

# Spectral Volume 法による高次精度非構造格子法の構築

芳賀臣紀 (東北大・院), 澤田恵介 (東北大・工)

## Development of High Order Unstructured Grids Solver with Spectral Volume Formulation

Takanori Haga (Tohoku University) and Keisuke Sawada (Tohoku University)

### ABSTRACT

A spectral volume (SV) method for unstructured grids, recently proposed by Wang, et al., is developed for solving the hyperbolic conservation law. In SV method, a higher order reconstruction of dependent variable is available without referring to neighboring cells. The resulting scheme is very compact, and is suitable for unstructured mesh method. In this study, linear advective equations are first solved for two- and three-dimensional computational domain. From the computed results, the spatial accuracy of the present SV scheme is directly examined. It is shown that a second order of spatial accuracy is favorably achieved. However, for the third order case, the obtained accuracy of the present SV scheme becomes generally less than third order, and it shows some dependence on the mesh systems as well as on the wave propagation direction. A preliminary calculation of inviscid flowfield over RAE2822 wing section is made. The computed pressure profile agrees well with that of the experimental data, though the shock location is positioned downstream side because of the absence of viscous effect.

### 1. はじめに

航空機のような複雑形状に対する流れ場の数値計算では、非構造格子法が多く利用されている。非構造格子法では解適合格子を利用して衝撃波のような不連続をシャープに捉えることができるが、なめらかな領域での解の精度は必ずしも十分とはいえない。基礎方程式を有限体積法で離散化する場合、解の精度を高めるためにはセル境界での流束積分を高精度に行う必要がある。従来の方法ではセル内の分布を自身と周囲のセル平均値を利用して多項式関数で再構築することにより、高次精度化を行う。しかし、近似多項式を高次にするほどステンシルが大きく広がり、局所的な解の精度と数値安定性の両立が困難となり、計算コストの増大も問題となっている。このため、実用的な計算コードは局所的に線形近似を行う空間二次精度にとどまっている。

近年、非構造格子上で高次精度化を実現する計算手法として、Cockburn と Shu らによって定式化が進んだ Discontinuous Galerkin (DG) 法<sup>1,2,3,4)</sup>が注目されている。DG 法は有限要素法の一つで、内部自由度としてセル内に配置された点での物理量、または基底多項式の展開係数を導入することによって、セル内の解の分布を高次に近似する。セル境界で解の不連続を許容し、流束をリーマン解法を利用して計算することで各セル毎に独立して内部自由度が時間更新される。この DG 法と同様に非構造格子で高次精度を達成する計算手法として、有限体積法に基づく Spectral Volume (SV) 法<sup>5,6,7,8,9)</sup>が Wang と Liu らによって提案されている。SV 法では従来の格子セルをさらに構造的なサブセルに分割し、サブセルのセル平均値を利用して

元のセル内の解を再構築する。DG 法と同様に解の再構築では周囲の情報を必要としないので、コンパクトで並列計算に適した計算手法として期待される。本報告は SV 法による非構造高次精度スキームの構築とその妥当性の検証を目的とし、二次元および三次元のスカラー線形移流問題を解くことにより計算コードの精度を調べる。また、SV 法を二次元の Euler 方程式に適用し、遷音速翼型周りの流れ場を計算する。

### 2. 数値計算法

#### 2-1 Spectral Volume 法の概要

SV 法では空間を Spectral Volume (SV) と呼ばれる二次元では三角形、三次元では四面体のセルで分割し、これらをさらに Control Volumes (CVs) と呼ばれる構造的なサブセルに分割する。この CV のセル平均値を利用して、SV 内の解を所期の次数の多項式関数で展開する。SV を分割する CV の数は近似多項式の次数に応じて決まり、SV の形状に対する対称性を考慮して直線または平面で分割される。このとき SV 内に導入される近似多項式と同じ次数の基底関数を各 CV に導入して、各 CV のセル平均値と基底関数の積の総和から SV 内の近似多項式を与える。

