圧縮性 Euler 方程式の差分近似の不安定性と線形場

Instability in difference approximation for the compresible EulerEquations and the linear field

相曽 秀昭 (AISO, Hideaki) * アブジァロフ ムスタファ(ABOUZIAROV, Moustafa) **

We are concerned with the carbuncle phenomenon, a kind of instsbility that happens in numerical computation for compressible Euler equations. Through numerical experiments we show that the occurrence of instsbility is closely related with some linearized stability of discrete temporal evolution

1. はじめに

Quirk[2] により議論され学術的に考察すべき対象として認識される以前から、圧縮性 Euler 方程式で強い衝撃波が形成される場合の数値計算において数値的と考えられる不安定現象が生じる事は経験的に知られていた。この不安定性はカーバンクル (Carbuncle) 現象またはカーバンクル不安定性と呼ばれる。[2] はこの不安定現象を差分近似の方法に起因するものとして論じた。

この不安定性に関し経験的にいくつかの事が知られている。不安定が 1 次元計算で生じなくても同一の 1 次元的現象を多次元 (2 次元以上) で数値計算すると生じ得る。不安定は衝撃波が計算格子座標のどれかの座標軸又は 2 つの座標軸のなす面にほぼ平行な場合に生じ易い。衝撃波が強いほど不安定が生じ易い。また、不安定現象の空間的スケールは計算格子上でのスケールに依存し物理現象のスケールには依存しない。最後の事実は、不安定現象が、圧縮性 Euler 方程式という物理現象を記述する偏微分方程式よりは、その偏微分方程式の数値解を得る為に用いられる離散モデル (差分近似) に起因するのではないかという推論をもたらす。

圧縮性 Euler 方程式の数値計算に用いる種々の離散モデル (差分近似) は非線形であるが、Moschetta ら [3] はその離散モデルにおける時間発展を線形化しその線形化システムの安定・不安定を論じる事を試みた。[3] の中では静止衝撃波問題を種々の差分で近似する数値計算を考え、各差分近似の表す時間発展モデルの線形化を数値微分により行っている。(一般の保存則の差分近似では、離散モデルの線形化を行う際に必要な差分式の微分が複雑になる為)

本稿では、進行衝撃波の場合にある種の線形化により得られた系の不安定性とカーバンクル不安定の出現が一致する事を観察する。我々は Godunov 法による差分の場合を解析する。実際、Godunov 法は現在圧縮性 Euler 方程式に広く用いられる有限体積概念に基く保存型差分の中では理論的に最も自然に導かれるものであり、また線形化を行う際に必要な差分式の偏微分を理論的に求め易い。最終的には、実際の進行衝撃波の数値計算とその数値計算の離散モデルの線形化から得られる線形系の固有値を観察し、カーバンクル不安定と線形不安定の一致を確かめる。

2. 圧縮性 Euler 方程式の進行衝撃波解

ここでは、空間 2 次元の圧縮性 Euler 方程式

$$U_t + F(U)_x + G(U)_y = 0, \quad -\infty < x, y < \infty, t > 0 \tag{1}$$

について考える。ただし、Uは保存変数のベクトル

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix}, \tag{2}$$

*JAXA (Japan Aerospace Exploration Agency) Jindaiji-Higashi-machi 7-44-1 Chofu TOKYO 182-8522 JAPAN, aiso @ chofu.jaxa.jp

**Institute of Mechanics, Nizhni-Novgorod State University GSP1000, Gagarin av.23, Nizhni-Novgorod 603600 RUSSIA. abouziar @ dk.mech.unn.ru

(ただし、ρ, u, v, p, e はそれぞれ、密度、x-、y-各方向の速度成分、圧力、単位体積あたり内部エネルギー) であり、x-、y-各方向の流束 F, G は

$$F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(e+p) \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(e+p) \end{bmatrix}, \tag{3}$$

のように表される。また、理想気体の状態方程式

$$e = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2). \tag{4}$$

を仮定する。

次のような進行衝撃波解を考える。Riemann 問題の初期値

$$U(x,0) = \begin{cases} U_L = {}^{\mathrm{t}}[\rho_L, \rho_L u_L, 0, e_L], \\ \qquad\qquad x < 0, \\ U_R = {}^{\mathrm{t}}[\rho_R, \rho_R u_R, 0, e_R], \\ \qquad\qquad x > 0 \end{cases} \tag{5}$$

