

直交基底関数を用いる高次精度 Discontinuous Galerkin 法の検討

保江 かな子(東北大院), 澤田 恵介(東北大)

Study of High Order Discontinuous Galerkin Method
with Orthogonal Basis Functions

by

Kanako Yasue and Keisuke Sawada

ABSTRACT

A Discontinuous Galerkin finite element (DG) method is developed to solve the hyperbolic conservation law in two-dimensional space on unstructured mesh systems having both triangular and quadrilateral computational cells. Use of such mesh systems is supposed important when the Navier-Stokes equations are solved for practical problems in the aerospace applications. In the present DG scheme, the approximate solution within each cell is given by a sum of local basis functions multiplied by degree-of-freedom. These basis functions are orthogonal in a reference cell in the mapped computational space. Therefore all types of computational cells can be treated in a unified manner. In this paper, the spatial accuracy of the developed DG scheme is examined for several unstructured mesh systems having both triangular and quadrilateral computational cells. It is shown that the present DG scheme gives fairly accurate solutions for wave propagation problems.

1. はじめに

数値流体力学 (CFD) は, さまざまな分野で用いられており, 対象となる物体形状も非常に複雑化している. 複雑な形状周りの解析には非構造格子が多く用いられる. 非構造格子は格子に自由度があり, 格子生成や, 格子点の追加, 削除が容易にできるという利点がある. しかし, 高レイノルズ数流れの計算では壁面付近の四面体セルの形状が悪化し, 粘性項の計算精度に悪影響を与えてしまう. そのため, 壁面付近にプリズムセルを配置した, Hybrid 格子の利用が一般的となっている.

現在, さまざまな格子形状を統一的に取り扱うことが可能な計算手法として有限体積法が複雑形状周りの粘性流れ場によく用いられる. 有限体積法は積分形の保存則を直接離散化することに対応しており, 格子形状がさまざまであっても保存則が完全に満たされる.

有限体積法の高次精度化においては, セル境界における流束計算の精度向上が必要とされる. その際, セル内の物理量の再構築が必要となり, 高次精度達成のためにはステンシルを周囲のセルに拡大しなければならない. それにより, 計算量が増大し, 安定性の悪化に繋がる. そのため, 現在用いられている実用コードの多くは空間精度が二次程度に留まっている.

非構造格子上で高次精度を達成する計算手法としては, WENO 法^[1], Spectral Volume (SV) 法^[2], Discontinuous Galerkin (DG) 法^[3]などさまざまな研究が行われている. SV 法や DG 法は, 基底関数によりセル内分布を記述する手法であり, 特

に DG 法は, 複雑な格子形状に対しても高次精度を厳密に実現することが可能な計算手法として現在非常に注目されている.

DG 法は有限要素法の一つであり, 基底関数と自由度(展開係数)の線形和で格子内部の解を近似している. テスト関数として, 基底関数を適用することを Galerkin 法と呼び, セル境界における物理量の不連続を許容しているものを特に Discontinuous Galerkin 法という.

DG 法は 1974 年に Lesaint と Raviart によって輸送方程式に対して初めて確立された^[4]. さらに, 1989 年以降 Cockburn と Shu による一連の論文の中で, Runge-Kutta DG 法が確立されている^[5, 6]. さらに 1991 年には Dubiner によって三角形格子に対する直交基底関数が提案され^[7], その後 1994 年に Sherwin と Karniadakis によって直交基底関数が一般化されている^[8].

DG 法の適用はさまざまな問題に対して行われているが, 高レイノルズ数粘性流れ場への適用例は少ない. このような問題では, 薄い境界層を精度良く捕えることが重要であるが, DG 法でも有限体積法のように Hybrid 格子導入の必要性があるのか, あるいは大きなアスペクト比の四面体セルだけでも境界層領域を精度良く解像できるのかは明らかになっていない.

そのため, 本研究では, DG 法を用いた Navier-Stokes 方程式に対する高次精度非構造格子法の構築を目的とし, さまざまな形状の計算セルの統一的な取り扱いを検討する. 本報告では, 二次元線形移流方程式を解いて, さまざまなセル形状に対する DG 法の精度検証を行う.