解の再構築は各 SV の内部で独立に行われる。このため SV 境界で物理量に不連続を生じるが、リーマン解法を適用することによって流束を計算する。一方、SV 内部の CV 境界では流束を直接求める。各 CV 境界における流束積分は近似解と同じ次数のガウス求積法によって計算する。非線形問題では解の再構築により数値的な振動を生じる場合がある。数値振動を抑え、解が滑らかな領域では精度を維持することが可能な TVB リミッターを用いた。

## 2-2 保存方程式の離散化

保存則を一般的な形式で表すと、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(u) = 0 \quad (1)$$

と書ける。ここで、 $u$  はスカラーあるいはベクトルの保存変数であり、 $\mathbf{F}(u)$  は流束関数である。式 (1) を各 CV について積分すると、発散定理により次式を得る。

$$\frac{d\bar{u}_{i,j}}{dt} + \frac{1}{V_{i,j}} \sum_{r=1}^K \int_{A_r} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_r dA = 0 \quad (2)$$

ここで  $\bar{u}_{i,j}$  は  $i$  番目の SV における  $j$  番目の CV のセル平均値である。 $V_{i,j}$  はその CV の体積、 $K$  はそれを囲む面の総数、 $A_r$  は  $r$  番目の面、そして  $\mathbf{n}_r$  は面  $A_r$  の外向き単位法線ベクトルを示している。

SV 法では SV 内の解を内部 CV のセル平均値と基底多項式の積で表現する。再構築問題の詳細については次節で述べる。いま各 SV 内の解を  $k+1$  次精度で近似する  $k$  次の多項式  $p_i(\mathbf{r})$  が存在すると仮定しよう。式 (2) の面積分は近似多項式  $p_i(\mathbf{r})$  と同じ次数のガウス求積法<sup>10)</sup> で計算する。

$$\int_{A_r} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_r dA \approx \sum_{q=1}^J w_{rq} \mathbf{F}(p(\mathbf{r}_{rq})) \cdot \mathbf{n}_r A_r \quad (3)$$

ここで  $q$  は積分点、 $J$  はその総数を表し、 $w_{rq}$  は重み係数、 $p(\mathbf{r}_{rq})$  は積分点における従属変数の値である。二次元の場合、辺上の積分点は一次の  $p(\mathbf{r}_{rq})$  に対しては辺の中点、二次の  $p(\mathbf{r}_{rq})$  に対しては二点必要である。三次元の場合、三角形面上の積分点は、一次の  $p(\mathbf{r}_{rq})$  に対しては面の重心、二次の  $p(\mathbf{r}_{rq})$  に対しては三点必要である。面が多角形の場合は三角形に分割して積分を行った。解の再構築は各 SV の内部で独立に行われるので、SV の境界では両側から二つの異なる近似値が与えられ不連続になる。そのため SV 境界上の CV 境界ではリーマン解法により数値流束を求める。本計算では、次の Rusanov Flux と呼ばれる近似リーマン解法を用いた。

$$\mathbf{F}_R(p^-, p^+, \mathbf{n}_r) = \frac{1}{2} [\mathbf{F}(p^-) + \mathbf{F}(p^+) - \alpha(p^+ - p^-)] \quad (4)$$

ここで  $\alpha$  はヤコビアン行列のスペクトル半径であり、セル境界に垂直な平均速度の大きさと平均音速の和として与えられる。この方法は数値拡散が大きい計算コストは小さい。これに対し、SV 内部で近似解は連続なので、内部 CV 境界では再構築された解を直接流束関数に代入する。各 CV 境界の流束は一意に求められるので、CV 単位での保存性が守られる。各 CV に対する離散式の和をとると、(1) 式を空間方向に半離散化した空間  $k+1$  次精度の SV 法が得られる。

$$\frac{d\bar{u}_{i,j}}{dt} + \frac{1}{V_{i,j}} \sum_{r=1}^K \sum_{q=1}^J w_{rq} \mathbf{F}_R(p^-(\mathbf{r}_{rq}), p^+(\mathbf{r}_{rq}), \mathbf{n}_r) A_r = 0 \quad (5)$$