が[1]、次の Rankine-Hugoniot 条件

$$F(U_R) - F(U_L) = s(U_R - U_L). \tag{6}$$

を満たし、かつ、次の条件[2]

$$\begin{gathered} u_L - c_L > s > u_R - c_R \\ \text{または} \\ u_L + c_L > s > u_R + c_R \end{gathered} \tag{7}$$

($c_L = \sqrt{\gamma p_L/\rho_L}$、$c_R = \sqrt{\gamma p_R/\rho_R}$は、Riemann 問題を定める 2 状態 U_L,U_Rにおける音速である。) また、全ての領域において、次のような意味で「十分に上流的な状況」であるとしておく。

$$u \pm c, u >> 0, c = \sqrt{\gamma p/\rho} \tag{8}$$

以上の状況では、初期値問題 (1), (5) のエントロピー解 (一意) は進行衝撃波解

$$U(x,y,t) = U(x - st, y, 0) = \begin{cases} U_L, & x < st, \\ U_R, & x > st. \end{cases} \tag{9}$$

となる。これは 2 次元内を平面衝撃波が進行する様子を表す。この解の差分による数値計算について考えていく。

[1] ${}^{\mathrm{t}}A$ は行列又はベクトル A の転置 (transepose) を表すものとする。

[2] Rankine-Hugoniot 条件 (5) のみでは衝撃波における物理的なエントロピー条件を満たさないので、Riemann 問題 (5) の解が進行衝撃波解となる為にはこの条件を付加する必要がある。

3. Godunov 法による離散化

Godunov 法による離散化を考える。Godunov 法は、圧縮性 Euler 方程式の様な保存則の数値計算に用いられる保存型差分の中では、Riamenn 問題の厳密解を利用して数値流束を定める故、最も「自然な」差分近似の一つであると言える事を注意しておく。

先ず、x, y-空間を次のように有限体積 (セル) に分割する。$I_{i,j} = (x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}) \times (y_{j-\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}})$ (i, jは整数). 時間変数も $\{t^n; 0 = t^0 < t^1 < \cdots\}$ の様に離散化し、空間、時間の離散化は共に一様であるとしておく。即ち、任意の i, j, n について $x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}} = \Delta x$, $y_{j+\frac{1}{2}} - y_{j-\frac{1}{2}} = \Delta y$, $t^{n+1} - t^n = \Delta t$ for all n. また、CFL 条件についても

$$\frac{|u| + c}{\Delta x} + \frac{|v| + c}{\Delta y} \leq \frac{1}{\Delta t}. \tag{10}$$

を仮定する。

ベクトル $U^n_{i,j} = {}^{\mathrm{t}}[\rho^n_{i,j}, (\rho u)^n_{i,j}, (\rho v)^n_{i,j}, e^n_{i,j}]$ は、時刻 $t = t^n = n\Delta t$ における有限体積 $I_{i,j}$での状態 Uを近似するものであり、$\left\{U^0_{i,j}\right\}_{i,j\text{は整数}}$は $\left\{U^n_{i,j}\right\}_{n,i,j\text{は整数},n\geq 1}$ を逐次計算するための初期値として与えられる。$\left\{U^n_{i,j}\right\}_{n,i,j\text{は整数},n\geq 1}$ は (圧縮性 Euler 方程式を近似する) 離散的時間発展

$$\begin{aligned} U^{n+1}_{i,j} = U^n_{i,j} &- \tfrac{\Delta t^n}{\Delta x_i}\left\{\bar{F}^n_{i+\frac{1}{2},j} - \bar{F}^n_{i-\frac{1}{2},j}\right\} \\ &- \tfrac{\Delta t^n}{\Delta y_j}\left\{\bar{G}^n_{i,j+\frac{1}{2}} - \bar{G}^n_{i,j-\frac{1}{2}}\right\}, \end{aligned} \tag{11}$$

より n について逐次定義される。ここで各方向の数値流束$\bar{F}^n_{i+\frac{1}{2},j}$,$\bar{G}^n_{i,j+\frac{1}{2}}$ は有限体積境界における流束 F, G のそれぞれを近似するもので、Godunov 法においては次のように定める。