2. Discontinuous Galerkin 法

次式のような双曲型保存方程式の離散化を考える;

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = 0. \tag{1}$$

DG 法では、次式のような、式(1)の弱形式である積分方程式を解く;

$$\iint_{\Omega} w \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx dy = 0. \tag{2}$$

ここで、 Ω は計算セル、 w はテスト関数であり、 $w = w(x, y)$ で表される。

式(2)を部分積分して Gauss の発散定理を適用すると、次式を得る;

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \frac{\partial w u}{\partial t} dx dy + \int_{\partial \Omega} w (f n_x + g n_y) dl \\ - \iint_{\Omega} \left(f \frac{\partial w}{\partial x} + g \frac{\partial w}{\partial y} \right) dx dy = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

式(3)において、テスト関数 w に基底関数 v_i を、物理量 u に近似関数 u_h を代入すると、次式のように表される;

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \frac{\partial v_i u_h}{\partial t} dx dy + \int_{\partial \Omega} v_i (f(u_h) n_x + g(u_h) n_y) dl \\ - \iint_{\Omega} \left(f(u_h) \frac{\partial v_i}{\partial x} + g(u_h) \frac{\partial v_i}{\partial y} \right) dx dy = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

必要な精度の Gauss 求積法を用いて式(4)の積分を評価することにより、高次精度の解を得る。

3. 基底関数

DG 法では、セル内物理量を次式のように定義する;

$$u_h(x, y) = \sum_i u_i(t) v_i(x, y). \tag{5}$$

このとき、基底関数にはセル内に精度に見合った次数の多項式を必要な数だけ導入する方法と直交多項式を用いる方法とがある。簡単のために二次元二次精度を例に挙げる。

3.1 セル内に多項式を導入する方法

空間二次精度を達成するために、基底関数として次式のような線形関数を与える;

$$v_i(x, y) = a_i x + b_i y + c_i. \tag{6}$$

三角形セルに対する基底関数群として、図 1 ように各辺の中点に一点、計三点を選び、次のような拘束条件を科すことにより、三個の異なる線形分布を導入する。これらの線形分布は次の直交関係式を満たす;

$$\iint_{\Omega} v_i(x, y) v_j(x, y) dx dy = c_i \delta_{ij}. \tag{7}$$

しかし、このような基底関数の選び方では、拘束条件を与える点数が増えると関数分布が悪化して、達成できる精度が頭打ちになることが知られている。さらに、二次元三次精度以上や三次元では基底関数が直交しない。また、選択する点の数から主に三角形 / 四面体セル以外の形状に拡張し難い。

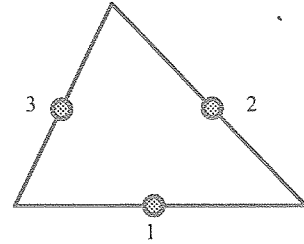


図 1 点の選び方

3.2 直交多項式を用いる方法

この方法では、基底関数として直交多項式を採用する。ここでは、矩形セルに対する直交基底関数として、次式のような Legendre の多項式 $\Psi_{\alpha}^{0,0}$ を与えた;

$$\begin{aligned} v_1(x, y) &= \Psi_0^{0,0}(x) \Psi_0^{0,0}(y) \\ v_2(x, y) &= \Psi_1^{0,0}(x) \Psi_0^{0,0}(y) \\ v_3(x, y) &= \Psi_0^{0,0}(x) \Psi_1^{0,0}(y). \end{aligned} \tag{8}$$

この方法では、矩形セル内部に x, y 方向の直交基底関数列のテンソル積を導入するだけなので、多次元化や高次精度化が比較的容易に実現出来る。

また、写像変換を用いることにより、一般的なセル形状にも容易に適用できる。

4. 基準セルと直交基底関数

ここでは、簡単のために、二次元の場合を考える。

さまざまなセル形状を統一的に取り扱うために、各セルを $\{x, y | -1 \leq x, y \leq 1\}$ の基準正方形セルへ変換する方法を示す。

4.1 基準正方形セルへの変換

4.1.1 四角形セルから基準正方形セルへの変換

四角形セルから基準正方形セルへの変換は、次式を用いて図 2 のように変換する;