時間積分は三次精度の TVD Runge-Kutta 法<sup>11)</sup> により行う。

## 2-3 Spectral Volume の分割と再構築問題

SV 法では SV 内の解を近似する多項式の次数に応じて、CV の分割数が決まる。例えば、解を  $k$  次の多項式で近似する場合、二次元では  $m = (k+1)(k+2)/2$  個、三次元では  $m = (k+1)(k+2)(k+3)/6$  個の自由度が必要であり、SV は  $m$  個の CV に分割される。 $m$  個の CV セルで個別に定義される  $k$  次の基底多項式  $L(\mathbf{r})$  で SV 内の  $k$  次の近似多項式を展開することを考える。

$$p_i(\mathbf{r}, t) = \sum_{j=1}^m L_j(\mathbf{r}) \bar{u}_{i,j}(t) \quad (6)$$

基底多項式  $L$  は次式を満たす。

$$\frac{1}{V_{i,j}} \int_{CV_{i,j}} L_l(\mathbf{r}) dV = \delta_{jl}, (j, l = 1, \dots, m) \quad (7)$$

ある CV に対応する  $L$  はその CV で積分すると 1 になり、他の CV で積分すると 0 になる。これら  $m$  個の拘束条件から  $k$  次の多項式である  $L$  が各 CV に対して一意に決まる。なお、実際の計算では物理空間の SV を計算空間の基準 SV に線形写像するので、計算空間で定義された同一の基底関数の組を利用することができる。

近似解の精度や数値的安定性は分割の仕方に大きく依存することが知られている。特に近似多項式を高次にするほど必要な自由度の数が増え、様々な分割が考えられる。このため、性質のよい分割をいかに見つけるかが重要な問題となる。分割の質を評価する一つの指標として、次のルベーク定数が利用できる。

$$\|\Gamma\| = \max_{r \in SV} \sum_j |L_j(\mathbf{r})| \quad (8)$$

この値が小さい程、安定で精度の良い近似多項式を得ることが計算により示されている<sup>6,7)</sup>。実際には、辺の分割比などをパラメータとして試行錯誤的に分割を評価するが、最適な分割法は知られていない。本計算では、Wang らによって提案された分割法<sup>6,9)</sup> を用いる。二次元三角形セルの分割法を図 1 に示す。一次関数の再構築を行う SV は各辺の中点と重心を結ぶ三つの四角形に分割される。二次関数の再構築を行う分割では各辺上に辺の長さ 1 に対して  $d = 1/4$  となる二点をとり、重心と結んで六つの CV に分割される。また三次元四面体セルの分割法を図 2 に示す。一次関数の再構築を行う SV は各辺の中点、各面の重心および四面体の重心を利用して四つの六面体に分割される。二次関数の再構築を行う SV は各辺上に二点、各面上に頂点から対辺の中点を結んだ線分の内分点合わせて三つと重心の四点、四面体内部に頂点から対面の重心を結んだ線分の内分点合わせて四つと体積重心の五点の分割点を配置して、各頂点を含む四つの六面体および辺上の六つの八面体の計十個の CV に分割される。本計算では頂点を含む四つの CV に関して、辺の長さが SV の  $1/4$  の四面体になるように分割した。

## 2-4 スロープリミッター

解の単調性が維持される条件は次式で与えられる。

$$\bar{u}_{i,j}^{\min} \leq p_i(\mathbf{r}_{rq,j}) \leq \bar{u}_{i,j}^{\max} \quad (9)$$