各 $F^n_{i+\frac{1}{2},j}$は、$U^n_{i,j}$と $U^n_{i+1,j}$の 2 状態が定める Riemann 問題

$$\begin{gathered} U_t + F(U)_x = 0, \\ U(x,0) = \begin{cases} U^n_{i,j}, & x < 0 \\ U^n_{i+1,j}, & x > 0 \end{cases} \end{gathered} \tag{12}$$

の定めるエントロピー解 (厳密解)[3]

$$U = U(x,t) = U(x/t; U^n_{i,j}, U^n_{i+1,j})$$

[3] 一般に保存則の Riemann 問題のエントロピー解 $U = U(x,t)$ が存在すればそれは x/t に依存するいわゆる相似解である。

を利用して

$$F^n_{i+\frac{1}{2},j} = F(U(0; U^n_{i,j}, U^n_{i+1,j})). \tag{13}$$

の様に定められる。

各 $G^n_{i,j+\frac{1}{2}}$ も同様に定められる。即ち、Riemann 問題

$$\begin{aligned} &U_t + G(U)_y = 0, \\ &U(x,0) = \begin{cases} U^n_{i,j}, & y < 0 \\ U^n_{i,j+1}, & y > 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{14}$$

のエントロピー解 (厳密解)

$$U = U(y,t) = U(y/t; U^n_{i,j}, U^n_{i,j+1})$$

から

$$G^n_{i,j+\frac{1}{2},j} = G(U(0; U^n_{i,j}, U^n_{i,j+1})). \tag{15}$$

により与えられる。

4. 数値計算に用いられる離散モデルの解析

数値計算に用いられる離散モデル (11) の解析を進める。

初期値 $\left\{U^0_{i,j}\right\}_{i,j\text{は整数}}$ が完全に1次元的で j に全く依存せず、離散的な時間発展 (11) が桁落ち等による誤差が皆無であるよう全く厳密に計算されると仮定すれば、カーバンクル不安定は生じ得ない。また、桁落ち等による誤差が生じても、各セル $I_{i,j}$ における誤差が j に依存しなければ、誤差発生を含む数値計算が全く1次元的でありカーバンクル不安定は生じ得ない。

しかしながら、実際の数値計算においては、2つのセル I_{i,j_1} と I_{i,j_2} $(j_1 \neq j_2)$ における計算誤差は異なり得る。[4] しかしながら、そのような誤差の蓄積がカーバンクル不安定であるとする事では、一旦誤差の発生が観察されればそれが急速に発展するカーバンクル不安定の現象を十分に説明できない。そこで、一旦誤差が発生すればそれが離散モデル (11) により増幅される機構が存在すると推論するのが自然である。実際、[3, 1] においても同様の視点から議論を展開している。

ここでは議論を単純化するために、誤差の odd-even 性 (偶奇交代性)

$$\begin{aligned} U^n_{i,j} &= U^n_i + (-1)^j \hat{U}^n_i, \\ U^n_i &= {}^t[\rho^n_i, (\rho u)^n_i, 0, e^n_i], \\ \hat{U}^n_i &= {}^t[\hat{\rho}^n_i, \widehat{(\rho u)}^n_i, \widehat{(\rho v)}^n_i, \hat{e}^n_i t]. \end{aligned} \tag{16}$$

を仮定する。$(-1)^j\hat{U}^n_i$ が (本来は j に関係なく $U^n_{i,j} = U^n_i$ であるべき) 各 $U^n_{i,j}$ に係る計算誤差であるという仮定である。この仮定はそれ程人工的なものではない。実際、[2] においてもカーバンクル不安定は大まかには odd-even であるとされ、保存型差分近似における保存性の観点から見ても自然である。また、実際の計算において脚注4に述べた方法で Δy の計算機上デジタル表現の誤差を抑制した数値計算を設定し $n = 0$ の段階で (16) の様に誤差を与えれば、カーバンクル不安定を発生させる事ができ、任意の n で (16) が保たれる。

