

陰的 Discontinuous Galerkin 法による高次精度非構造格子法の検討

澤田恵介 (東北大学・工)

High Order Accurate Unstructured Mesh Method Based on Implicit Discontinuous Galerkin Scheme

by

Keisuke Sawada (Tohoku University)

Abstract

An implicit Discontinuous Galerkin scheme for the hyperbolic conservation law is developed utilizing a pointwise relaxation algorithm. First, a scalar linear advective equation in the two-dimensional space is solved by the present pointwise relaxation scheme for a second- and third-order spatial accuracy. The obtained results show favorable convergence properties while retaining the spatial accuracy of the scheme rigorously. The scheme is then extended to solve the Euler equations in the two-dimensional space. The computed transonic inviscid flowfield over RAE2822 wing section shows that the present scheme is capable of providing higher order accurate solutions with a rapid convergence property. It is found, however, that the convergence property highly depends on the choice of the local basis functions as well as on the form of the slope limiter.

1. はじめに

航空機周りの流れ場の計算空気力学シミュレーションにおいては、形状適合性に優れた非構造格子法が多用されている。非構造格子法は解適合格子を用いることによって、衝撃波を非常に鋭く捕らえることが可能である。しかし、滑らかな領域では計算精度が高々2次以下の場合が多い。この原因は流束積分の精度が低いことに尽きる。計算効率を重視するためにセル境界の中心における流束関数の値で積分値を評価すると、いくら流束関数の精度を1次元的に高めても2次精度以上は達成できない。さらに衝撃波を安定に捕らえるための勾配制限が付加されるので、計算精度は容易に2次精度を下回る。非構造格子法によるデルタ翼前縁剥離渦の定量的な捕捉を試みた過去の例では、解適合格子を用いて渦領域の格子密度が格段に高められたにも拘わらず解の顕著な改善は見られなかった。これは実用ソルバーの空間精度が低いことを示唆している。

非構造格子法では様々なセル形状に対して保存則を満たすことが可能な有限体積法が多用されている。有限体積法の解の高次精度化では、あらかじめセル内部における解の分布を必要な精度で見出し、流束関数の積分を評価する。通常の有限体積法は微分値の時間発展を追跡せず、セル内保存量の平均値だけを変数とする。このため、自分自身と周囲のセルにおける平均値から局所的な保存量分布の再構築を行わなければならない。非構造格子法では解の再構築に使用される計算セルの組(ステンシルと呼ぶ)が同じ精度でも一意に決まらないことや、ステンシルを構成するセル形状も多様であるため、定式上の精度は高くても再構築された解は必ずしも数値解析に適した局所近似を与えない場合が多い。

非構造格子法の高次精度化では、セル内の物理量分布をあらかじめ再構築する前処理型の有限体積法に代わって、近年、計算セル内の物理量分布を直交基底関数系で展開し、その係数の時間発展を追跡する Discontinuous Galerkin(DG)法⁽¹⁾や Spectral Volume(SV)法⁽²⁾が注目されている。これらは非構造格子法でも所期の計算精度を達成できるが、計算負荷が著しく高い。例えば、2次元2次精度 DG 法は前処理型の有限体積法

の約10倍、3次精度では100倍程度の計算量が必要だと推測される。これは1変数あたりの解くべき方程式の本数が自由度の数だけ必要なこと(例えば2次元2次精度では1変数あたり3本、3次精度では6本の方程式)、および積分精度を確保するために複数のガウス点で流束関数を評価しなければならない、あるいは面積分の評価も複数のガウス点を用いた高次精度公式を用いなければならないことによる。DG法より計算負荷の低いと言われているSV法でも、面積分の精度を確保するために非常に多くのガウス点で流束関数を評価しなければならない。

翼や機体形状周りの流れ場解析では、定常解を求める場合が多い。このため、計算負荷の高いDG法やSV法では、陰解法化して収束加速を図ることが強く望まれる。すでにDG法に対するGMRESを用いた精密な陰解法の構築などが報告されているが⁽³⁾、より簡便で適用範囲が広く、またベクトル、パラレル計算機に移植がきわめて容易な陰解法の構築が望まれる。DG法やSV法では高次精度の解を再構築するために必要な自由度を全てセル内に変数として持つ。このため、隣のセル情報を用いない点緩和型の陰解法を構築できるのでないかと考えた。点緩和型の解法は対流部分の陰的な寄与が無いためにLU-SGS法などと比べると収束率が悪いと予想されるが、一方、隣の情報を必要としないために非構造格子法でもベクトル化、パラレル化が容易と期待される。本報告では点緩和型の陰的DG法を構築し、スカラーの線形移流方程式やオイラー方程式に適用して、その収束性や解の精度を詳細に検討した。

