

## タンデム型2円柱を過ぎる流れの不安定性と遷移

水島二郎、末広典久（同志社大工）

## Instability and transition of flow past a pair of circular cylinders arranged in tandem

J. Mizushima, N. Suehiro

Dept. of Mech. Eng., Doshisha University, Kyotanabe, Kyoto 610-0394, Japan

## ABSTRACT

Instability and transition of flow past a pair of circular cylinders placed parallel to the stream in tandem are investigated by numerical simulation and linear stability analysis. We focus our attention upon the effect of spacing between the two cylinders on the instability of flow. Transition of the flow from a steady to a periodic state is clarified to occur due to a supercritical or subcritical Hopf bifurcation depending upon the length of spacing between the two cylinders. We found that there is a certain length of spacing where the flow becomes most stable, which we evaluated. The origin of abrupt change in drag and lift coefficients reported previously was identified to come from the existence of multiple solutions for the flow.

Key Words: flow past two cylinders, instability, transition, tandem arrangement

## 1. はじめに

流れの中に円柱がおかれているとき、レイノルズ数が大きくなると流れは定常流から振動流へと遷移する。流れの振動により円柱が長期にわたり周期的な力を受けることにより、円柱が破断することがあり、これが大事故を引き起こす可能性がある。このため流れの振動を制御する技術が研究されてきた。たとえば、熱交換器中に温度計を設置するとき、温度計の破断を防ぐために温度計の上流側にダミーの円柱を設置する工夫などが考えられる。

これまで、建造物などの周辺における流れ構造の解明などを目的として、2円柱を過ぎる流れの研究が数多く行われてきた。流れの中に流れと平行または垂直に2円柱を配置し、円柱間の間隔と円柱の受ける抗力の関係について調べると、抗力係数は間隔比（中心間距離/直径）によって大きく変化することなどが知られている<sup>1)</sup>。2円柱を流れに対して垂直に配置した場合については Le Gal and Chauve<sup>2)</sup>によって詳しく調べられ、間隔比が小さいとき、2円柱後流の強い非線形相互作用により流れが複雑化し、発生する振動流にはいくつかのパターンが見られることが見いだされた。また、Zdravkovich<sup>3)</sup>は流れと平行に2円柱を配置した場合について実験を行い、下流側の円柱の抗力係数がレイノルズ数に強く依存することを指摘した。

これまでの研究によれば、2本の円柱を過ぎる流れは多くの複雑な現象を含んでいる。この論文では、流れと平行に並べておかれた2円柱を過ぎる流れの不安定性と遷移を調べ、2円柱の間隔が流れの振動発生や円柱に働く抗力に及ぼす影響について詳しく調べる。

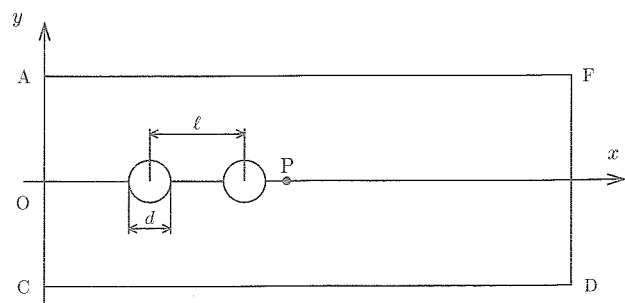


Fig. 1: Configuration and coordinates.

## 2. 定式化と境界条件

一様流中に流れと平行に並べておかれた同じ直径をもつ2本の円柱を過ぎる流れを考える (Fig.1)。この図で、流体は左から右へ流れている。円柱の直径を  $d$ 、2円柱の中心間隔を  $l$  とする。流れの向きに  $x$  軸、流れと垂直方向に  $y$  軸をとる。円柱の直径  $d$  を代表長さ、上流における一様速度  $U$  を代表速度とし、流れを特徴づけるパラメータとしてレイノルズ数  $Re$  と中心間隔比  $\Gamma$  をそれぞれ  $Re \equiv Ud/\nu$  および  $\Gamma \equiv l/d$  で定義する。ただし  $\nu$  は流体の動粘性係数である。