次の事実が不安定性の解析に基本的なものであるから、定理として記述しておく。

定理 1 (11) と (16) の仮定の下で、関係式

$$\begin{aligned} \hat{U}^{n+1}_i &= \hat{U}^n_i - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left\{\frac{\partial F}{\partial U}(U^n_i)\hat{U}^n_i - \frac{\partial F}{\partial U}(U^n_{i-1})\hat{U}^n_{i-1}\right\} \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta y}\cdot 2\left|\frac{\partial G}{\partial U}(U^n_i)\right|\hat{U}^n_i \\ &= \left\{I - \frac{\Delta t}{\Delta x}\frac{\partial F}{\partial U}(U^n_i) - 2\frac{\Delta t}{\Delta y}\left|\frac{\partial G}{\partial U}(U^n_i)\right|\right\}\hat{U}^n_i \\ &\quad + \frac{\Delta t}{\Delta x}\frac{\partial F}{\partial U}(U^n_{i-1})\hat{U}^n_{i-1} + o(\delta). \end{aligned} \tag{17}$$

が得られる。これらは

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^{n+1}_i}{\partial U^n_i} &= \left\{I - \frac{\Delta t}{\Delta x}\frac{\partial F}{\partial U}(U^n_i) - 2\frac{\Delta t}{\Delta y}\left|\frac{\partial G}{\partial U}(U^n_i)\right|\right\}, \\ \frac{\partial U^{n+1}_i}{\partial U^n_{i-1}} &= \frac{\Delta t}{\Delta x}\frac{\partial F}{\partial U}(U^n_{i-1}), \\ \frac{\partial U^{n+1}_i}{\partial U^n_k} &= O,\ i-k \neq 0,1 \end{aligned} \tag{18}$$

の様にも記される。ここで、$|A|$ はある行列 P で $P^{-1}AP = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ のように対角化される A について

$$\begin{aligned} &|A| \\ &= P\cdot diag(|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots, |\lambda_n|)\cdot P^{-1} \\ &= P\begin{bmatrix} |\lambda_1| & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |\lambda_2| & 0 & \cdots & 0 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & & \cdots & & |\lambda_n| \end{bmatrix}P^{-1} \end{aligned} \tag{19}$$

[4] こうした数値計算上の誤差は、主に、$\Delta y = y_{j+\frac{1}{2}} - y_{j-\frac{1}{2}}$ のデジタル表現が j に依存して桁落ち誤差により同一でなくなる事に由来するのではないかと考えられる。実際、$y_j + \frac{1}{2} = j$ として計算機上で整数型変数をとればそのような桁落ち誤差は生じないが、この場合には本稿のような平面衝撃波の伝播の計算ではカーバンクル不安定は発生しない。しかし、このような場合でも誤差を一旦与えるとカーバンクル不安定が生じる。これは、不安定を起こす最初の誤差の発生機構と不安定の成長機構とは別物として考察すべきである事も示唆している。

の様に与えられるものとする。[5]

本定理の証明は、次の2つの補題1、2. から与えられる。これらの補題はx-方向の「十分な上流性」の仮定である(8)とy-方向では通常の線形化が可能である事実に基く。

補題 1

$$\bar{F}^n_{i+\frac{1}{2},j} = F(U^n_{i,j}). \tag{20}$$

補題 2

$$\begin{aligned}\bar{G}^n_{i,j+\frac{1}{2}} &= \tfrac{1}{2}\{G(U^n_{i,j}) + G(U^n_{i,j+1})\}\\ &-\tfrac{1}{2}\left|\tfrac{\partial G}{\partial U}(U^n_i)\right|(U^n_{j+1} - U^n_j)\\ &+o(\delta).\end{aligned} \tag{21}$$

上の2つの補題はそれぞれGodunov法における数値流束$\bar{F}^n_{i+\frac{1}{2},j}$又は$\bar{G}^n_{i,j+\frac{1}{2}}$を定めるRiemann問題(12)又は(14)を考察すれば容易に得られるものである。

さて、数列$\hat{U}^n$と行列E^{n+1}_nを

$$\begin{aligned}\hat{U}^n &= {}^{\mathrm{t}}\Big[\cdots, \hat{\rho}^n_i, \widehat{(\rho u)}^n_i, \widehat{(\rho v)}^n_i, \hat{e}^n_i,\\ &\quad \hat{\rho}^n_{i+1}, \widehat{(\rho u)}^n_{i+1}, \widehat{(\rho v)}^n_{i+1}, \hat{e}^n_{i+1}, \cdots\Big],\\ E^{n+1}_n &= \left[\frac{\partial U^{n+1}_i}{\partial U^n_k}(U^n_k)\right]_{i,k:\text{整数}},\end{aligned}$$