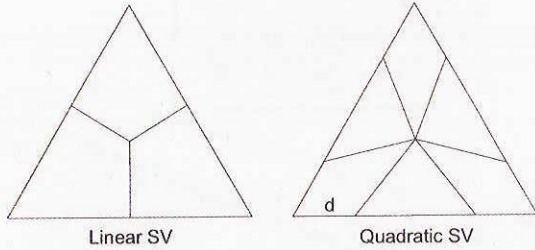


図1 三角形SVの分割

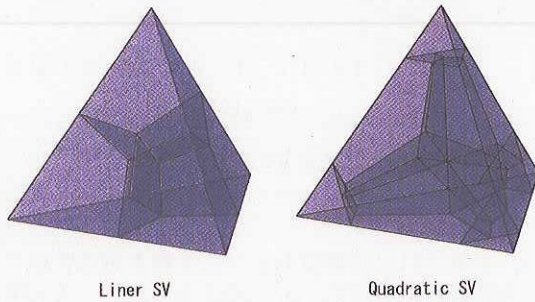


図2 四面体SVの分割

ここで  $\bar{u}_{i,j}^{min}$  と  $\bar{u}_{i,j}^{max}$  は  $i$  番目の SV 内の  $j$  番目の CV に隣接する周囲の CV のセル平均値の最小値と最大値であり、 $p_i(\mathbf{r}_{r,q,j})$  は  $j$  番目の CV の積分点において再構築された値である。しかし、この条件の下では新たに極値を作ることを許さないで、解が滑らかな領域での精度が悪化する。そこで次の TVB 条件を導入する。

$$|p_i(\mathbf{r}_{r,q,j}) - \bar{u}_{i,j}| \leq 4M_q |\mathbf{r}_{r,q,j} - \mathbf{r}_{i,j}|^2 \quad (10)$$

通常、定数  $M_q$  には解の二階微分の最大値が用いられるが、不連続の解が含まれる場合はユーザが指定するパラメータとなる。ここでは各保存成分に対して個別に解の制限を行うことにし、各成分に対するパラメータを次のように定めた。

$$M_q = M(\bar{u}^{max} - \bar{u}^{min}) \quad (11)$$

ここで、 $M$  は各成分に共通のパラメータで、 $\bar{u}^{max}$  と  $\bar{u}^{min}$  は計算領域全体における最大および最小の保存変数のセル平均値である。式 (9) と式 (10) がともに満たされない場合、SV 内に不連続が存在すると判断し、基底多項式による再構築をやめて各 CV 毎に解を線形近似する。このとき各 CV の勾配は  $p_i(\mathbf{r}_{r,q})$  の微分係数から求め、式 (9) の条件を満たすように Venkatakrishnan の制限関数<sup>12)</sup>により勾配を制限する。 $p_i(\mathbf{r}_{r,q})$  の微分係数は式 (6) から分かるように基底関数  $L$  の微分係数と CV のセル平均値の線形和で与えられる。

### 3. 数値計算結果

初めに構築された計算コードの空間精度を検証するため、厳密解が存在するスカラー線形移流問題を考える。二次元および三次元の問題に対し、二次精度および三次精度の SV 法を適用する。次に三次精度 SV 法を二次元のオイラー方程式に適用し、遷音速翼型周りの流れ場を求める。

#### 3-1 二次元線形移流問題

次のような二次元線形移流方程式を考える。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad -1 \leq x, y \leq 1, \quad (12)$$

$$a = \cos \theta, b = \sin \theta$$

正方形領域に対し、境界条件として底辺に次の分布を与える。

$$u(x, -1) = \sin \pi(x + 1) \quad (13)$$

左右の辺は周期境界条件、上辺は流出条件を課す。 $\theta$  は  $x$  軸方向から反時計回りに測った角度であり、底辺の分布が  $\theta$  方向に大きさ 1 の速度で移流する。計算格子は各辺を等間隔に 10, 20 および 40 分割し、Gridgen を用いて非構造の三角形格子を生成した。図 3 に各辺を 10 分割したセル数 296 の場合を示す。移流角度を 22.5, 45 および 90 [deg] と変化させ、それぞれ二次および三次精度の SV 法で計算して定常解を求めた。この線形移流問題ではリミッターを導入せずに計算を行った。