2次元非圧縮流れを仮定し、流れ関数  $\psi$  と渦度  $\omega$  を導入する。基礎方程式は連続の式

$$\omega = -\mathcal{M}\psi \quad (1)$$

と渦度輸送方程式

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{1}{Re} \mathcal{M}\omega + \mathcal{N}(\psi, \omega) \quad (2)$$

$$N(f, g) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x}, \quad M = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

である。ここで、 $M$ は2次元ラプラシアンである。上流境界条件として、円柱より十分上流 (Fig. 1, AC) で流れは一樣流であるとし、十分下流 (FD) でゾンマーフェルト放射条件を用いる。円柱上では滑りなし条件とし、計算領域側面 (AF と CD) を十分遠方にとり、そこでは一樣流であるとする。

## 2. 線形安定性解析

レイノルズ数  $Re$  が小さいとき、流れは2本の円柱の中心を通る流れに平行な中心線 ( $x$ -軸) に対して対称な定常流である。レイノルズ数が臨界値  $Re_c$  を超えると、対称定常流は攪乱の成長により不安定となり、周期流に移る。対称定常流を  $(\bar{\psi}, \bar{\omega})$  で表し、攪乱を  $(\psi', \omega')$  と表すと、流れ関数および渦度  $(\psi, \omega)$  は次のように対称定常流と攪乱の和で表される。

$$\psi = \bar{\psi} + \psi', \quad \omega = \bar{\omega} + \omega'. \quad (3)$$

上式を基礎方程式 (1) と (2) に代入し定常流が満たす式を引くと、次の攪乱方程式が得られる。

$$\frac{\partial \omega'}{\partial t} = \frac{1}{Re} M \omega' + N(\psi', \bar{\omega}) + N(\bar{\psi}, \omega') + N(\psi', \omega'), \quad (4)$$

$$\omega' = -M \psi'. \quad (5)$$

線形安定性解析においては式 (4) の右辺第4項 (非線形項) は十分小さいものとして無視する。攪乱  $(\psi', \omega')$  を  $\psi' = \hat{\psi}(x, y)e^{\lambda t}$ 、 $\omega' = \hat{\omega}(x, y)e^{\lambda t}$  のように時間依存成分と空間依存成分の積で表し、これらの式を方程式 (4) と (5) に代入し、非線形項を無視すると次式が得られる。

$$\lambda \hat{\omega} = \frac{1}{Re} M \hat{\omega} + N(\hat{\psi}, \bar{\omega}) + N(\bar{\psi}, \hat{\omega}), \quad (6)$$

$$\hat{\omega} = -M \hat{\psi}. \quad (7)$$

ここで  $\lambda$  は攪乱の複素線形増幅率である。

線形固有関数  $(\hat{\psi}, \hat{\omega})$  の境界条件として、円柱より十分上流 (AC) で  $(\hat{\psi}, \hat{\omega})$  は0であるとし、十分下流 (FD) でゾンマーフェルト放射条件を用いる。また、計算領域側面境界 (AF と CD) で攪乱  $(\hat{\psi}, \hat{\omega})$  は0とし、円柱上では数値シミュレーションの場合と同様にすべりなし条件を用いる。 $\lambda$  の実部  $\lambda_r$  は攪乱の線形増幅率であり、 $\lambda_r$  が負のとき対称定常流は安定であり、正のとき不安定である。よって、 $\lambda_r = 0$  となるときのレイノルズ数が臨界レイノルズ数  $Re_c$  となる。

## 3. 非線形解析

対称定常流が不安定となって生じる非線形周期解を数値的に求める。このとき、攪乱  $(\psi', \omega')$  は方程式 (4) と (5) を満たす。ここで、 $(\psi', \omega')$  をフーリエ級数で展開し、有限項数  $(2N + 1)$  で打ち切ると、

$$\omega' = \sum_{n=-N}^N \tilde{\omega}_n e^{in\Omega t}, \quad \psi' = \sum_{n=-N}^N \tilde{\psi}_n e^{in\Omega t} \quad (8)$$