のように定める。但し、$\frac{\partial U^{n+1}_i}{\partial U^n_k}(U^n_k)$はEの$4\times 4$小行列であり$i,k$は整数である。[6]すると、$\hat{U}^n$から$\hat{U}^{n+1}$への離散的時間発展

$$\hat{U}^n \mapsto \hat{U}^{n+1}$$

は

$$\hat{U}^{n+1} = E^{n+1}_n \cdot \hat{U}^n + o(\delta).$$

のように書き表す事ができ、更に行列E^{n+r}_nを

$$E^{n+1}_n = \left[\frac{\partial U^{n+r}_i}{\partial U^n_k}(U^n_k)\right]_{i,k:\text{整数}}$$

と定めれば、

$$\hat{U}^{n+r} = E^{n+r}_n \cdot \hat{U}^n + o(\delta) \tag{22}$$

の関係が得られる。[7]

さて、我々は安定な進行衝撃波の離散プロファイル[8]の数値計算を利用し、カーバンクル不安定性と$\hat{U}^n$から$\hat{U}^{n+r}$への写像(22)の線形安定性の関係を論じる。我々の本稿の主張を次に記す。

主張. カーバンクル不安定性の不出現·出現と、(22)の写像$\hat{U}^n \mapsto \hat{U}^{n+r}$の線形安定·線形不安定は一致する。

5. 数値計算による実験

数値計算は、進行衝撃波の安定な離散プロファイルを得る部分と不安定性の観察の2つの部分からなる。

5.1. 進行衝撃波の安定離散プロファイル

まず、進行衝撃波の安定離散プロファイルを次のようにして得る。

1. 1次元圧縮性Euler方程式に対しGodunov法

$$U^{n+1}_i = U^n_i - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left\{\bar{F}^n_{i+\frac{1}{2}} - \bar{F}^n_{i-\frac{1}{2}}\right\}. \tag{23}$$

を用いて計算する。各$\bar{F}^n_{i+\frac{1}{2}}$は(11)と同様に与えられる。$\frac{\Delta t}{\Delta x}$は後の2次元計算と同じ値である。

2. 計算領域は$i_{\min} \le i \le i_{\max}$であるが、$i_{\max} - i_{\min}$は十分に大とする。また初期値$\{U^0_i\}$は

$$U^0_i = \begin{cases} U_L, & i_{\min} \le i \le i_s \\ U_R, & i_s < i \le i_{\max}, \end{cases} \tag{24}$$

で与えるが、U_LとU_Rは(6),(7),(8),(10)を満足し衝撃波速度sは$\frac{\Delta x}{\Delta t}$に対して有理比を持つ

$$s = \frac{q}{r}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t},\ q, r\text{は互いに素な正整数}.$$

とする。2つの境界については、$i = i_{\min}$では完全流入条件、$i_{\max}$では完全流出条件とする。

[5]行列Aが対角化可能な場合、対角化を与える行列Pは一意ではないが、ここで定義される$|A|$はPの取り方に依存しない事を注意しておく。

[6]これらの小行列は定理1内の式により得られ、$i-k \ne 0,1$の場合には零行列Oとなる。

[7]E^{n+r}_nについて、$E^{n+r}_n = E^{n+r}_{n+r-1}\times\cdots\times E^{n+1}_n$, $r \ge 1$であり、$i-r \le k \le i$以外の場合には$\frac{\partial U^{n+r}_i}{\partial U^n_k}(U^n_k) = 0$である。

[8]安定な進行衝撃波の数値計算における安定な離散プロファイルについては理論的な解決は未だなされていない。ここでは、安定な離散プロファイルに十分に近いと考えられるデータを数値計算により得て数値実験を行う。

3. 離散的時間発展 (23) を繰り返す。ただし、r 回の離散的時間発展毎に空間的にデータを$-q$ ノード分だけシフトする。即ち

```
do i = i_min, i_max - r
  U_i^n = U_{i+r}^n
enddo
do i = i_max - r + 1, i_max
  U_i^n = U_R
enddo
```