2. 数値解法

2.1 DG法の概要

2次元オイラー方程式に対するDG法の概要を以下に示そう。基礎方程式を

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

と書く。 Q は保存変数、 E 、 F は流束関数である。いま、基底関数 ψ を用いてセル内物理量分布を

$$Q_i(x, y, t) = \sum_k Q_k(t) v_k(x, y)$$

と表すことにする。このとき基礎方程式に基底関数 v を乗じて計算セル領域 Ω で積分すると

$$\iint_{\Omega} v \frac{\partial Q}{\partial t} dx dy + \int_{\Omega} v (En_x + Fn_y) dl - \iint_{\Omega} \left(E \frac{\partial v}{\partial x} + F \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = 0$$

を得る。基底関数の具体的な形は後述する。 i 番目の基底関数を乗じた各積分項を

$$J_1^i = \iint_{\Omega} v_i \frac{\partial Q}{\partial t} dx dy, \quad J_2^i = \int_{\Omega} v_i (En_x + Fn_y) dl$$

$$J_3^i = \iint_{\Omega} \left(E \frac{\partial v_i}{\partial x} + F \frac{\partial v_i}{\partial y} \right) dx dy$$

と定義する。 Q の表現 Q_i を J_1^i に代入すると

$$J_1^i = \sum_j \frac{dQ_j}{dt} \iint_{\Omega} v_i v_j dx dy = \sum_j I_{ij} \frac{dQ_j}{dt}$$

を得る。ただし基底関数の積のモーメントを I_{ij} と書いた。基底関数に直交性があると $I_{ij} = I_i \delta_{ij}$ となり、 dQ_i/dt の項だけが残る。 Q_i が k 次の多項式のとき、 J_2^i の周積分の精度には $2k+1$ 次精度が要求され、 J_3^i の面積分の評価には $2k$ 次精度が要求される。2次精度 ($k=1$) スキームでは、 J_2^i の評価に各辺上に2点のガウス点を選んだ。また J_3^i の評価にはセル内部に4点のガウス点を選んだ。3次精度スキームの場合はそれぞれ3点、7点のガウス点を選んだ。以上より dQ_i/dt に対する離散形を得る。

2.2 基底関数

ここでは2種類の基底関数を検討した。2次元2次精度に対する場合を例にして以下に説明する。最初の例では、三角形の各辺の中点を考える。このとき、基底関数としてある辺の中点で値が1、他の2辺の中点で値が0となる線形分布を3種類導入する。このような基底関数の選び方をタイプAと呼ぶことにしよう。このとき、基底関数は物理空間内三角形セル上で直接定義されるので、基礎方程式の変換は必要としない。この三角形セルに対する基底関数は互いに直交し、基底関数の積のモーメントは $I_i = 1/3$ となる。3次精度の場合は辺の中点と頂点の計6点を選び、ある点の値が1、他の5点の値が0となる計6個の二次曲面を基底関数に選ぶ。この場合は基底関数の積は直交性を失うので、簡単な代数方程式を解いて各自由度に対する離散形に分解しなければならない。このようなタイプAの基底関数は、精度を高めるにつれて条件を与える点数が増え、結果的にセル内に導入される曲面の性質が悪化する。このため、ある次数を超えともはや計算精度が向上しないことが知られている。また、計算セルの形状によっては低次の基底関数でも条件を与える点の選び方が難しい。例えば、2次元2次精度の場合は3点をセル毎に選ばなければならないが、四辺形の計算セルに対する3点の選び方は自明ではない。

次に直交関数列を基底関数に選ぶ場合を述べる。任意の三角形セルを基準三角形に写像する(図1)。このとき、Dubinerは基準三角形上で直交する関数列として⁽⁴⁾

$$v_{mn}(\xi, \eta) = P_m^{0,0} \left(2 \left(\frac{1+\xi}{1-\eta} \right) - 1 \right) (1-\eta)^m P_n^{2m+1,0}(\eta)$$

を提案した。ここで $P_m^{\alpha,\beta}$ はヤコビ多項式である。例えば2

次精度の場合の基底関数列は

$$v_{00}(\xi, \eta) = 1$$

$$v_{10}(\xi, \eta) = 2\xi + \eta + 1$$

$$v_{01}(\xi, \eta) = (3\eta + 1)/2$$

で与えられる。このような基底関数をタイプBと呼ぼう。

基礎方程式を基準セル座標系に変換すると

$$\frac{\partial \bar{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial \eta} = 0$$

