が用いられている理由と

して、この問題で主に議論の対象となるのは定常状態であること、また現象の発達経緯までを数値計算で実現することは技術的に困難かつコスト高であることなどが挙げられる。一方、物理モデル (A) と比較して数学モデル (B) は、速度場における空間的不連続性を持つために、可解性や解の滑らかさに関する厳密な議論が必要となる。

本稿では簡単のために領域  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  における速度ベクトル場  $\mathbf{v} = (u, v) = (u(t, \mathbf{x}), v(t, \mathbf{x}))$  と圧力  $P = P(t, \mathbf{x})$  を未知の物理量とする 2 次元非圧縮 Navier-Stokes 方程式系：

$$(NS) \quad \begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{\operatorname{Re}} \Delta \mathbf{v} - \operatorname{grad} P, \\ (t > 0, \mathbf{x} = (x, y) \in \Omega) \end{cases}$$

に、領域  $\Omega$  の境界  $\Gamma$  上で  $\mathbf{v}$  に対して課せられる境界条件 (BC) と初期条件

$$(IC) \quad \lim_{t \downarrow 0} \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0$$

を組み合わせた数学モデルを中心に議論を進める。ここで、 $\operatorname{Re}$  はレイノルズ数を表す。

上で述べた数学モデル (B) は、図 2 のように模式された境界値問題として知られている。図に示した矩形領域の内部、すなわち流体の占める領域を  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$  とする。このとき、 $\Omega$  における速度境界条件は以下のように定式化されている：

$$(BC) \quad \mathbf{v}_0 = \begin{cases} (1, 0) & \text{on } \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, y = 1\}, \\ (0, 0) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

この問題では、初期状態を物理的な静止流体と仮定するため、 $\Omega$  で一様な分布  $\mathbf{v}_0 \equiv (0, 0)$  を与えるのが自然である。この場合、上記の境界条件からわかるように、 $t = 0$  では上部境界  $\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, y = 1\}$  上で、また  $t > 0$  では点  $(0, 1)$  および  $(1, 1)$  で、速度は不連続となる。ここでは、点  $(0, 1)$  および  $(1, 1)$  は特異点として除外し、初期状態における  $\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, y = 1\}$  上の不連続性について考察する。

### 3. 可解性と初期関数の近似

本節では、Navier-Stokes 方程式系の可解性という視点から、上部境界  $\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, y = 1\}$  付近での  $\mathbf{v}_0$  の分布を連続関数で近似することを考える。

充分小さな正の数  $\delta$  について、 $\Omega$  の部分集合  $B_\delta$  を

次のように定義する：

$$B_\delta := \{(x, y) \mid 0 < x < 1, 1 - \delta \leq y < 1\}.$$

以下、 $\Omega \setminus B_\delta$  では  $\mathbf{v}_0 \equiv (0, 0)$  とし、この領域  $B_\delta$  における  $\mathbf{v}_0$  の分布に対する拘束条件について述べる。

まず初めに、キャビティ問題の解に対する必要条件として、次の積分量保存則を導くことができる。

**Proposition 1.** 任意の時刻  $t \geq 0$  において以下の保存則が成立する：

$$\begin{aligned} (i) \quad & \iint_{\Omega} u(t, \mathbf{x}) \, dx \, dy = 0 \\ (ii) \quad & \iint_{\Omega} v(t, \mathbf{x}) \, dx \, dy = 0 \\ (iii) \quad & \iint_{\Omega} \omega(t, \mathbf{x}) \, dx \, dy = -1. \end{aligned}$$

但しここで  $\omega(t, \mathbf{x})$  は渦度  $\omega = v_x - u_y$  を表すものとする。

注. この Proposition は、 $\Omega$  内の速度場に対する境界条件及び流れ関数の性質から導出される ([8]).