4. 安定な離散プロファイルが得られたと判断される時点で数値計算を停止し、その時点での $\{U_i^n\}_i$を安定離散プロファイルとして採用する。その判断は、

$$S(n) = \sum_{i=i_{\min}}^{i_{\max}-r} \Big\{ |\rho_i^{n+r} - \rho_i^n| + |(\rho u)_i^{n+r} - (\rho u)_i^n| + |e_i^{n+r} - e_i^n| \Big\}.$$

により、$\{U_i^{n+r}\}_i$と $\{U_i^n\}_i$を比較し、$S(n)$ が十分小さくなった事による。

実際、離散プロファイルへの数値的収束はかなり良く、倍精度計算でノードの点数が千点オーダーの場合でも $S(n)$ は10^{-13}程度までは減少する。ここでは$i_{\min} = 0, i_{\max} = 1000, i_s = 100$ とした。しかし、ノードの点数の安定プロファイルへの影響を確かめる為、$i_{\min} = 0, i_{\max} = 2000, i_s = 200$ の場合も同様に試した。非常に弱い衝撃波でなければ、どちらの場合も本質的に同一のプロファイルを与える。

ここで得られたプロファイルを次の安定性の試験計算の初期値 $\{U_i^0\}_i$として用いる。

5.2. 安定・不安定の確認

ここでは、安定・不安定の確認の為、上で得られたデータから 2 つの計算を行う。

先ず、r回分の離散時間発展[9] による誤差の発展$\hat{U}^n \mapsto \hat{U}^{n+r}$ の状況を E_n^{n+r}を用いて調べる。しかし、E_n^{n+r}は無限なので、有限部分行列を取り出して調べる必要がある。そこで、i_-とi_+[10] を

$$\begin{aligned} &|\rho_i^0 - \rho_L| < 10^{-4}|\rho_R - \rho_L|, i < i_-, \\ &|\rho_R - \rho_i^0| < 10^{-4}|\rho_R - \rho_L|, i > i_+ - r. \end{aligned} \tag{25}$$

満たすようにとり、$\{4(i_+ - i_- - r)\} \times \{4(i_+ - i_- - r)\}$ 行列$\bar{E}_0^r$ を$\bar{E}_0^r = \left\{\dfrac{\partial U_i^r}{\partial U_k^0}\right\}_{i_-+r \le i \le i_+, i_- \le k \le i_+ - r}$ で定める。そして、これらの行列の固有値を求める。

上の線形安定性の観察と同時に (11) による実際の 2 次元計算も行う。以下の 2 つの方法を試したが、カーバンクル不安定性の発生状況はどちらでも同一である。

1. 計算領域は m を適当な正整数として $1 \le i \le 10000, 1 \le j \le 2m$ とする。[11]誤差の制御の為 (脚注 4参照)、$y_{j+\frac{1}{2}}$ とΔyの計算機上での表現は整数形とする。初期データ $\{U_{i,j}^0\}$ は$1 \le i \le 1000$ では安定な離散衝撃波プロファイル $\{U_i^0\}$ を用い、それ以外ではU_Rとする。$i = 1, 10000$ での境界はそれぞれ完全流入条件、完全流出条件とし、$j = 1, 2m$ での境界は循環境界条件とする。また、この場合は自然発生する計算誤差による不安定が生じ得ないので人工的に誤差を付加する。実際には、初期値の $50 \le i \le 100$ の部分に相対的オーダーが 10^{-10}程度の (odd-even 性の制約以外では) ランダムな誤差を加える。

2. 計算領域を $1 \le i \le 10000, 1 \le j \le 2$ とする。初期値、境界値の扱いは上と同様である。(但し、初期値に人工的な誤差は付加しない。) ただし、Δyを浮動小数形で与える。例えば `0.7D-1`.

5.3. 数値実験の結果

我々は色々と条件を変化させながら数値実験を行ったが、それらの数値実験ではカーバンクルの発生は$\bar{E}_0^r$の最大固有値が 1 を超える事と一致した。

その一例を提示する。

1. 特性速度$u+c$に関連するいわゆる 3-衝撃波を対象に計算を行った。左右の圧力比 $p_R/p_L = e^{\xi}$で衝撃波の強さを考え、$\xi < 0$ を変化させて色々な強さの衝撃波を考察した。(衝撃波の左右の状態の定義については [4] 等を参照されたい。)