を得る。ただし

$$\bar{Q} = J^{-1} Q$$

$$\bar{E} = J^{-1} (\xi_x E + \xi_y F)$$

$$\bar{F} = J^{-1} (\eta_x E + \eta_y F)$$

であり、 J^{-1} は変換のヤコビアンである。 \bar{Q} の近似を

$$\bar{Q}_i(\xi, \eta, t) = \sum_k \bar{Q}_k(t) v_k(\xi, \eta)$$

で与える。ただし $v_1 = v_{00}$, $v_2 = v_{10}$, $v_3 = v_{01}$ などとする。

3次精度の場合は v_{20} , v_{11} , v_{02} を基底関数列に付け加える。変換された基礎方程式に基底関数を乗じて基準三角形セルで積分すると

$$\bar{J}_1^i = \iint_{\bar{\Omega}} v_i \frac{\partial \bar{Q}}{\partial t} d\xi d\eta, \quad \bar{J}_2^i = \int_{\bar{\Omega}} v_i (\bar{E} n_\xi + \bar{F} n_\eta) dl$$

$$\bar{J}_3^i = \iint_{\bar{\Omega}} \left(\bar{E} \frac{\partial v_i}{\partial \xi} + \bar{F} \frac{\partial v_i}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta$$

を得る。基底関数の積のモーメントは容易に求まる。

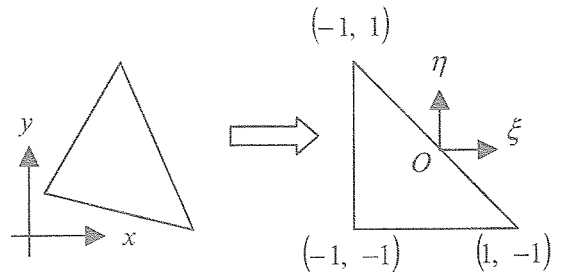


図1 基準三角形セルへの写像関係

2.3 陰解法の定式化

ここでは座標変換が入ってくるタイプBの場合を詳細に述べておく。点緩和型の陰解法ではセル内部の自由度の時間発展だけを考慮すればよい。最初に時間に関する流束関数の展開を以下のように与える。

$$\bar{E}^{n+1} = \bar{E}^n + \frac{\partial \bar{E}}{\partial Q} \Delta \bar{Q} = \bar{E}^n + (\xi_x A + \xi_y B) \Delta \bar{Q}$$

$$\bar{F}^{n+1} = \bar{F}^n + \frac{\partial \bar{F}}{\partial Q} \Delta \bar{Q} = \bar{F}^n + (\eta_x A + \eta_y B) \Delta \bar{Q}$$

ただし $A = \partial E / \partial Q$, $B = \partial F / \partial Q$ は変換前の流束関数のヤコビ行列である。風上成分の寄与を考慮して、

$$\bar{J}_2 \cong \int_{\bar{\Omega}} v_i (\bar{E}^n n_\xi + \bar{F}^n n_\eta) dl + \int_{\bar{\Omega}} v_i (\sigma_x A + \sigma_y B)^+ \Delta \bar{Q} dl$$

と近似する。ただし $C^+ = (C + \lambda_{\max} I) / 2$ であり、 C の固有値の絶対値の最大を λ_{\max} と書いた。また、

$$\sigma_x = n_\xi \xi_x + n_\eta \eta_x, \quad \sigma_y = n_\xi \xi_y + n_\eta \eta_y$$

である。同様に

$$\begin{aligned} \bar{J}_3 &= \iint_{\bar{\Omega}} \left(\bar{E}^n \frac{\partial v_i}{\partial \xi} + \bar{F}^n \frac{\partial v_i}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta \\ &+ \iint_{\bar{\Omega}} (\omega_x^i A + \omega_y^i B) \Delta \bar{Q} d\xi d\eta \end{aligned}$$

を得る。ここで

$$\omega_x^i = \xi_x \frac{\partial v_i}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial v_i}{\partial \eta}, \quad \omega_y^i = \xi_y \frac{\partial v_i}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial v_i}{\partial \eta}$$

である。

以上の式に $\Delta \bar{Q}$ を基底関数と自由度の変化量の線形結合で表した式

$$\Delta \bar{Q} = \sum v_j \Delta \bar{Q}_k$$

を代入する。周積分の評価は各辺上にガウス点を導入して離散的に行う。面積分の評価においてもセル内にガウス点を導入して行う。以上の操作から最終的にセル内に導入された自由度の変化量に対する代数方程式を得る。例えば2次元のオイラー方程式に対する2次精度のDG法では、4変数に対して3自由度を解く。このためセル毎に 12×12 の密行列で与えられる代数方程式を解かなければならない。ここではLU分解に基づく直接法で解いた。行列のサイズは次元と精度によって大きくなる。2次元3次精度では 24×24 、3次元の3次精度では 50×50 、同じく4次精度では 100×100 の密行列になる。