図 4 および図 5 にそれぞれ二次精度および三次精度の計算結果を示す。移流角度は 22.5 [deg] で図 3 の格子を用いた。三次精度の解は底辺から流入した分布が散逸無く流出境界に到達している。図 6 は横軸に格子サイズ、縦軸に厳密解との誤差をとった両対数のグラフである。格子サイズとして計算領域の境界の分割の幅を用いた。誤差が格子サイズの  $n$  乗に比例して減少すると仮定すると両対数グラフの傾きは  $n$  となり、精度の次数を表す。二次精度および三次精度の定式化に対し、本計算で得られた精度は移流角度に依存せず概ね期待される精度を達成していることが分かる。

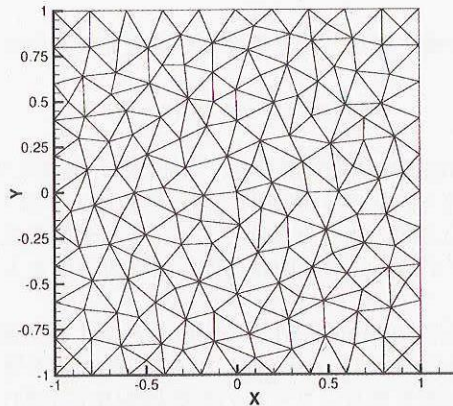


図3 計算格子(各辺10分割296セル)

#### 3-2 三次元線形移流問題

次に以下の三次元線形移流方程式を考える。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + c \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad 0 \leq x, y, z \leq 1, \quad (14)$$

$$a = \cos \phi \cos \theta, b = \cos \phi \sin \theta, c = \sin \phi$$



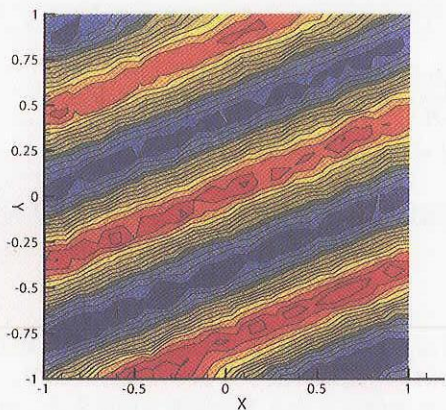


図4 二次精度 SV 法の解 (各辺 10 分割)

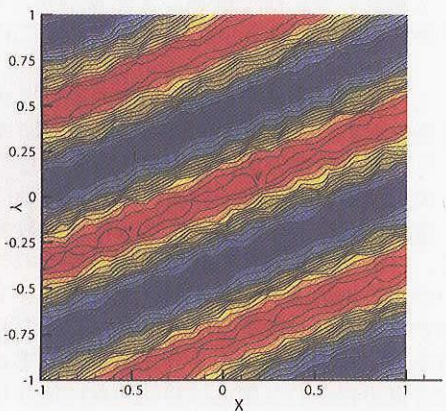


図5 三次精度 SV 法の解 (各辺 10 分割)

立方体領域に対し、境界条件として底面に次の分布を与える。

$$u(x, y, 0) = \sin 2\pi(x + y) \quad (15)$$

立方体の側面は周期境界条件、上面は流出条件を課す。 $\theta$  は x 軸方向から y 軸方向に測った角度、 $\phi$  は xy 面から z 軸方向に測った角度であり、それぞれ経度と緯度に対応する。二次元問題と同様に移流速度を 1 で与えた。

計算には regular grid と irregular grid の二種類の格子を用いた。regular grid では立方体の辺を等分割して立方体を作り、さらに六つの四面体に分割した。irregular grid では辺を等分割した後に Gridgen を利用してまず立方体の六つの面を非構造の三角形格子で分割し、その後内部を四面体格子で分割した。それぞれ二次元と同様に各辺を 10, 20 および 40 に分割した。移流角度は  $\theta$  を 45 [deg] に固定し、 $\phi$  を 22.5, 45 および 90 [deg] と変化させた。以上の各ケースについて二次および三次精度の SV 法により計算を行い、定常解を求めた。