これらの積分量保存則を Navier-Stokes の運動方程式：

$$\begin{cases} u_t + uu_x + vv_y = \frac{1}{\operatorname{Re}} \Delta u - P_x & (1) \\ v_t + uv_x + vv_y = \frac{1}{\operatorname{Re}} \Delta v - P_y & (2) \end{cases}$$

及び渦度方程式：

$$\omega_t + (u\omega_x + v\omega_y) = \frac{1}{\operatorname{Re}} \Delta \omega. \quad (3)$$

に適用することにより、次の Proposition が得られる。

**Proposition 2.** 任意の時刻  $t \geq 0$  において以下の等式が成立する：

$$\begin{aligned} (i) \quad & \frac{1}{\operatorname{Re}} \int_0^1 [u_y(t, x, 1) - u_y(t, x, 0)] \, dx \\ & - \int_0^1 [P(t, 1, y) - P(t, 0, y)] \, dy = 0, \\ (ii) \quad & \frac{1}{\operatorname{Re}} \int_0^1 [v_x(t, 1, y) - v_x(t, 0, y)] \, dy \\ & - \int_0^1 [P(t, x, 1) - P(t, x, 0)] \, dx = 0, \\ (iii) \quad & \int_0^1 [u_{yy}(t, x, 1) - u_{yy}(t, x, 0)] \, dx \\ & - \int_0^1 [v_{xx}(t, 1, y) - v_{xx}(t, 0, y)] \, dy = 0. \end{aligned}$$

注： この Proposition は、キャビティの境界  $\Gamma$  における応力のバランスを示している。(i) に述べた等式における被積分関数のうち、 $u_y(t, x, 1)$  及び  $P(t, 1, y) - P(t, 0, y)$  はキャビティ上部のコーナーにおける 2 点  $(0, 1)$  及び  $(1, 1)$  で  $\infty$  値をとる。従って、(i) の各積分は厳密には可積分ではないため、等式は形式的なものである ((ii) についても同様)。さらに (iii) における被積分関数  $u_{yy}(t, x, 1)$ ,  $v_{xx}(t, 1, y) - v_{xx}(t, 0, y)$  に対しても同様である。

*Proof.* Navier-Stokes の運動方程式 (1), (2) の移流部分を保存形で表し、キャビティ全体の領域における積分を考える：

$$\left\{ \begin{aligned} \iint_{\Omega} u_t \, dx \, dy + \iint_{\Omega} (u^2)_x + (uv)_y \, dx \, dy \\ = \frac{1}{\text{Re}} \iint_{\Omega} \Delta u \, dx \, dy - \iint_{\Omega} P_x \, dx \, dy, \quad (4) \\ \iint_{\Omega} v_t \, dx \, dy + \iint_{\Omega} (uv)_x + (v^2)_y \, dx \, dy \\ = \frac{1}{\text{Re}} \iint_{\Omega} \Delta v \, dx \, dy - \iint_{\Omega} P_y \, dx \, dy. \quad (5) \end{aligned} \right.$$

以下では、これらの方程式の各項を Proposition 1 の不変量を用いて評価する。

まず、(4) における時間微分項に対する積分に関して、Proposition 1 (i) より

$$\iint_{\Omega} u_t \, dx \, dy = \frac{\partial}{\partial t} \left( \iint_{\Omega} u \, dx \, dy \right) = 0$$

が成立する。

次に、移流部分の積分に Stokes の定理を適用すると

$$\iint_{\Omega} (u^2)_x + (uv)_y \, dx \, dy = \int_{\Gamma} u^2 \, dy - uv \, dx$$

となり、右辺の被積分関数は各境界上で 0 であるから

$$\iint_{\Omega} (u^2)_x + (uv)_y \, dx \, dy = 0$$

を得る。

また、粘性項の積分については Stokes の定理及び連続の式  $u_x + v_y = 0$  を用いると

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \Delta u \, dx \, dy &= \int_{\Gamma} u_x \, dy - u_y \, dx \\ &= - \int_{\Gamma} v_y \, dy + u_y \, dx \\ &= \int_0^1 [u_y(t, x, 1) - u_y(t, x, 0)] \, dx \end{aligned}$$

を得るから、(4) は

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{Re}} \int_0^1 [u_y(t, x, 1) - u_y(t, x, 0)] \, dx \\ - \int_0^1 [P(t, 1, y) - P(t, 0, y)] \, dy = 0 \end{aligned}$$

