JAXA 6.5m×5.5m 低速風洞における カート準備期間の短縮化に関する検討

～ グラフ理論の最短路問題としてのカート移動最短手順問題 ～

青木 良尚（JAXA）

A Study to Minimize Cart-Setting Time in JAXA 6.5- by 5.5- m Low Speed Wind Tunnel
～ The Application of Shortest Pass Problem in Graph Theory ～

Aoki yoshihisa (JAXA)

Abstract

It is difficult to find the shortest process to set two carts and three additional devices where we desire because of restricted space of measurement room in JAXA 6.5- by 5.5- m Low Speed Wind Tunnel. This study solved this problem by using shortest pass problem in graph theory and an effect of this method was proved by application to a past case.

1．はじめに

JAXA6.5m×5.5m 低速風洞では、試験の目的に合わせて２つのカートと３つの風洞付帯装置を組み合わせて測定部に設置する．しかし、風洞測定室の限られたスペースにこれらが格納されている為、目的の装置の組み合わせに設置するための最短移動手順が見つけにくいという問題がある．風洞試験実施可能期間はカート移動時間の長さに左右される為、出来るだけ効率がよく最短時間でカート移動を行うことが風洞試験を最大限に行うためにも重要である．ここでは、直感では気がつきにくいカート移動の最短手順を、グラフ理論の最短路問題と捉えて理論的に探索する方法について検討を行った．２章でグラフ理論と最短路問題の概要[1][2]を述べ、３章でカート移動最短手順探索問題をカートと風洞付帯装置の配置に関する状態遷移を表すグラフによって定式化を行い、４章で実際に行われたカート移動を例として、最短手順探索法の有効性を示す．

２．グラフ理論と最短路問題の概要

２．１ グラフの定義

グラフGは２つの有限集合（有限個数の要素を持つ集合）、すなわち点とよばれる点の集合Vと辺と呼ばれる連結線分の集合Eからなっている．各辺は辺の端点とよばれる２つの点を結んでいる．グラフGを

This document is provided by JAXA.

$G=(V,E)$

と書く.

点を文字$u,v,\cdots$か$v_1,v_2,\cdots$で、あるいは（図１のように）数字1,2,…で表す．また、辺を$e_1,e_2,\cdots$で、あるいは２つの端点で、例えば図１では$e_1=(1,4)$, $e_2=(1,2)$のように表す.

辺(v_i,v_j)は点v_iと接続しているという.

同様に(v_i,v_j)はv_jと接続している．点vに接続している辺の数はvの次数とよばれる.

２つの点がGのある辺で接続されている場合、それらはGにおいて隣接しているという.

辺Eの長さに相当する各辺で異なる数値が設定されているグラフを重みつきグラフといい、この数値を重みという．この数値は必ずしも辺の長さを表しているとは限らず、そのルートを通過するのにかかる時間や費用などを表してもよい.

異なった分野においては違った名前でグラフに出会う．電気工学ではネットワークとして、化学では分子構造として、経済学では組織構造として、その他、交通機関の路線図などである.

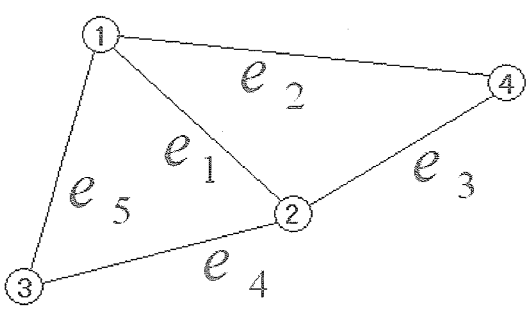

図１　４点と５辺からなるグラフ

２．２　最短路問題とその解法

２．２．１　最短路問題

最短路問題はグラフGの点s（始点）からt（終点）までの経路が最短路となる経路sからtを選ぶ問題である．ここで、最短路とは、sからtまでの経路となる辺の重みの和が最小となる経路を表す．辺の重みは長さや時間などの実際に計れる長さである場合もあるが、ときとしてまったく異なっていてもかまわない．したがって、最短路問題を解く方法が見つかれば、最小時間や最小費用のルートを見つけることができる．２．２．２節で重みつきグラフにおける最短路問題の代表的な解法であるディスクトラのアルゴリズムを紹介する.

２．２．２　重みつきグラフにおける最短路問題の解法

１で表される原点とよばれる与えられた点から、Gのすべての他の点２、３、…、nへの最短路を探す問題を考える．Gにおける$1\to j$の最短路をL_jと表す.

定理１．ベルマンの最小性原理

$P:1\to j$がGにおける１からjへの最短路で(i,j)がPの最後の辺である場合（図２)、$P_i:1\to i$（Pから(i,j)を除くことで得られる）は、$1\to i$の最短路である.