3. 計算結果と議論

3.1 線形スカラー移流方程式

最初に図2に示された線形スカラー移流問題を解き、DG法で実際に達成される精度と収束性を調べた。

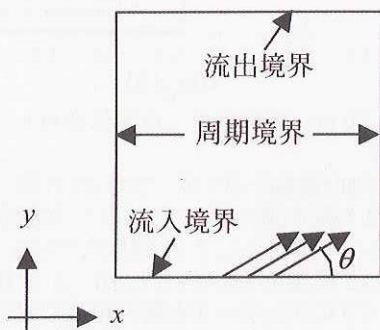


図2 線形移流問題の計算領域と境界条件

流入境界には1波長の正弦波を仮定して、移流方向 θ で計算領域に流入させた。移流速度は1と仮定した。この問題は定常解が存在する。解析解と数値解の差を誤差 ε としよう。計算セルサイズ δ との間 $\varepsilon = c \delta^n$ が成り立つと仮定するとき、異なる格子サイズで得られた誤差を両対数のグラフ上にプロットすると、フィットした直線の勾配が空間精度 n を与える。

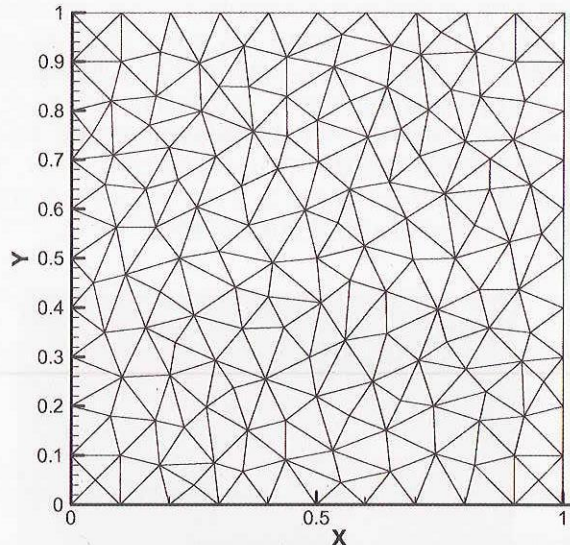


図3 計算格子の例 (セル数 296)

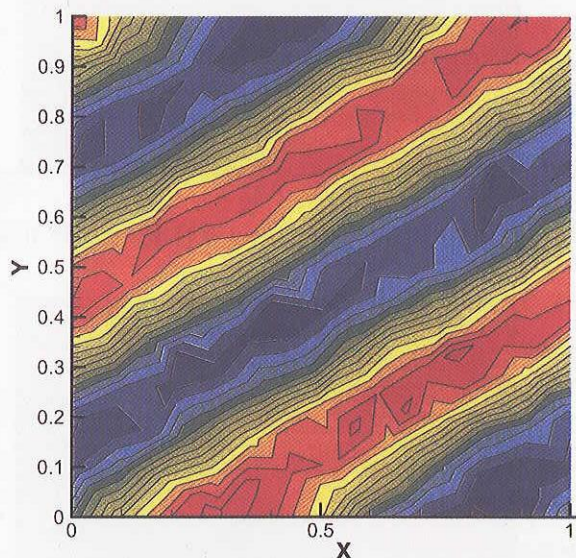


図4a 収束解の分布 (タイプ A, 2次精度, セル数 296)

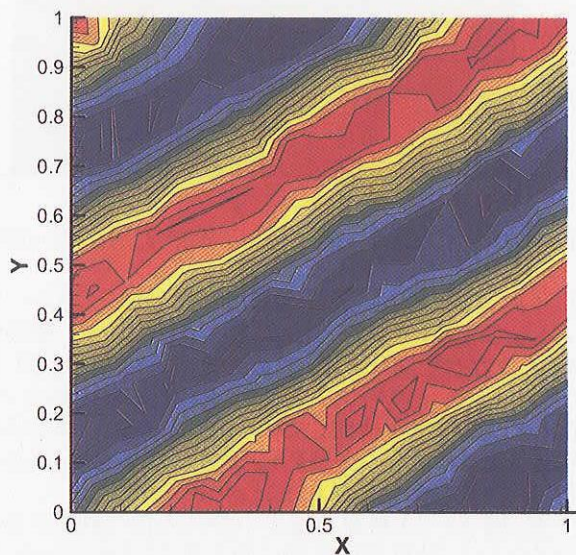


図4b 収束解の分布 (タイプ B, 2次精度, セル数 296)

計算に用いた非構造格子の例を図3に示す。セル数は296である。また図4aにはタイプAの規定関数を用いた2次精度計算結果を、図4bにタイプBの基底関数を用いた2次精度計算結果を示す。移流角度は30度とした。セル数296の粗い格子でも波の振幅はあまり減衰することなく流出境界まで到達していることが分かる。一方、セル数が4626の場合の解を図5a,bに示す。流入した波は減衰することなくそのまま流出境界に到達している。