$$\begin{aligned} x &= \frac{1-\xi}{2} \cdot \frac{1-\eta}{2} x_1 + \frac{1+\xi}{2} \cdot \frac{1-\eta}{2} x_2 \\ &\quad + \frac{1+\xi}{2} \cdot \frac{1+\eta}{2} x_3 + \frac{1-\xi}{2} \cdot \frac{1+\eta}{2} x_4 \\ y &= \frac{1-\xi}{2} \cdot \frac{1-\eta}{2} y_1 + \frac{1+\xi}{2} \cdot \frac{1-\eta}{2} y_2 \\ &\quad + \frac{1+\xi}{2} \cdot \frac{1+\eta}{2} y_3 + \frac{1-\xi}{2} \cdot \frac{1+\eta}{2} y_4. \end{aligned} \tag{9}$$

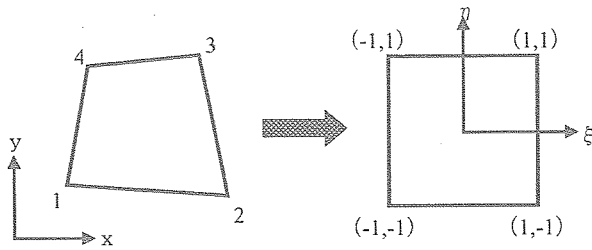


図2 四角形セルから基準正方形セルへの変換

4.1.2 三角形セルから基準正方形セルへの変換

三角形セルから基準正方形セルへの変換は、図3ように二段階の写像変換を経て行う;

変換1

$$x = \frac{1}{2} \{ (x_2 - x_1)(r+1) + (x_3 - x_1)(s+1) + 2x_1 \} \quad (10)$$

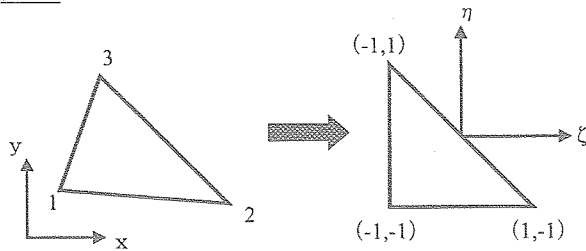
$$y = \frac{1}{2} \{ (y_2 - y_1)(r+1) + (y_3 - y_1)(s+1) + 2y_1 \},$$

変換2

$$r = \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{2} - 1 \quad (11)$$

$$s = \eta.$$

変換1



変換2

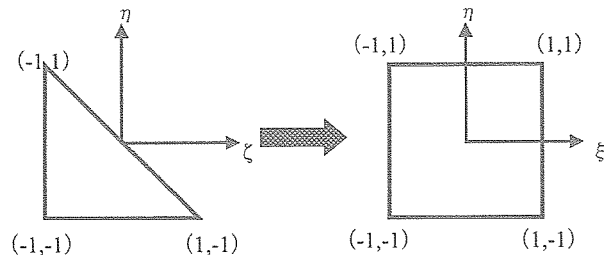


図3 三角形から基準セルへの変換

4.2 直交基底関数

四角形セルから基準正方形セルに変換する場合と、三角形セルから基準三角形セルを経て基準正方形セルに変換する場合は、異なる直交多項式を用いなければならない。

4.2.1 四角形セルから基準正方形セルへの変換

短形セルに対する直交基底関数と同様、式(8)で表される Legendre の基底関数を適用する。

4.2.2 三角形セルから基準正方形セルへの変換

この場合には、基準正方形セルに変換したときに直交関数列になるような基底関数を用いる。ここでは、Dubiner によって提案された Jacobi 多項式を基底関数として用いる^[7]。このとき基底関数は次式のように表される;

$$v_i(\xi, \eta) = P_m^{0,0}(\xi) \cdot (1-\eta)^m P_n^{2m+1,0}(\eta). \quad (12)$$

ここで、 $P_\alpha^{\beta,\gamma}$ は Jacobi 多項式である。

5. 支配方程式の変形

異なるセル形状への写像変換に伴い、物理空間における支配方程式(1)を基準正方形セルが置かれた計算空間に変換しなければならない。このとき次式を得る;