と表される。ここで、 $\Omega$  は攪乱の周波数 (角速度) を表す。また、 $\tilde{\omega}_{-n} = \tilde{\omega}_n^*$  および  $\tilde{\psi}_{-n} = \tilde{\psi}_n^*$  の関係がある。展開 (8) を式 (4) と (6) に代入して次の方程式を得る。

$$in\Omega \tilde{\omega}_n = \frac{1}{Re} M \tilde{\omega}_n + N(\tilde{\psi}_n, \bar{\omega}) + N(\bar{\psi}, \tilde{\omega}_n) + \sum_{p+q=n} N(\tilde{\psi}_p, \tilde{\omega}_q), \quad (9)$$

$$\tilde{\omega}_n = -M \tilde{\psi}_n. \quad (10)$$

展開 (8) において、時間の原点を自由に決めることができるのに対応して、たとえば  $\tilde{\omega}_1$  の位相が不定である。そのため、流れ場の中にある1点 (Fig. 1, P 点) での  $\tilde{\omega}_1$  の値を実数とする。したがって、 $n=1$  のとき P 点で方程式 (9) の左辺は純虚数となり  $\Omega$  を次式で決めることができる。

$$\Omega = \frac{1}{\tilde{\omega}_1} \{ N_i(\tilde{\psi}_1, \bar{\omega}) + N_i(\bar{\psi}, \tilde{\omega}_1) + \sum_{p+q=1} N_i(\tilde{\psi}_p, \tilde{\omega}_q) \}. \quad (11)$$

ここで、 $N_i$  は各非線形項の虚数部を表す。

展開係数  $(\tilde{\psi}_n, \tilde{\omega}_n)$  に対する境界条件は、流入境界 (Fig. 1, AC)、上下境界 (AF と CD) では

$$\tilde{\psi}_n = 0, \quad \tilde{\omega}_n = 0 \quad (12)$$

となる。 $c_w$  を攪乱の位相速度とすると、下流境界 (FD) における境界条件は

$$in\Omega \tilde{\psi}_n + c_w \frac{\partial \tilde{\psi}_n}{\partial x} = 0, \quad in\Omega \tilde{\omega}_n + c_w \frac{\partial \tilde{\omega}_n}{\partial x} = 0 \quad (13)$$

となる。ここで、 $c_w$  は攪乱の周波数  $\Omega$  および攪乱の波長  $\alpha$  を用いて次式で表される。

$$c_w = \frac{\alpha \Omega}{2\pi}. \quad (14)$$

攪乱の波長  $\alpha$  は攪乱に対し空間座標  $x$  について高速フーリエ変換 (FFT) を行うことにより求める。また、円柱表面では、円柱表面上の法線方向ベクトル  $\eta$  として次のように表される。

$$\frac{\partial \tilde{\psi}_n}{\partial \eta} = 0. \quad (15)$$

## 4. 数値計算法

ここでは、数値シミュレーション、対称定常解の数値計算、線形安定性解析および非線形周期解の数値解析を行った。すべての計算において、計算領域として円柱上流側に  $5d$ 、下流側に  $20d$  の長さを取り、側面方向に幅  $10d$  をとった。また、計算格子として Steger and Sorenson<sup>4)</sup> の楕円型方程式による格子生成法を用い、最小格子幅は円柱近傍で  $0.02$ 、最大格子幅は流出および上下境界において  $0.2$  となった。計算格子の例として、 $\Gamma = 2$  における計算格子を Fig. 2 に示す。この図のように、格子は円柱近傍において密であり、円柱から離れるにしたがって疎

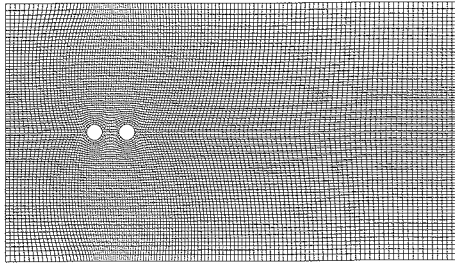


Fig. 2: An example of computational grid.