[9] r回の離散的時間発展でデータは s ノード分のシフトを除けば同一になっている。

[10] (25) の定める i のノードの範囲で行列$\bar{E}_0^r$を定めて観察して問題はないと思われる。実際、(25) の 10^{-4}を 10^{-5}に取り替えて行列$\bar{E}_0^r$を定めても、優越固有値は殆ど変化しない。

[11] m の値による違いは生じない。実際には $m = 1$ で十分である。

2. x-方向の速度は衝撃波の両側の各特性速度 ($u \pm c, u$ が両側にあるので 6 つとなる) が十分に 0 より大きく、かつその最大と最小の比が 10 以下となるように調整した。(また、その際に $s/(\frac{\Delta t}{\Delta x})$ が有理数となるようにする必要がある。)

3. ここの例では $\xi = -1.0, -1.1, \cdots, -2.0$ とし $s = \frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}$ となるようにした。

結果は次のようになる。

ξ	密度比	$i_+ - i_-$	固有値の絶対値の最大値	カーバンクル不安定性
−1.0	0.5037	37	0.9708	出現せず
−1.1	0.4733	35	0.9779	出現せず
−1.2	0.4455	34	0.9849	出現せず
−1.3	0.4201	32	0.9917	出現せず
−1.4	0.3969	31	0.9982	出現せず
−1.5	0.3758	30	1.0044	出現
−1.6	0.3566	29	1.0104	出現
−1.7	0.3390	29	1.0162	出現
−1.8	0.3231	28	1.0217	出現
−1.9	0.3085	28	1.0269	出現
−2.0	0.2953	27	1.0319	出現

上の表は、離散モデル (11) の数値計算におけるカーバンクル不安定の発生とその離散的時間発展を観察して得られる (22) の線形不安定の一致を示している。

6. 結論

数値実験を用いており、数学的に完全な論証は得られていないが、上のようなカーバンクル不安定は数値的な機構に起因するものであり、またその数値的機構は本質的には線形不安定であるという事が結論できる。

しかし、この現象は非線形性と深く関わっており、圧縮性 Euler 方程式の非線形性が本質的に影響している側面も見逃してはならない。例えば、本稿で観察される線形系が不安定である理由は圧縮性 Euler 方程式の非線形性に起因している。(線形保存則の Godunov 法による近似の場合には、適当な CFL 条件さえ満たしていれば上のような不安定性が生じない事は容易に示される。)

また、非線形数値計算の場合、系が線形不安定であればそれが直接に不安定現象につながる訳ではない事もこの問題の本質の解明を難しくしている。実際、1 次元の進行衝撃波計算で安定プロファイルが得られた状況で、本稿と同様にして線形化された形の安定性を調べると、衝撃波の強さによっては不安定になる事は容易に数値計算で調べられる。しかし、その場合の 1 次元計算では不安定は生じない。これは、非線形性の有する微小擾乱の抑制作用によるものであると考えられる。[12] そこで、圧縮性 Euler 方程式に存在する線形退化場の作用がより詳細に解析されなければならないが、この線形退化場は 1 次元でも 2 次元でも存在するものであり、線形退化場と多次元性の相互作用をどのように解析するかが今後の重要な課題である。

参考文献

1) H. Aiso, M. Abouziarov and T. Takahashi. Machinery of Numerical Instability in Conservative Difference Approximations for Compressible Euler Equations. . In S. Nishibata, editor, *Mathematical Analysis in Fluid and Gas Dynamics*, pages 178–191. Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, 2003.

2) J. Quirk. A contribution to the great Riemann solver debate. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 18:555–574, 1994.

3) J.-Ch. Robinet, J. Gressier, G. Casalis, and J.-M. Moschetta. Shock Wave Instability and Carbuncle Phenomenon: same intrinsic origin? . *J. Fluid Mechanics*, 417:237–263, 2000.

4) J. Smoller. *Shock waves and reaction-diffusion equations.* Springer-Verlag, NewYork, 1982.

[12] 非線形性による微小擾乱の抑制作用は連続モデル (元の偏微分方程式である非線形保存則) が有しており、それが離散モデルにも継承される。線形の輸送方程式の場合拡散項がなければ連続モデルである元の偏微分方程式は微小擾乱の抑制作用を有しない。(全ての情報が特性曲線に沿って拡散されずに伝播する。) 離散化した場合に、いわゆる数値粘性により微小擾乱が拡散されるのみである。