と変形され、(i) の等式が示される。

次に (5) についても同様の計算を行う。Proposition 1 (ii) より

$$\iint_{\Omega} v_t \, dx \, dy = 0,$$

となり、さらに移流項に関する積分については Stokes の定理及び速度の境界条件から

$$\iint_{\Omega} (uv)_x + (v^2)_y \, dx \, dy = \int_{\Gamma} uv \, dy - v^2 \, dx = 0$$

を得る。また粘性項に関する積分は

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \Delta v \, dx \, dy &= \int_{\Gamma} v_x \, dy - v_y \, dx \\ &= \int_{\Gamma} v_x \, dy + u_x \, dx \\ &= \int_0^1 [v_x(t, 1, y) - v_x(t, 0, y)] \, dy, \end{aligned}$$

となるから、(5) より

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{Re}} \int_0^1 [v_x(t, 1, y) - v_x(t, 0, y)] \, dy \\ - \int_0^1 [P(t, x, 1) - P(t, x, 0)] \, dx = 0, \end{aligned}$$

を得る。

最後に、(iii) の証明では渦度方程式 (3) を領域  $\Omega$  において積分した次の関係式を用いる：

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \omega_t \, dx \, dy + \iint_{\Omega} u\omega_x + v\omega_y \, dx \, dy \\ = \frac{1}{\text{Re}} \iint_{\Omega} \Delta \omega \, dx \, dy. \quad (6) \end{aligned}$$

まず時間微分項に関する積分は Proposition 1 (iii) より 0 となる。左辺第 2 項について速度ベクトルに課せられた境界条件を適用すると

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} u\omega_x + v\omega_y \, dx \, dy \\ = \iint_{\Omega} (u\omega)_x + (v\omega)_y - (u_x + v_y)\omega \, dx \, dy \\ = \int_{\Gamma} u\omega \, dy - v\omega \, dx = 0 \end{aligned}$$

を得る。さらに右辺の積分に関しては

$$\begin{aligned}
\iint_{\Omega} \Delta \omega \, dx &= \int_{\Gamma} \omega_x \, dy - \omega_y \, dx \\
&= \int_{\Gamma} (v_x - u_y)_x \, dy - (v_x - u_y)_y \, dx \\
&= \int_{\Gamma} v_{xx} - u_{xy} \, dy + \int_{\Gamma} u_{yy} - v_{xy} \, dx \\
&= \int_0^1 [v_{xx}(t, 1, y) - v_{xx}(t, 0, y)] \, dy \\
&\quad + \int_0^1 [u_{yy}(t, x, 0) - u_{yy}(t, x, 1)] \, dx \\
&= 0
\end{aligned}$$

であるから、等式 (6) により (iii) が成立することが示された。□

次に、(IC) で述べた解の時間的連続性を考慮し、Proposition 2 の各方程式において  $t \rightarrow 0$  の極限を考える。このとき、キャビティ内部（特に  $B_\delta$ ）における静止流体を適正に近似するための拘束条件を導くことができる。

**Theorem.**  $t = 0$  における  $\{(x, y) \mid 0 < x < 1, y = 1\}$  上の渦度、圧力及び速度に対して以下の成立が要求される：

- (i)  $\omega(0, x, 1) \equiv 0,$
- (ii)  $P(0, x, 1) \equiv 0,$
- (iii)  $u_{yy}(0, x, 1) \equiv 0.$

但し、圧力  $P$  は境界上  $P \equiv 0$  として正規化するものとする。

*Proof.* Proposition 2 (i)~(iii) の各等式について、 $t \rightarrow 0$  の極限を考える。キャビティ内部の初期状態は静止流体であるから  $P(0, 0, y) = P(0, 1, y) = \text{const.}$  及び  $u_y(0, x, 0) = 0$  が成立している。よって Proposition 2 (i) より

$$\int_0^1 u_y(t, x, 1) \, dx \rightarrow 0 \quad \text{as } t \rightarrow 0$$

が成立する。(IC) によって初期値  $v_0$  を

$$v(0, x, y) = \lim_{t \downarrow 0} v(t, x, y)$$

で定めているため、 $u_y(0, x, 1) \equiv 0$  が成立する。従って  $\omega(0, x, 1) = v_x(0, x, 1) - u_y(0, x, 1) = 0$  を得る。