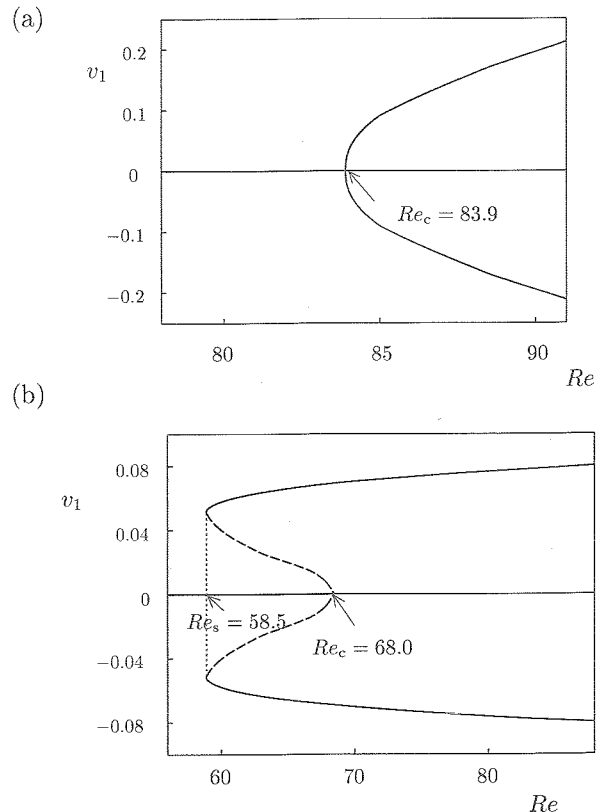
になる。これは、円柱近傍において速度場が急激に変化することを考慮に入れるためである。

数値シミュレーションにおいては、空間微分には2次精度の中心差分を、時間微分についてはオイラー法を用いて方程式を差分近似した。このとき、時間刻み幅  $\Delta t$  は0.005とした。ポアソン方程式の解法にはSOR法を用いた。対称定常解の数値計算においては、空間微分に2次精度の中心差分を用いて方程式を近似し、SOR法を用いて計算を行った。ここで、 $x$ -軸に対して対称な流れ場を求めるため  $\bar{\psi}$  と  $\bar{\omega}$  に  $y$  について反対称条件を課して計算を行った。線形安定性解析では、空間微分に2次精度の中心差分を用いて方程式を近似し、SOR法を用いて計算を行った。ここで、攪乱の線形固有関数 ( $\hat{\psi}, \hat{\omega}$ ) には中心軸に対して対称条件を課した。非線形周期解の数値計算では、空間微分に2次精度の中心差分を用いて方程式を差分近似し、SOR法を用いて計算を行う。また、 $N$  の値を2とし、偶数次のフーリエモード ( $\bar{\psi}_n, \bar{\omega}_n$ ) ( $n$ : 偶数) には中心軸に対して反対称条件を、奇数次のフーリエモードには対称条件をそれぞれ課して計算を行った。

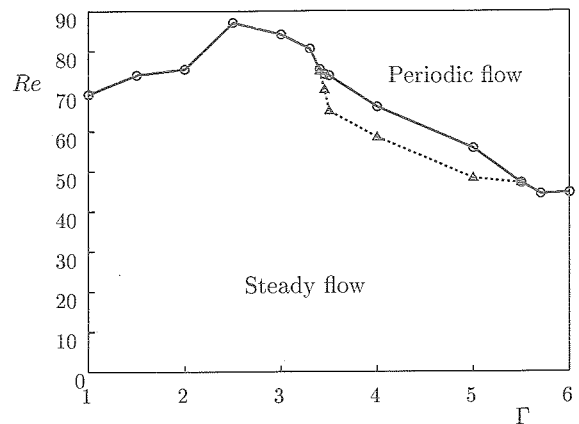
## 5. 計算結果

ここでは、中心間隔比  $\Gamma = [1, 6]$  の範囲で非線形対称定常流を求め、その線形安定性解析を行った。また、数値シミュレーションと非線形周期解の数値計算により流れの遷移を調べた。流れはレイノルズ数が低いときは2円柱の中心を通る直線に関して対称で時間についても不変な流れ(対称定常流)であるが、レイノルズ数がある臨界値を超えると振動流へ遷移する。