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{g}}{\partial \eta} = 0$$

$$\hat{u} = J^{-1}u \quad (13)$$

$$\hat{f} = J^{-1}(\xi_x f + \xi_y g)$$

$$\hat{g} = J^{-1}(\eta_x f + \eta_y g).$$

ここで、 J は変換の Jacobian である。

四角形から基準正方形セルへの変換の Jacobian は;

$$J = \frac{8}{C_1 + C_2 \xi + C_3 \eta} \quad (14)$$

$$C_1 = 2\{(x_3 - x_1)(y_4 - y_2) - (x_4 - x_2)(y_3 - y_1)\}$$

$$C_2 = 2\{(x_2 - x_1)(y_3 - y_4) - (x_3 - x_4)(y_2 - y_1)\}$$

$$C_3 = 2\{(x_4 - x_1)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_4 - y_1)\},$$

であり、三角形から基準正方形セルへの変換の Jacobian はそれぞれ;

変換1

$$J = \frac{4}{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)}, \quad (15)$$

変換2

$$J = \frac{2}{1-\eta},$$

となる。

6. 解の求め方

計算空間に写像された支配方程式(13)に対して DG 法を適用する。このとき、式(4)より次式が得られる;

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial v_i \hat{u}_h}{\partial t} d\xi d\eta + \int_{\partial\Omega} v_i (\hat{f}(\hat{u}_h) n_\xi + \hat{g}(\hat{u}_h) n_\eta) dl - \iint_{\Omega} \left(\hat{f}(\hat{u}_h) \frac{\partial v_i}{\partial \xi} + \hat{g}(\hat{u}_h) \frac{\partial v_i}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta = 0. \quad (16)$$

ここで、式(16)の各項を次式のように定義する;

$$J_1 = \iint_{\Omega} \frac{\partial v_i \hat{u}_h}{\partial t} d\xi d\eta, \quad (17-a)$$

$$J_2 = \int_{\partial\Omega} v_i (\hat{f}(\hat{u}_h) n_\xi + \hat{g}(\hat{u}_h) n_\eta) dl, \quad (17-b)$$

$$J_3 = \iint_{\Omega} \left(\hat{f}(\hat{u}_h) \frac{\partial v_i}{\partial \xi} + \hat{g}(\hat{u}_h) \frac{\partial v_i}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta. \quad (17-c)$$

6.1 J_1 の評価

式(17-a)の v_i および \hat{u}_h に式(5), (8)を代入する。二次精度を仮定すると、次式が得られる;

$$J_1 = \sum_{j=1}^3 \frac{du_j}{dt} \iint_{\Omega} v_i v_j d\xi d\eta, \quad (18)$$

ここで、 $I_{ij} = \iint_{\Omega} v_i v_j d\xi d\eta$ とおくと、モーメント I_{ij} は、元のセル形状が四角形の場合は、式(19)で、元のセル形状が三角形の場合には、式(20)で与えられ、いずれも対角行列となる;

$$I_{ij} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{pmatrix}, \quad (19)$$

$$I_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

このとき直交関数列の係数 $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3$ に対する次式を得る;

$$J_1^1 = I_{11} \frac{d\hat{u}_1}{dt}, \quad J_1^2 = I_{22} \frac{d\hat{u}_2}{dt}, \quad J_1^3 = I_{33} \frac{d\hat{u}_3}{dt}. \quad (21)$$

ここで、式(16)および(17)より、 $J_1^i + J_2^i - J_3^i = 0$ が成立するので、 J_2 および J_3 がそれぞれ求められれば次式のような直交関数列の係数に対する時間発展方程式を得る;

$$\frac{d\hat{u}_1}{dt} = \frac{1}{I_{11}} (J_3^1 - J_2^1), \quad (22-a)$$

$$\frac{d\hat{u}_2}{dt} = \frac{1}{I_{22}} (J_3^2 - J_2^2), \quad (22-b)$$

$$\frac{d\hat{u}_3}{dt} = \frac{1}{I_{33}} (J_3^3 - J_2^3). \quad (22-c)$$

6.2 J_2 の評価

式(17-b)を基準正方形セルに適用すると次式を得る;

$$J_2 = \int_{-1}^1 v_i(x_j, y=1) \hat{g}(u_h(x_j, y=1, t)) d\xi + \int_{-1}^1 v_i(x_j, y=-1) \hat{g}(u_h(x_j, y=-1, t)) d\xi + \int_{-1}^1 v_i(x=1, y_j) \hat{f}(u_h(x=1, y_j, t)) d\eta + \int_{-1}^1 v_i(x=-1, y_j) \hat{f}(u_h(x=-1, y_j, t)) d\eta \quad (23)$$