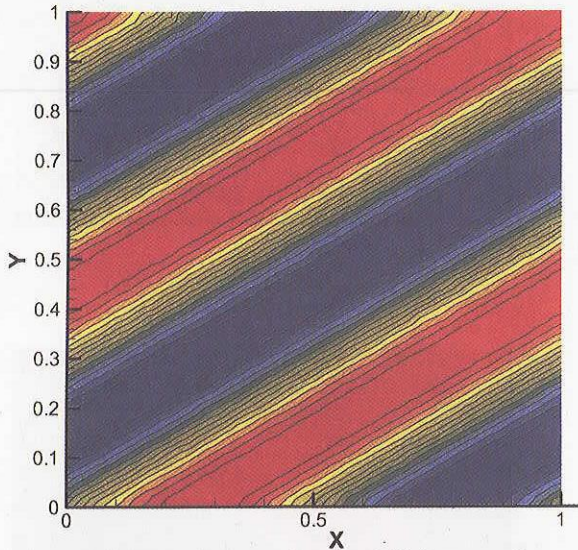


図 5a 収束解の分布 (タイプ A, 2 次精度, セル数 4626)

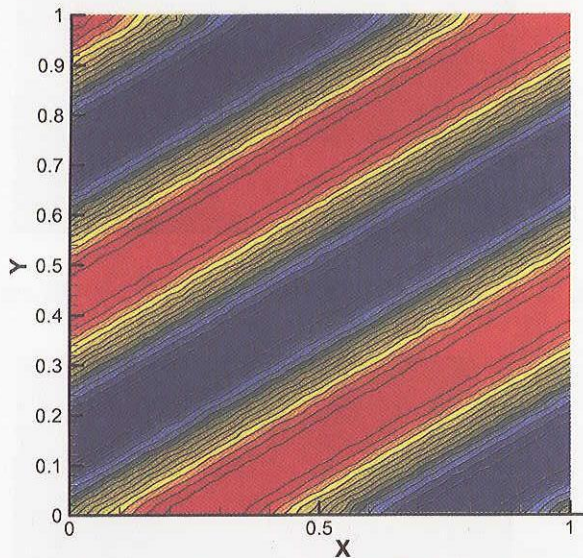


図 5b 収束解の分布 (タイプ B, 2 次精度, セル数 4626)

以上の結果より実際の計算精度を評価した。セルのサイズとして境界におけるセルの辺長を用いた。基底関数への依存性を図6aに、移流角度への依存性を図6bに示す。図6aよりタイプAとタイプBの基底関数ともに、所期の計算精度を達成していることが分かる。また僅かではあるがタイプAの方がタイプBと比べて精度、誤差の両者でより良い結果を与えることが分かった。

一方、図6bより移流角度が小さくなるにつれて誤差は大きくなるが、計算精度は逆に向上することが分かる。移

流角度が小さくなると、流入してから流出するまでの間に横切る計算セル数が増えるので、相対的に数値拡散の効果が強く現れて解析解との誤差が大きくなったが、格子細分化時の計算精度向上の様子がより明確になったと考えられる。なお一番精度が悪化した $\theta = 90$ 度でも所期の精度は達成されている。

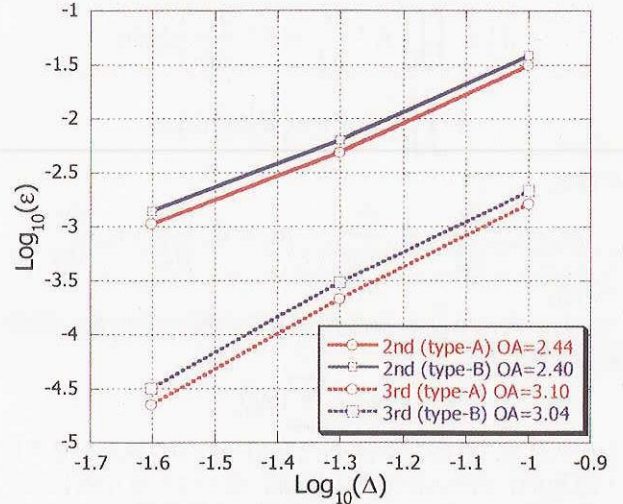


図 6a 計算精度 (基底関数依存性)

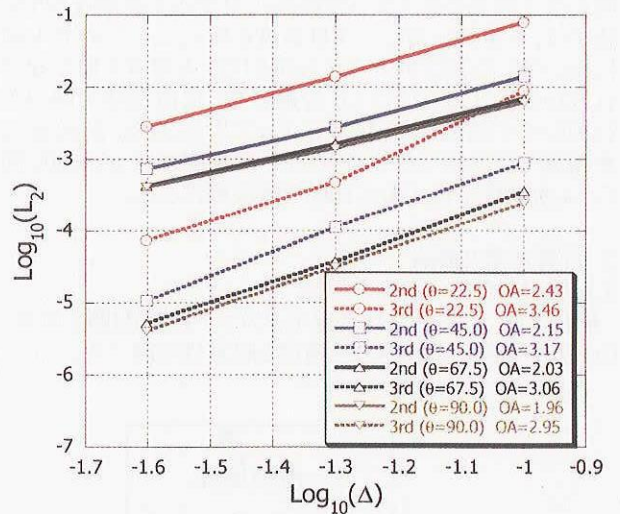


図 6b 計算精度 (角度依存性)