対称定常流から振動流への遷移を調べるために、円柱後方の1点 (Fig. 1, P点) における  $y$  方向速度  $v_1$  を代表物理量にとり、 $v_1$  とレイノルズ数  $Re$  との関係調べた。ここで、定常流の場合には  $v_1$  の値を、振動流の場合には  $v_1$  の最大値と最小値をレイノルズ数の関数として分岐図を描いた。たとえば、 $\Gamma = 3$  のときの分岐図は Fig. 3 (a) のようになる。この分岐図から流れは超臨界ホップ分岐を生じており、その臨界値  $Re_c$  は83.9であることがわかる。このような超臨界ホップ分岐は  $\Gamma = [1, 3.5]$  および  $(5.3, 6]$  の範囲で確認された。一方、Fig. 3 (b) は  $\Gamma = 4$  のときの分岐図であり、亜臨界ホップ分岐を生じている。ここで、ホップ分岐の臨界レイノルズ数を  $Re_c$  とし、非線形臨界レイノルズ数(サドルノード)を  $Re_s$  とすると、

Fig. 3: Bifurcation diagram. (a)  $\Gamma = 3$ . (b)  $\Gamma = 4$ .

$Re_s = 58.5$  および  $Re_c = 68.0$  となった。このような亜臨界ホップ分岐は  $\Gamma = 5$  の場合にも見られた。

Fig. 4: Transition diagram.  $\Delta$ :  $Re_c$ .  $\circ$ :  $Re_s$ .

中心間隔比  $\Gamma = [1, 6]$  の範囲で分岐図を求め、対称定常流から振動流へ遷移する臨界レイノルズ数の変化を調べた。その結果を図示すると Fig. 4 のようになる。図中で  $\Delta$  はホップ分岐点の臨界レイノルズ数  $Re_c$  であり、 $\circ$  はサドルノード点の臨界レイノルズ数  $Re_s$  である。間隔比  $\Gamma = [1, 3.5]$  と  $(5.3, 6]$  では超臨界ホップ分岐を生じている。また、 $\Gamma = [3.5, 5.3]$  では亜臨界ホップ分岐なので  $Re_s$  が現れる。

これまでの研究では  $\Gamma = 3 \sim 4$  付近でストローハル数

$St$ 、抗力係数  $C_D$  および揚力係数  $C_L$  に不連続な変化が見られる。 $\Gamma$  が小さいときは前方円柱からはがれた流線は後方円柱に再付着するして渦は後方円柱からのみ放出されるが、 $\Gamma = 3 \sim 4$  程度になると後方円柱のみならず前方円柱からも渦が放出されるようになって流れのパターンが大幅に変化する。このとき、前方から剥離する渦が後方円柱に衝突することによって、揚力係数や抗力係数およびストローハル数が急激に変化することが報告されている。

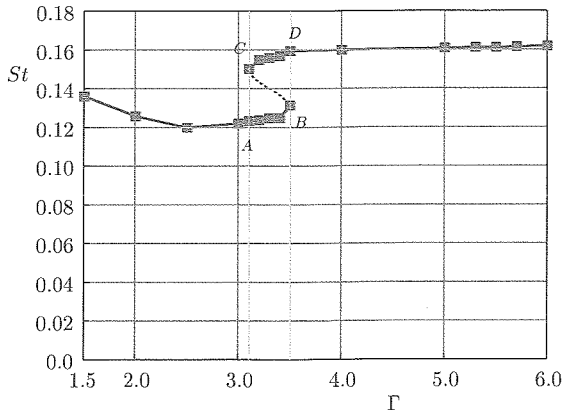


Fig. 5: Strouhal number  $St$ .  $Re = 100$  (Constant).