図7および図8に、各辺 15 分割の regular grid を

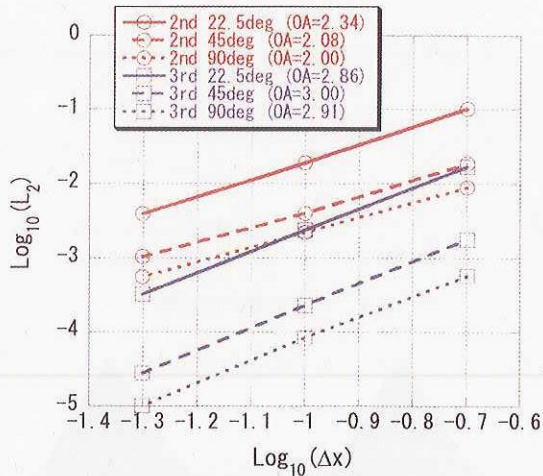


図6 二次元 SV 法の計算精度

用い、それぞれ二次精度および三次精度の SV 法で得られた計算結果を示す。 $\phi = 22.5$  とした。二次元問題と同様に三次精度スキームではより散逸の少ない解が得られている。図9に regular grid に対する計算精度を示す。二次精度スキームでは  $\phi=22.5$  [deg] の場合を除いて二次精度を達成した。三次精度スキームでは  $\phi=90$  [deg] の場合に三次精度を得たが、角度が小さいほど精度が低くなり、移流方向に解の精度が依存することが分かった。また、図10に irregular grid に対する計算精度を示す。regular grid の結果に比べ精度がさらに低下する傾向が見られる。これは不規則な分割により歪んだ格子が含まれるためと考えられる。今後、SV の分割法を変えてさらに三次元 SV 法の解の精度を検証する必要がある。

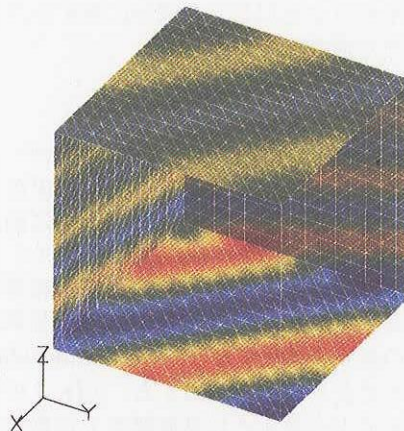


図7 二次精度 SV 法の解 (regular grid 15 分割)

### 3-3 RAE 翼型周りの圧縮性非粘性計算

三次精度 SV 法を二次元の Euler 方程式に適用し、RAE 遷音速翼型周りの非粘性流れ場を計算した。遠方境界は半径が翼弦長の 10 倍の円とし、三角形セルで



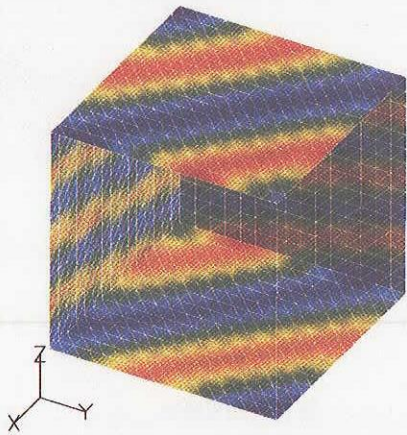


図8 三次精度SV法の解 (regular grid 15分割)

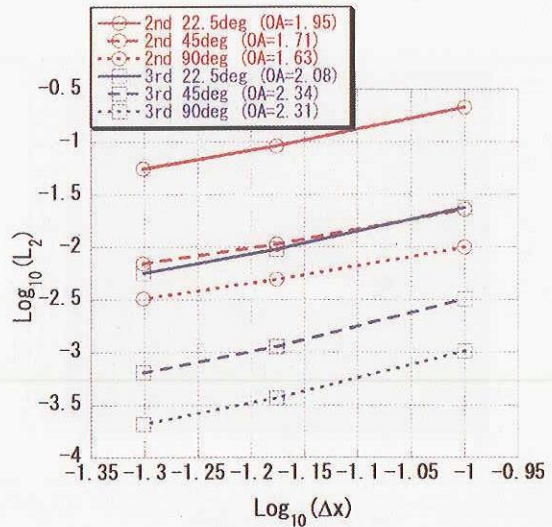


図10 三次元SV法の計算精度 (irregular grid)