ここでは詳細な議論を省くが、これらの計算では解の安定性を高める勾配制限を行っていない。勾配制限をTVBタイプのリミッターで行うと、2次精度までならリミッターは精度にほとんど影響を与えない。しかし3次精度の場合は、TVBタイプのリミッターでも解の精度に深刻な影響を与える場合がある。高次精度を維持できる適切なリミッターの導入は今後の重要な検討課題である。なお、TVDタイプの勾配制限リミッターを用いると、タイプAの2次精度DG法の精度は1.3程度まで大幅に悪化した。

最後に収束履歴を調べておく。セル数4626の場合の収束履歴を図7aに示す。タイプAとタイプBの基底関数のいずれも残差は完全に収束したが、タイプAの方が、急激に残差減少が始まるタイミングが早い。一方、タイプBでは、2次精度および3次精度の収束履歴はほぼ一致

した。タイプ A の 3 次精度陰解法は未構築のため収束性を調べていない。一方、図 7b にタイプ B の 3 次精度計算でセル数を変えた場合の収束履歴を示す。正弦波が流出境界側に到達すると残差の減少が急激に生じる。3 次精度でも CFL 数を事実上無制限に取れることや、いずれもマシンゼロまで完全に収束することは、点緩和法に基づく陰解法としては予想以上に良好な結果である。

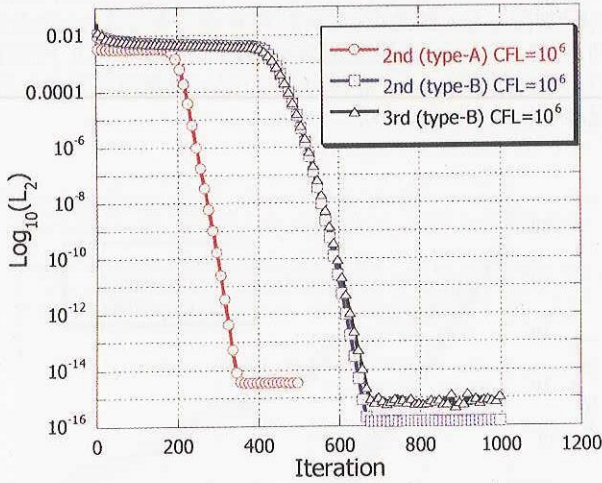


図 7a 収束履歴の例 (セル数 4626)

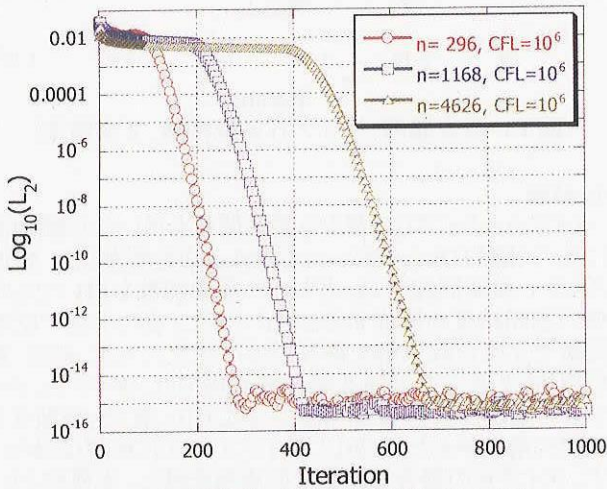


図 7b 収束履歴の例 (3 次精度, タイプ B)

3.2 RAE2822 翼型周りの非粘性 2 次元流れ場

線形スカラー移流問題に対する点緩和型の陰解法は大変良好な安定性と収束性を与えたが、オイラー方程式では非線形効果が現れるために、解の安定性や収束性が悪化することが考えられる。ここでは RAE2822 翼型を過ぎる 2 次元非粘性圧縮性流れ場を考え、点緩和に基づく陰的 DG 法の構築を行った。図 8 に計算格子を示す。計算セル数は 9430 である。主流マッハ数が 0.73、迎え角が 2.31 度の場合を解いた。

最初にタイプ A の基底関数を用いた場合の 2 次精度計算結果を示す。図 9 は CFL 数が 100 の場合のマッハ数分布である。計算では 10^6 より大きな CFL 数も試してみたが、安定に計算できた。ただし小さな CFL 数でも勾配制限リミッターを用いないと解は発散した。