[証明]　結論が偽であるとする．このとき、P_iよりも短い道$P_i^*:1\to i$が存在する．したがって、P_i^*に(i,j)を付け加えたならば、Pよりも短い道$1\to j$を得る．このことはPが最短であるという仮定と矛盾する．□

This document is provided by JAXA.

ベルマンの原理から、つぎの基本方程式を得ることができる．固定した j に対し、G において辺 (i,j) のいろいろの i に対する最短路 P_i をみつけて、対応する P_i に (i,j) を加えることでいろいろの道 $1\to j$ が得られる．これらの道は明らかに長さ L_i+l_{ij} をもっている（$L_i=P_i$ の長さ）．このように、i に関して最小値をとることができる．すなわち、L_i+l_{ij} を最小にする i を決めることができる．ベルマンの原理より、これは最短路 $1\to j$ を与える．それは長さ

$$\begin{cases} L_1=0 \\ L_j=\min\limits_{i\neq j}(L_i+l_{ij}) \end{cases} \qquad (j=2,\cdots n)$$

をもつ．これらをベルマン方程式という．定義より、$l_{ij}=0$ であるので、$\min\limits_{i\neq j}$ のかわりに $\min\limits_{i}$ と書くことができる．これらの方程式は、つぎのように、最短路問題のための最もよく知られたアルゴリズムの一つを示唆する．

ディクストラのアルゴリズムは表1のように示されるラベルづけの手続きである。計算の各段階で、各点 v は

(PL) 永久ラベル＝最短路 $1\to v$ の長さ L_v

あるいは、

(TL) 一時ラベル＝最短路 $1\to v$ の長さの上限 $\tilde{L}_v$

のいずれかのラベルをもつ．永久ラベルと一時ラベルをもった点の集合をそれぞれ PL と TL と表す．アルゴリズムは、点1が永久ラベル $L_1=0$ を、他の点が一時ラベルをもつ最初のステップをもち、ステップ2とステップ3の間を繰り返す．ステップ2では、最小にする k をみつけるという考え方を実現している．ステップ3では、上限が一般には改良（減少）され、したがって更新されなければならないという考え方からきている．

なお、ディクストラのアルゴリズムの計算量は $O(n^2)$ である．

[証明] ステップ2では成分の比較が必要である．最初は $n-2$、次は $n-3$ 等々であり、合計は $(n-2)(n-1)/2$ となる．ステップ3でも同じ数の比較が必要であり、合計はふたたび $(n-2)(n-1)/2$ となる．したがって、演算の合計数は $3(n-2)(n-1)/2=O(n^2)$ となる．□

表1 最短路問題に対するディクストラのアルゴリズム

入力：点の数 n、辺 (i,j) と長さ l_{ij}

出力：$j=2,\cdots,n$ に対する最短路 $1\to j$ の長さ L_j

1．ステップ1

点1は PL：$L_1=0$ をもつ．

点 $j\ (=2,\cdots,n)$ は TL：$\tilde{L}_j=l_{ij}$（G で $(1,j)$ の辺がない場合には∞）、PL $=\{1\}$、TL $=\{2,3,\cdots,n\}$ とする．

2．永久ラベルの固定

TL で $\tilde{L}_k$ を最小にする k をみつけ、

This document is provided by JAXA.

$L_k = \widetilde{L}_k$ とする．数個あるときは最小の k をとる．TL から k を消し、PL に含める．

TL = ∅（すなわち TL = が空）であれば $L_2, \cdots, L_n$ を出力して停止．

そうでない場合は継続（すなわちステップ 3 に進む）．

3．一時ラベルの更新

TL のすべての j に対して

$$\widetilde{L}_j = \min_k \{\widetilde{L}_j, L_k + l_{kj}\}$$

とおく．ステップ 2 へ．

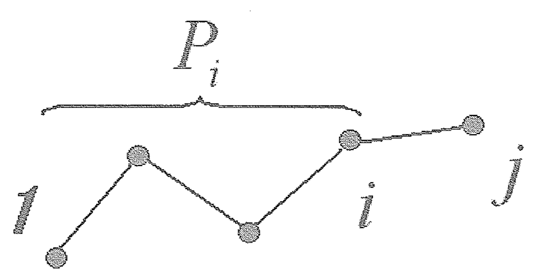

図 2　ベルマンの最小性原理における道 P と P_i

3．グラフによるカート移動最短手順探索問題の定式化と実装

カート移動最短手順探索問題をグラフ理論の最短路問題として扱うために、以下の手順で JAXA 6．5 m×5．5 m 低速風洞の 2 つのカートと 3 つの風洞付帯装置の配置に関する状態遷移を表すグラフ G を作成した．

ステップ 1．カートと風洞付帯装置の配置可能位置を、それぞれの位置にカートや風洞付帯装置を配置しても物理的に干渉しないようにモデル化する．

ステップ 2．実際の使用条件や移動条件を考慮して、配置可能となるカートや風洞付帯装置の全配置状態を作成する．

ステップ 3．カートや装置を移動させるための電源の接続状態を考慮して、前に設定した配置状態をさらに各々 5 つに分割し、これらの配置状態の集合をグラフ G の点集合 V とする．