式(23)の各積分は一次元の Gauss の求積法を用いて評価する。ここで、一次元の Gauss 求積法は以下のように定義される;

$$\int_{\partial\Omega} f(x) dx = \sum_{k=1}^n f(x_k) \cdot \sigma_k. \quad (24)$$

ただし、 $k = 1, \dots, n$ は Gauss 点、 σ_k は重みを表している。

6.3 J_3 の評価

式(17-c)を基準正方形セルに適用する。数値積分は二次元の Gauss の求積法を用いて評価する。二次元の Gauss 求積法は以下のように定義される;

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m f(x_k, y_l) \cdot \sigma_k \cdot \sigma_l. \quad (25)$$

ここで、 $k = 1, \dots, n$, $l = 1, \dots, m$ は Gauss 点、 σ_k , σ_l は各点に対応する重みを表している。

7. 計算条件

さまざまな格子形状に対する DG 法の精度検証を行うために、図 4 のような計算領域に対して、次式で与えられる二次元線形移流方程式を解いた;

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \cos \theta \frac{\partial u}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (26)$$

$$(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1].$$

境界条件として $y = 0$ の流入境界に $u = \sin \pi x$ を与えた。移流角度は $\theta = 22.5, 45.0, 67.5, 90.0$ [deg] の四通りを仮定した。また、各辺の分割数は 20, 40, 60 の三通りで与えた。計算格子として図 5(a)~(d)に示されるように四種類を用意した。それぞれのセル数は表 1 に示されている。

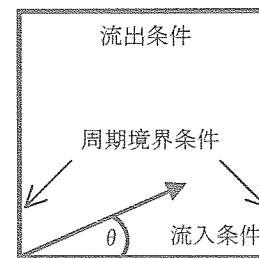


図 4 計算領域

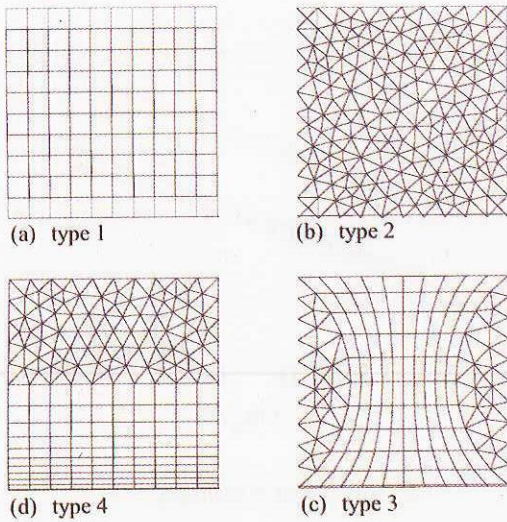


図5 計算格子

	Cell 数	Cell 数 (四角形)	Cell 数 (三角形)
Type 1	20	400	0
	40	1600	0
	60	3600	0
Type 2	20	1424	0
	40	5642	0
	60	12660	0
Type 3	20	1078	400
	40	4454	1600
	60	9810	3600
Type 4	20	768	400
	40	3066	1600
	60	6874	3600

表1 セル数

8. 計算結果

図6に type1 から type4 までの格子で、一辺の分割数を 20,40,60 で与えた場合の計算結果を示す。移流角度 22.5 [deg] を仮定した。格子サイズを細かくすると数値拡散が抑えられ、流出境界に到達するまで波が減衰することなく伝播していく様子が分かる。