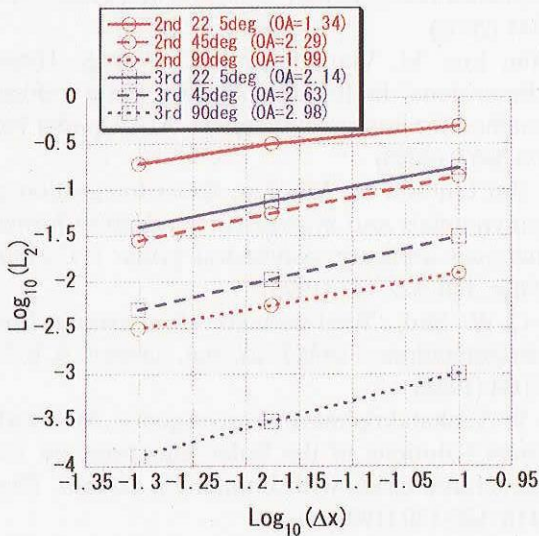


図9 三次元SV法の計算精度 (regular grid)

分割した。翼型近くの計算格子を図11に示す。計算条件は主流マッハ数を0.73、迎え角を2.31 [deg]とした。この問題では翼上面に衝撃波が現れるので、解の振動を抑えるためにTVBリミッターを導入した。パラメータMは180とした。時間積分は三次精度TVD Runge-Kutta法により行い、定常解への収束を加速するため局所時間刻み法を利用した。CFL数はSVセルのサイズに基づいて1/3とした。計算で得られた等マッハ線図を図12に示す。また翼面上のCp分布の比較を図13に示す。前縁部分の膨張プロファイルを再現した。圧力分布は実験データを概ね再現しているが、衝撃波位置と後縁側の分布のずれは非粘性計算によるものと考えられる。図14に収束履歴を示す。残差はおよそ30000ステップで二桁程度減少して、準定常状態となった。

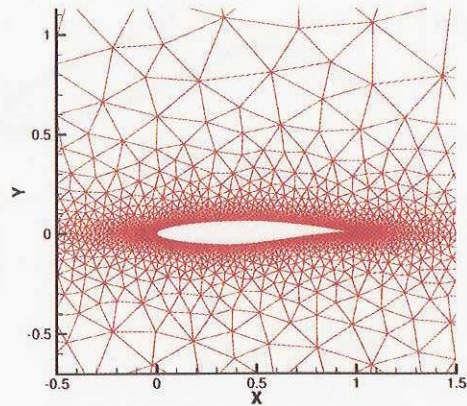


図11 RAE 2822の計算格子 (セル数9430)

#### 4. 結論

SV法に基づく高次精度非構造格子法を構築した。構築されたコードを用いて二次元および三次元の線形移流方程式を解いたところ、二次元問題では所期の精度を得たが、三次元問題では格子形状と波の移流方向に解の精度が依存した。また、SV法を二次元Euler方程式に適用し、RAE翼型周りの流れ場を計算したところ、良好な圧力分布を得た。

#### 参考文献

- 1) B. Cockburn and C.-W. Shu, TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws II: general framework, *Mathematics of Computation* 52, 411-435 (1989)
- 2) B. Cockburn, S.-Y. Lin and C.-W. Shu, TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws III:



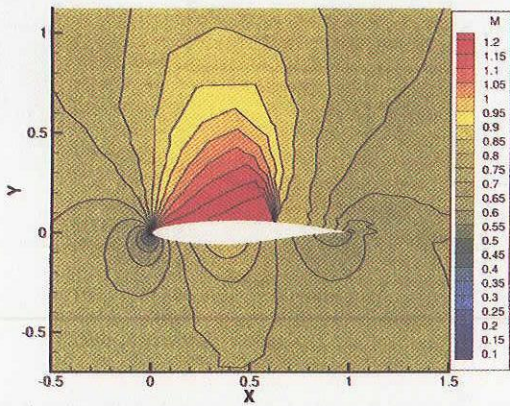


図 12 等マッハ線図

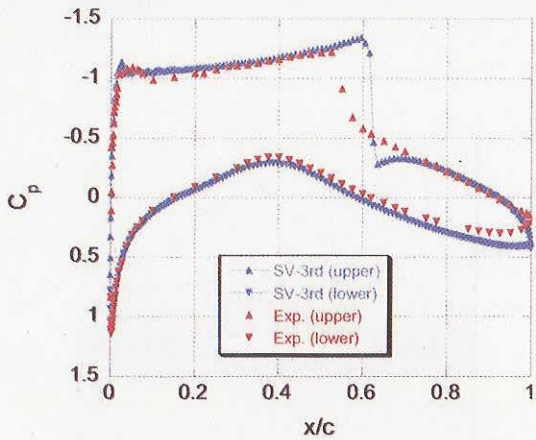


図 13  $C_p$  分布

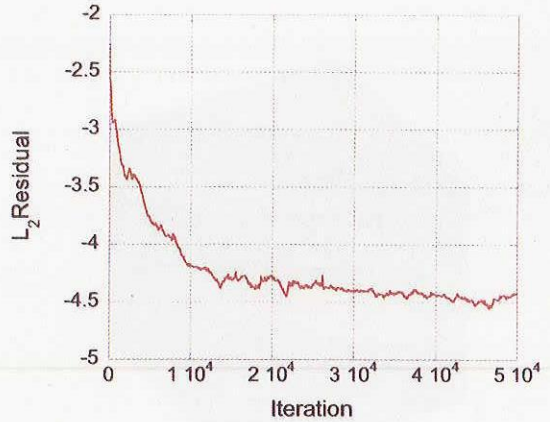


図 14 残差履歴

one dimensional systems, *J. Comput. Phys.* **84**, 90-113 (1989)

- 3) B. Cockburn, S. Hou and C.-W. Shu, TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws IV: the multidimensional case, *Mathematics of Computation* **54**, 545-581 (1990)
- 4) B. Cockburn and C.-W. Shu, The Runge-Kutta discontinuous Galerkin method for conservation laws V: multidimensional systems, *J. Comput. Phys.* **141**, 199-224 (1998)
- 5) Z.J. Wang, Spectral (finite) volume method for conservation laws on unstructured grids: basic formulation, *J. Comput. Phys.* **178**, 210-251 (2002)
- 6) Z.J. Wang and Yen Liu, Spectral (finite) volume method for conservation laws on unstructured grids II: extension to two-dimensional scalar equation, *J. Comput. Phys.* **179**, 665-697 (2002)
- 7) Z.J. Wang and Yen Liu, Spectral (finite) volume method for conservation laws on unstructured grids III: one-dimensional systems and partition optimization, *J. Sci. Comput.* **20**, 137-157 (2004)

- 8) Z.J. Wang, Laiping Zhang and Yen Liu, Spectral (finite) volume method for conservation laws on unstructured grids IV: extension to two-dimensional systems, *J. Comput. Phys.* **194**(2), 716-741 (2004)
- 9) Yen Liu, M. Vinokur and Z.J. Wang, Three-dimensional high-Order spectral finite volume method for unstructured grids, AIAA paper No. 03-3837, (2003)
- 10) Yen Liu and M. Vinokur, Exact integration of polynomials and symmetric quadrature formulas over arbitrary polyhedral grids, *J. Comput. Phys.* **140**, 122-147 (1998)
- 11) C.-W. Shu, Total-variation-diminishing time discretizations, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* **9**, 1073-1084 (1988)
- 12) V. Venkatakrishnan, Convergence to Steady State Solutions of the Euler Equations on Unstructured Grids with Limiters, *J. Comput. Phys.* **118**, 120-130 (1995)