次に、(ii) より  $v_x(t, 1, y) = v_x(t, 0, y)$ 、さらに

$P(0, x, 0) \equiv 0$  であるから

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^1 P(t, x, 1) \, dx = 0.$$

ここでは境界上  $P = 0$  と仮定しているから、静止流体の近似として上部境界においても  $P \equiv 0$  が成立する。

最後に (iii) については  $u_{yy}(0, x, 0) = v_{xx}(0, 1, y) = v_{xx}(0, 0, y) = 0$  であるから、

$$\int_0^1 u_{yy}(t, x, 1) \, dx \rightarrow 0 \quad \text{as } t \rightarrow 0.$$

上と同様に、静止流体の近似として考えると  $u_{yy}(t, x, 1) \equiv 0$  を得る。□

この Theorem は、(IC) で定めた時間的極限としての初期条件  $v_0$  が満たすべき性質を述べている。すなわち、近似的な初期値境界値問題 (NS)-(BC)-(IC) の可解性のための初期条件 (IC) に対する必要条件である。従って、数値計算を行う場合にも Theorem で述べた拘束条件から導出される初期関数の性質を、離散モデルにおける初期条件に適用し、適切な初期データを生成することの必要性を述べている。

#### 4. 考察

前節で示した定理は、キャビティ問題における非圧縮 Navier-Stokes 方程式系の可解性を仮定した場合の、初期関数  $v_0$  に対する必要条件を意味している。すなわち、上部境界付近における速度及び圧力の初期関数を領域  $B_\delta$  で近似する際の拘束条件を与えている。以下では、Theorem に述べた拘束条件に基づき、速度場及び渦度場の初期分布について考察する。

Impulsive start として定式化された初期条件では、特に速度の第 1 成分  $u$  の初期関数  $u(0, x, y)$  を、Delta 関数

$$u(0, x, y) = \begin{cases} 1 & (\text{if } y = 1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

として与えられる。このような初期関数を連続的に近似するためには、ある関数  $f(x, y)$  ( $1 - \delta \leq y \leq 1$ ) を用いて

$$u(0, x, y) = \begin{cases} f & ((x, y) \in B_\delta) \\ 0 & ((x, y) \in \Omega \setminus B_\delta) \end{cases}$$

となるものを考える。

下の図 3 に Impulsive start を直接的に近似した初期関数  $u$  の  $y$  方向の分布を模式した。

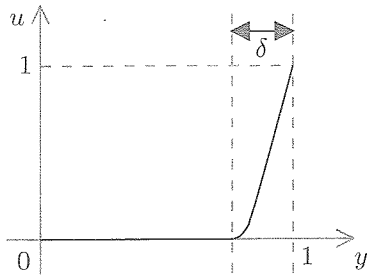


図 3: 拘束条件を満足しない初期関数  $u$

この場合、 $u_y$  の値は  $y = 1$  の近傍である正の定数 ( $f$  の傾き) の値をとり、Theorem (iii) の条件  $u_y = 0$  を満足することは出来ない。すなわち、初期値に対する拘束条件を満足していないため、このような初期値から得られる解は、非定期的には解析対象とする現象を正確に模擬しているかどうかは不明であり、その意味でスプリアス解 (偽解) となる。

一方で、Theorem (iii) 及び Proposition 1 の積分保存則、また連続の式の成立などから、速度場の第一成分  $u$  に関して次のような微分構造を持つことを推測することができる。