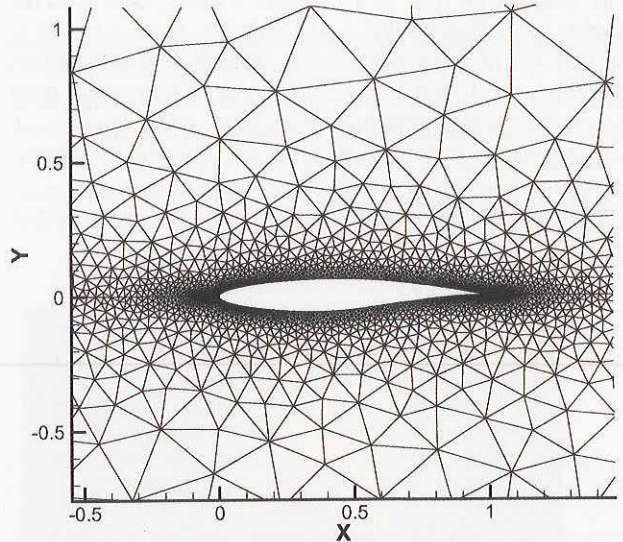


図 8 計算格子の例 (計算セル数 9430)

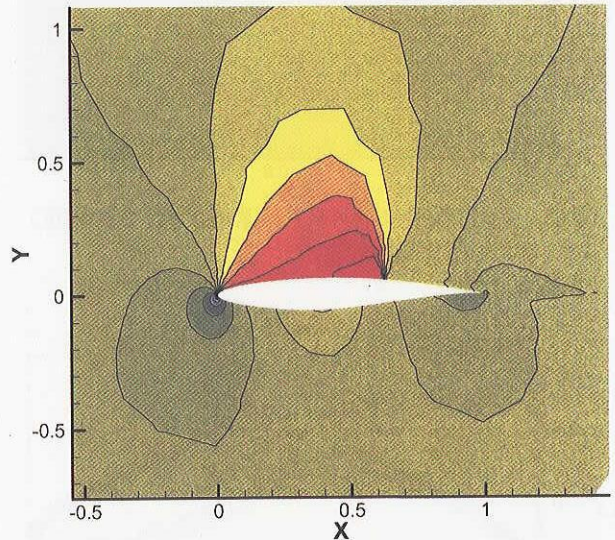


図 9 マッハ数分布 (タイプ A 基底関数, 2 次精度)

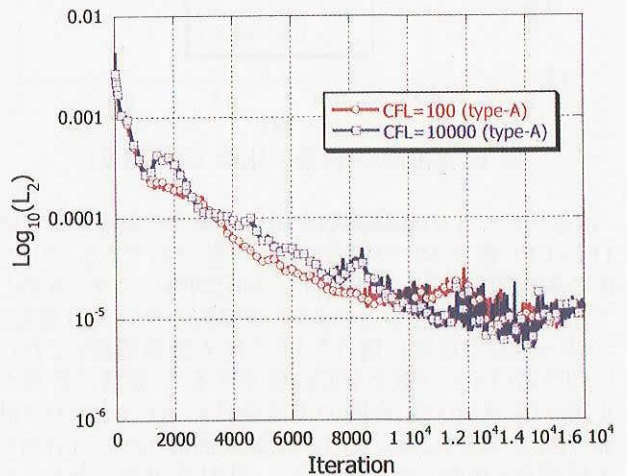


図 10 収束履歴 (タイプ A 基底関数, 2 次精度)

収束履歴を図 10 に示す。残差は 3 桁ほど落ちてから振動的になり、線形問題のように収束しない。CFL 数を 10 以下や 10^6 より大きくとっても、最終的な残差の減少の程度はほとんど変化しなかった。収束の程度に最も影響を与えたのが勾配制限リミッターである。TVB 型のリミッターからより散逸的な TVD 型のリミッターに変更した場合も試みたが、残差の減少の度合いに変化は無かった。しかし、解自体は非常に散逸的となり、流れ場の様子は大きく変化した。

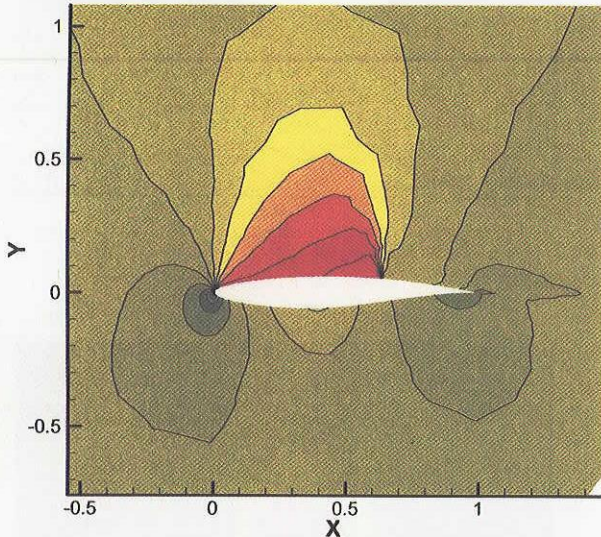


図 11 マッハ数分布 (タイプ B 基底関数, 2 次精度)