ここでは、レイノルズ数  $Re = 100$  を一定にして、間隔比  $\Gamma = [1.5, 6]$  の間でストローハル数を評価した (Fig. 5)。この図より、ストローハル数は  $\Gamma = [3.1, 3.5]$  の範囲で3個関数となることが見てとれる。 $\Gamma$  の値を 1.5 から徐々に大きくしていくと、ストローハル数は図中の A 点を通り、B 点 ( $\Gamma = 3.5$ ) にまで達し、この点から C 点へと不連続に変化する。逆に  $\Gamma$  を 6 から徐々に小さくしていくと、ストローハル数は図中の D 点を通り、C 点 ( $\Gamma = 3.1$ ) において A 点へと不連続に変化する。このように、これまで報告されてきたストローハル数が不連続的に変化する理由は  $\Gamma = [3.1, 3.5]$  の間で安定な解が複数個存在することによるヒステリシスを伴う不連続な変化が生じるためと考えられる。

2本の円柱に働く流体からの抗力を求め抗力係数  $C_D$  を評価した。流れ前方の円柱と後方の円柱についての抗力係数  $C_D$  はそれぞれ Fig. 6 のようになる。この図で、後方円柱の抗力係数は  $\Gamma \leq 3.0$  において負となっている。これは、後方円柱が前方円柱の後流の中の逆流領域に入っており、流れとは逆の方向に抗力 (推進力) が働いていることを意味する。また、 $C_D$  はストローハル数と同様に、 $\Gamma = [3.1, 3.5]$  の範囲で3個関数であり、 $C_D$  もヒステリシスを伴う不連続な変化が生じる。その傾向は2円柱の揚力係数  $C_L$  についても同様である (Fig. 7)。

このようにこれまで報告されてきたストローハル数や抗力係数および揚力係数の不連続な変化は非線形周期解がある間隔比のところでは2つの安定な解と1つの不安定な解をもつ結果、ヒステリシスを伴った不連続な変化となるためであるという結論が得られた。

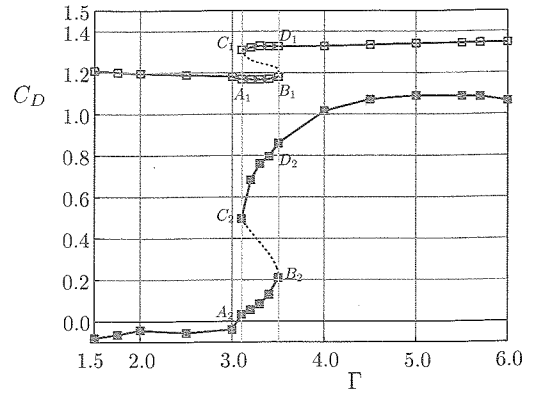


Fig. 6: Drag coefficient  $C_D$ .  $Re = 100$ . □: Front cylinder. ■: Rear cylinder.

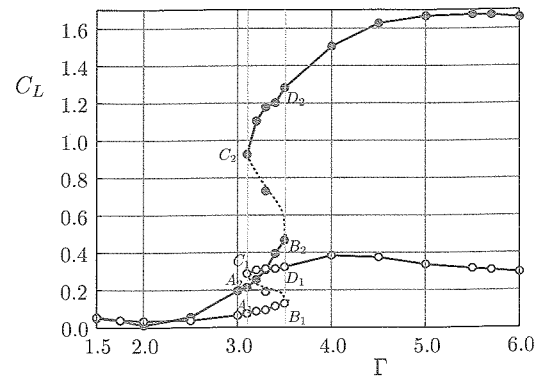


Fig. 7: Lift coefficient  $C_L$ . ○: Front cylinder. ●: Rear cylinder.

#### 参考文献

- 1) Y. Ohya, A. Okajima and M. Hayashi: Wake interference and vortex shedding. in *Encyclopedia of Fluid Mechanics*. 8 (Ed. N. P. Chermisinoff, Gulf Pub., Houston, 1988) 323 – 389.
- 2) P. Le Gal and M. P. Chauve: Coupled wakes behind two circular cylinders. *Phys. Rev. A* 41 (1990) 4566 – 4569.
- 3) M. M. Zdravkovich: Review of flow interference between two circular cylinders in various arrangement. *J. Fluids Eng.* 99 (1977) 618 – 633.
- 4) J. L. Steger and D. S. Chaussee: Automotic mesh-point clustering near a boundary in grid generation with elliptic partial differential equations. *J. Comp. Phys.* 33 (1979) 405 – 410.