図7に type1 から type4 の格子を用いて得られた計算誤差と分割数の関係を示す。移流角度が 22.5, 45.0, 67.5, 90.0[deg] の場合を調べた。両対数グラフ上でフィットした直線の勾配は計算精度を与える。移流角度が大きくなるほど計算精度が落ちているが、全ての場合において空間二次精度を達成していることが分かる。

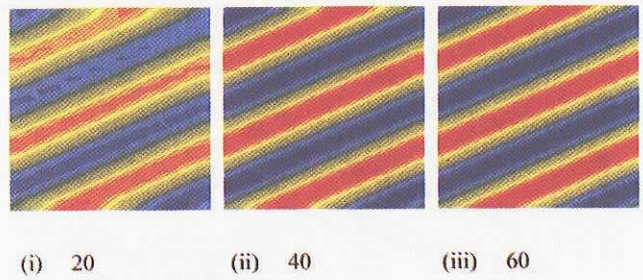


図6(a) Type1の計算結果

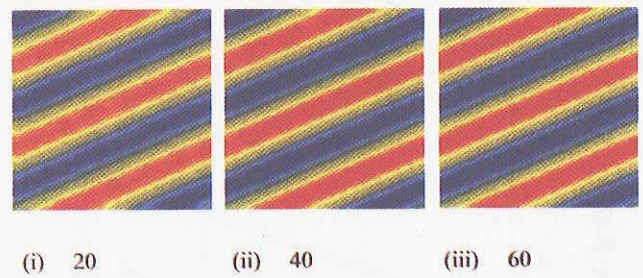


図6(b) Type2の計算結果

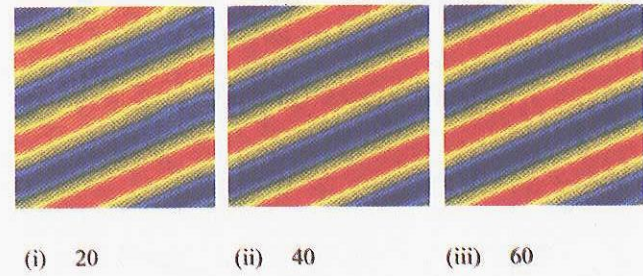


図6(c) Type3の計算結果

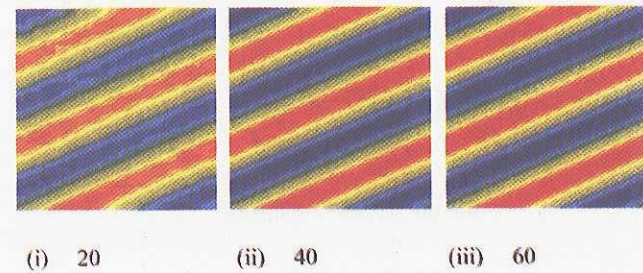


図6(d) Type4の計算結果

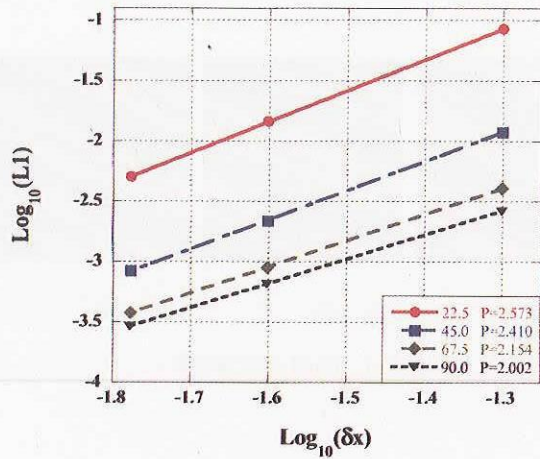


図 7(a) Type1 の空間精度

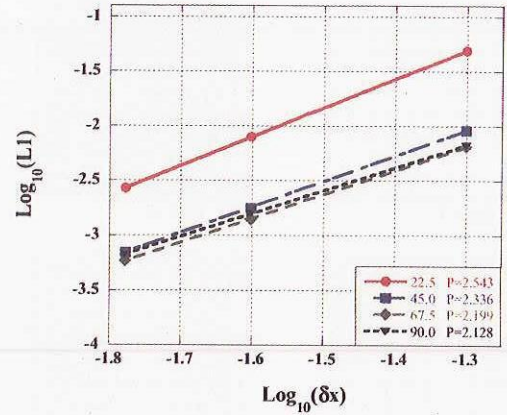


図 7(d) Type4 の空間精度

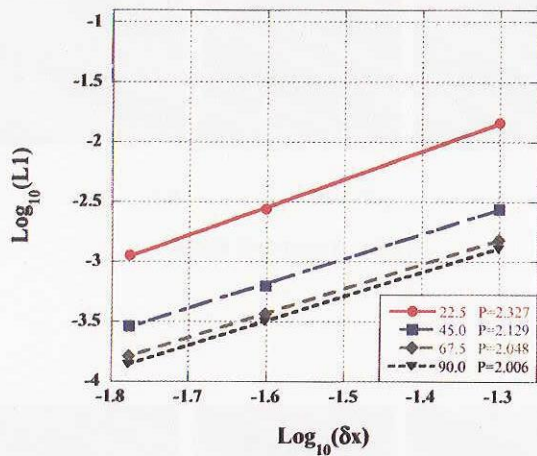


図 7(b) Type2 の空間精度

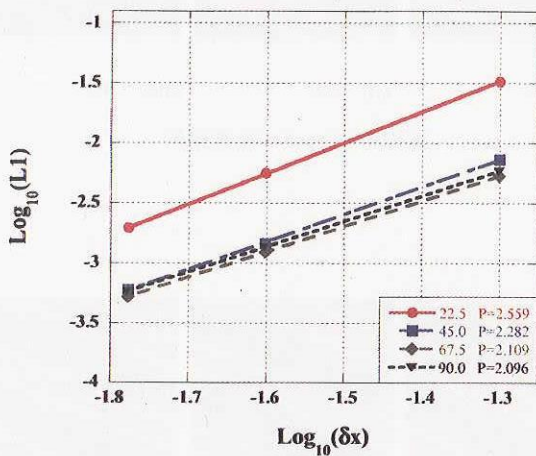


図 7(c) Type3 の空間精度

法を構築した。また線形移流方程式を解くことによって精度検証を行った。

計算結果より、格子の種類によらず二次精度を達成した。また、移流角度が大きくなるにつれ、計算精度の低下が見られたが、全ての場合において二次精度を達成した。

今後は、アスペクト比の大きな四辺形セルに対する移流拡散問題の検証を行うとともに、高レイノルズ数流れ場計算における Hybrid 格子の必要性に関して検討を進めていく予定である。

参考文献

- 1) X-D. Liu and S. Osher, T. Chan, Weighted Essentially Non-oscillatory Schemes, Journal of Computational Physics 115, 200-212 (1994).
- 2) Z. J. Wang, Spectral Finite Volume Method for Conservation Laws on Unstructured Grids, Journal of Computational Physics 178, 210-251 (2002).
- 3) B. Cockburn, Discontinuous Galerkin Methods, School of Mathematics, University of Minnesota (2003), 1-25.
- 4) P. Lesaint and P. A. Raviart, On a finite element method to solve the neutron transport equation, in Mathematical Aspects of Finite Elements in Partial Differential Equations, edited by C. de Boor, (Academic Press, New York, 1974), P. 89.
- 5) B. Cockburn and C-W. Shu, TVB Runge-Kutta Local Projection Discontinuous Galerkin Finite Element Method for Conservation Laws II: General Framework, Math. Comp. 52 (1989), 411-435.
- 6) B. Cockburn and C-W. Shu, TVB Runge-Kutta Discontinuous Galerkin Method for Conservation Laws IV: Multidimensional Systems, Journal of Computational Physics 141, 199-224 (1998).
- 7) Dubiner, M., Spectral Method on Triangles and Other Domains, J. Sci. Comp., 6 (1991), 345-390.
- 8) Shervin, S.J. and Karniadakis, G.E., A Triangular Spectral Element Method; Applications to the Incompressible Navier-Stokes Equations, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 123 (1995), 189-229.

9. 結論

基準正方形セルへの写像と直交基底関数を用いることによって、さまざまなセル形状が混在した格子に対する高次精度 DG