ステップ 4．グラフ G に含まれるある点が示す配置状態から、カートや風洞付帯装置が物理的に干渉せず、電源接続状態を考慮するとともに実際の移動可能条件を満足したうえで変更可能な配置状態となる点同士を辺で結ぶ．

ステップ 5．辺で結んだ 2 点間の状態遷移にかかる時間をこの辺の重みとして設定する．

以上で、カートと風洞付帯装置の配置に関する状態遷移を表すグラフ G が完成した．ちなみに、このグラフに含まれる点の数は 11196 点となった．

この手順の実装に際してはプログラムを単純化するために、ステップ 1 における配置可能位置のモデル化を、すべての隣接する配置可能位置をほぼ等距離となるように設定し、ステップ 5 における辺の重みの設定において、カートや風洞付帯装置の移動速度の比をそのまま辺の重みとして扱えるようにした．ディクストラのアルゴリズムの実装は、Boost C++ライブラリのグラフパッケージを用いて行った．

4．カート移動問題への応用例

4．1　2 点間最短路問題

ある配置状態から目的とする配置状態へカ

This document is provided by JAXA.

ート移動を行う問題を考える．この問題は 2 点間最短路問題に相当する．ある時に実際に行われたカート移動方法と、ディクストラのアルゴリズムを用いて探索した最短手順を比較すると 15%時間を短縮できる手順を見つけることができた．

４．２ 終端条件緩和型最短路問題

４．１節では初期配置状態と終端配置状態をそれぞれ１つの状態に限定して指定したが、実際のカート移動では終端配置状態は、使用していない風洞付帯装置が、ある位置に順番にかかわらず配置されていれば良いという条件に緩和される．この問題は、最短路問題と最小値問題を組み合わせることによって以下の手順で解くことができる．

ステップ１．ディクストラのアルゴリズムを使って、初期配置状態からそれ以外の全ての配置状態までの辺の重みの和が最小となるルートを求める．

ステップ２．終端条件として許容できる配置状態を選択し、そこまでの辺の重みの和を最小値探索アルゴリズムを用いて比較し、最小となる配置状態を終端条件として決定する．

この方法を４．１節で例をあげたカート移動実例に適用すると、４．１節と比較して５％、実際に行われた方法と比較して 20％の時間を短縮できる手順を見つけることができた．

４．３ 中継点つき最短路問題

これまでは、ある配置状態からある配置状態へ変更するような、カート移動が１回しか発生しないような問題を考えた．しかし、年間を通して行われる風洞試験で必要な配置状態は、一般的には試験毎に異なるので、これら一連のカート移動手順を最小にする問題を考える．この問題は以下の手順で解くことができる．

ステップ１．初期配置状態から次の配置状態として許される状態までの 2 点最短路問題を解き、初期状態を始点、次の配置状態としてゆるされる状態を新たな点、先に求めた最短時間を重みとする始点と新たな点との間を辺とするグラフを作成する．

初期配置状態から 2 つ先の配置状態が終点の場合、ステップ３へ．それ以外の場合はステップ２へ．

ステップ２．現在のグラフで終端となる状態から次の配置状態として許される状態までの 2 点最短路問題を解き、現在のグラフに次の配置状態として許される状態を新たな点、先に求めた最短時間を重みとする現在のグラフで終端となる状態と新たな点との間を辺として追加する．

新たに追加した配置状態の次の配置状態が終点の場合、ステップ３へ．それ以外の場合はステップ２を繰り返す．

ステップ３．現在のグラフで終端となる状態から終端配置状態として許される状態までの 2 点最短路問題を解き、現在のグラフに終端配置状態として許される状態を新たな点、先に求めた最短時間を重みとする現在のグラフで終端となる状態と新たな点との間を辺として追加する．以上の手順で完成した新たなグラフを、終端条件緩和型最短路問題として解くと、始点から始まり中継点を順に通って終

This document is provided by JAXA.

端配置状態に達する最短手順を見つけることができる.

5．まとめ

以上より、JAXA６．５m×５．５m低速風洞のカート移動最短手順問題をグラフ理論の最短路問題として定式化し、3 種類のカート移動問題を設定しこれらの解法を示し、実際に中継点つき最短路問題以外の方法では実際に行われたカート移動手順と比較することにより、効率的にカート移動最短手順が探索できることを示した．また、初期配置状態からある配置状態までの最短手順探索法としては、終端条件緩和型最短路問題として解く方法が、実際に行われたカート移動の実例と比較すると最も効率がよいことが分かった.

参考文献

[1] E.クライツィグ 著、田村義保 訳、「最適化とグラフ理論（原著第８版）」、培風館

[2] R.J.ウィルソン 著、西関隆夫、西関裕子 共訳、「グラフ理論入門」、近代科学社

This document is provided by JAXA.