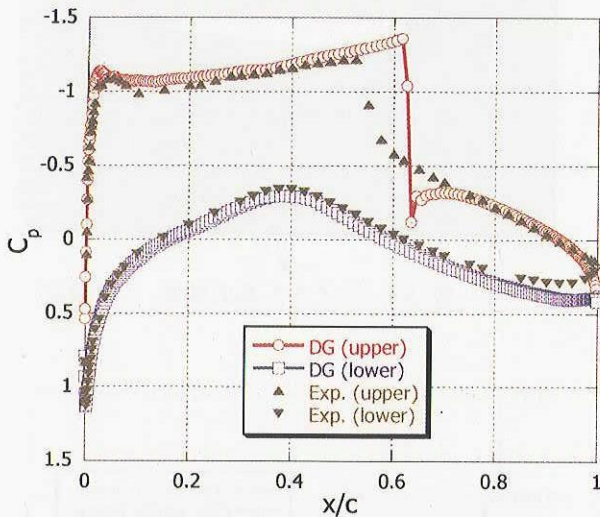


図 12 表面圧力係数の比較 (2 次精度)

次にタイプ B の基底関数を用いた場合の解を示す。図 11 は CFL 数が 10^5 の場合のマッハ数分布である。タイプ B の基底関数を用いた場合は、勾配制限リミッターを外しても安定な解を得た。このように衝撃波を含む流れ場をリミッター無しで安定に解けたところは大変興味深い。ただし、より高いマッハ数を主流に仮定すると、容易に計算が止まってしまうので、今回の主流条件に対してはたまたま計算できたと考えられる。図 12 は翼表面周りの圧力分布を実験結果と比較した結果である。非粘性計算であるために衝撃波位置は後退し、衝撃波直前の膨張も強いが、

全般的な解の一致は良好である。前縁部分の特徴的な膨張や、衝撃波背後の再膨張の様子もよく捕らえられている。衝撃波下流側で圧力分布は僅かに滑らかさを失っているが、それでも衝撃波は極めてシャープに捕らえることができた。最後にタイプ B の収束履歴を図 13 に示す。非常に大きな CFL 数に対しても完全に収束した。CFL が 10^6 より 10^4 の方が僅かに早く収束しているが、ある CFL 数を超えると実質的に同一の緩和過程を辿るものと考えられる。このような良好な収束性が得られたことは、実は勾配制限を全く加えなくても計算可能であったことによる。例えば、タイプ B の基底関数を用いても、タイプ A と同様の TVB 型のリミッターを付け加えると、残差はやはり 3 桁程度しか減少しなかった。

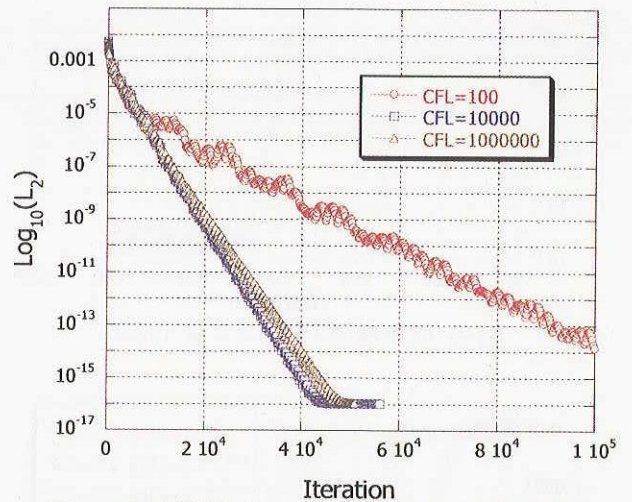


図 13 収束履歴 (タイプ B 基底関数, 2 次精度)

4. 結論

タイプ A とタイプ B の異なる基底関数を用いた点緩和法に基づく陰的 Discontinuous Galerkin 法を提案した。線形スカラー移流問題では、どちらの基底関数を用いても所期の空間精度を達成することができた。また少ない反復回数で完全な収束解を得ることができた。一方、RAE 翼型周りの 2 次元遷音速非粘性流れ場では、タイプ A、タイプ B の基底関数ともに非常に大きな CFL 数でも発散することなく解を与えた。しかし、タイプ A では収束解は得られず、タイプ B の場合に完全な収束解を得た。本研究より、基底関数とリミッターの選択が解の精度と収束性を同時に確保する上で非常に重要であることが示唆された。今後は 3 次元への拡張、NS への拡張を行うとともに、非構造格子法で 4 次精度以上の空間精度の実現を目指す。

文献

- 1) Cockburn, B., Shu, C.-W., JCP, 141(1998), 199-224.
- 2) Wang, Z.J., JCP, 178(2003), 210-251.
- 3) Rasetarinera, P., and Hussaini, M., JCP, 172(2001), 718-738.
- 4) Dubiner, M., J. Sci. Comp., 6(1991), 345-390.