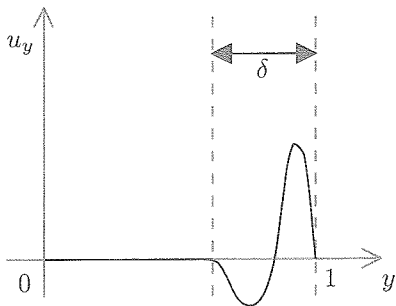


図 4: 拘束条件を満足する初期関数  $u_y$  の一例

このとき、上図の微分構造をもとに初期関数  $u$  の分布は下の図 5 のように模式することができる。図 3 と

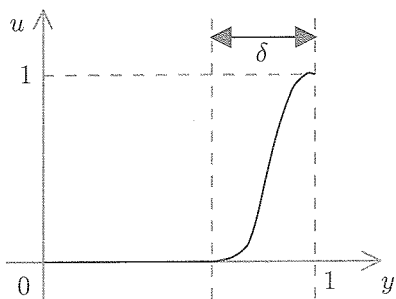


図 5: 拘束条件を満足する初期関数  $u$  の一例

比較して、特に上部境界付近での構造に差が現れていることがわかる。

特に、流れ関数-渦度法によるキャビティ流れに対する数値計算を行う場合、渦度の初期関数  $\omega_0$  が必要となる。このとき、同様の考察から拘束条件を満たす  $\omega_0$  は図 6 のような分布となる。

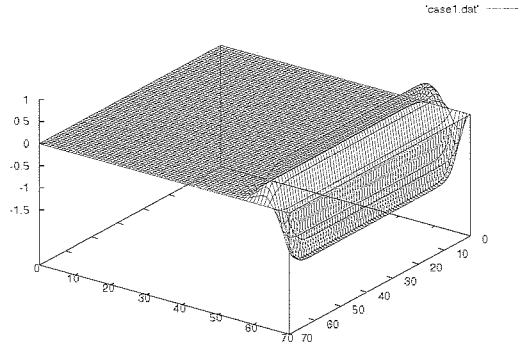


図 6: 拘束条件を満足する初期関数  $\omega$  の一例

## 5. 結論

キャビティ問題における初期分布は、図 4 で示したような構造をもつ関数の  $\delta \rightarrow 0$  での極限として定式化されなければならないことがわかる。キャビティ問題 (図 2) における速度の第 1 成分  $u$  の初期関数として、上部境界  $\{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, y = 1\}$  で Dirac 型の不連続性を持つ分布を考える場合、0 から 1 の値をとる  $y \in [1 - \delta, 1]$  についての単調増加関数として近似するのが最も自然であると考えられる。しかし、この場合の渦度  $\omega$  の分布は必ずしも Theorem の拘束条件を満足するとは限らない。

キャビティ問題を可解性が成立する数学モデルとして解析するためには、領域  $B_\delta$  で Theorem に述べた拘束条件が成立するように、速度場及び圧力場の初期関数を近似する必要がある。このことは、Impulsive start による数学モデルを初期値境界値問題として定式化することの重要性を示唆している。

最後に、(NS)-(IC)-(BC) に対する数値解析上の課題としては、特に (IC) について Theorem に述べた拘束条件を満足するものとそうでないものを生成し、それぞれの初期データから発達する非定常現象の比較を行うことが必要である。

## 参考文献

[1] S. Abdallah, Numerical solutions for the incompressible Navier-Stokes equations in primitive

- variables using a non-staggered grid. II, *J. Comput. Phys.*, **70**, 193–202 (1987).
- [2] G. K. Batchelor, On steady laminar flow with closed streamlines at high Reynolds number, *J. Fluid. Mech.*, **1**, 177–190 (1987).
- [3] O. R. Burggraf, Analytical and numerical studies of the structure of steady separated flows, *J. Fluid Mech.*, **24**, 113–151 (1966).
- [4] A. G. Churbanov, A. N. Pavlov and P. N. Vabishchevich, Operator-splitting methods for the incompressible Navier-Stokes equations on non-staggered grids. Part 1: First-order schemes, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, **21**, 617–640 (1995).
- [5] U. Ghia, K. N. Ghia and C. T. Shin, High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method, *J. Comput. Phys.*, **48**, 387–411 (1982).
- [6] R. Iwatsu, K. Ishii, T. Kawamura, K. Kuwahara, J. M. Hyun, Simulation of transition to turbulence in a cubic cavity, AIAA-89-0040, (1989).
- [7] J. Kim and P. Moin, Application of a Fractional-Step method to incompressible Navier-Stokes equations, *J. Comput. Phys.*, **59**, 308–323 (1985).
- [8] T. Takahashi, K. Kishi, Y. Matsuura, S. Oharu, 非圧縮性流体の非定常計算手法の妥当性について, 宇宙航空研究開発機構特別資料 JAXA-SP-03-002, 143–147 (2004).
- [9] R. Temam, Navier-Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis, North-Holland, Amsterdam (1977).