

## 一様等方性乱流における速度分布の局所平衡

巽 友正（京都大学） 吉村卓弘（トヨタテクノサービス）

Local Equilibrium of Velocity Distributions  
in Homogeneous Isotropic Turbulence

T. Tatsumi (Kyoto University) T. Yoshimura (Toyota Technos)

## ABSTRACT

Succeeding to the previous reports by the authors<sup>1)</sup> which mostly concerned with the inertial similarity of the velocity distributions in homogeneous isotropic turbulence, the local equilibrium similarity of the velocity distributions is studied in this report using the *cross-independence* closure hypothesis and the local variables. The one- and two-point velocity distributions are all expressed, except for the longitudinal velocity-difference distribution, in terms of the *inertial normal distributions* associated with the *self-energy dissipation* rates. The non-normal and asymmetric properties of the longitudinal velocity-difference distribution are discussed in relation with the structure of the governing equation.

Key words: Turbulence; Cross-independence hypothesis; Velocity distributions; Self-energy dissipation

## 1. 交差独立性理論

著者たちはこれまで、「交差独立性仮説」を用いた乱流理論に関して、1997年3月以来何回かの報告を行なってきた<sup>1)</sup>。その結果、一様等方性乱流は高Reynolds数のもとでは、大規模のエネルギー保有渦の慣性相似則と、小規模のエネルギー散逸渦の局所平衡相似則との二つの相似則によって支配されることが分かった。

このうち、局所平衡相似則は、すでにKolmogorov(1941)<sup>2)</sup>によって、乱流の小規模成分を支配する普遍的な仮説として提案され、以来今日に至るまで、さまざまな形で実験的・数値的検証が行われてきた。本研究はこれに対して、高Reynolds数の極限で厳密に成立する「交差独立性仮説」を用いた速度分布方程式の解析によって理論的根拠を与えたものとなっている。

本研究ではさらに、Kolmogorov理論では対象外であった乱流の大規模成分に関して、1点および2点速度分布が、エネルギー散逸率 $\varepsilon$ をパラメータとする正規分布によって表わされることを示した。これは、一様等方性乱流においては、大規模成分もまたKolmogorovの慣性相似則に従うこと、そしてそれを支配するエネルギー散逸 $\varepsilon$ が、小規模成分による揺動散逸積分として表わされることを示したものである。

慣性相似性の下では、乱流の小規模成分が占める局所平衡領域は、その特性尺度であるKolmogorov長さ $\eta=0(v^{3/4})$ が粘性率 $\nu$ とともに0となるために消失する。したがって、その内部構造を調べるためには、長さ $\eta$ を基準とする局所座標と変数を用いた解析を行わなければならない。これが本報告の目的である。以下、簡単のために局所平衡領域を局所領域、その外の慣性相似則が支配する領域を外部領域と呼ぶ。

乱流における二つの領域の分離は、層流における境界層理論と似ている。境界層理論は、今から一世紀前にPrandtl(1904)<sup>3)</sup>によって提案されたもので、高Reynolds数における物体の周りの層流を、物体を過ぎる非粘性のポテンシャル流と、物体表面を覆う境界層との結合としてとらえ、境界層の厚さ $\theta=0(v^{1/2})$ を基準にとった局所変数を用いた解析によって、層流場を求める一般的方法を開発したものである。以来、今日に至る現代流体力学の飛躍的發展は、この境界層理論を契機とするものである。

この境界層を乱流の小規模成分の占める局所領域に、境界層外のポテンシャル流を大規模成分の占める外部領域に対比するとき、この層流と乱流の二つの理論が共に高Reynolds数における漸近理論であることが認められるであろう。

## 2. 局所変数による表式

本研究では自由減衰乱流を対象とするが、そのエネルギー $E$  およびエネルギー散逸率 $\varepsilon$ の減衰則はすでに $E = E_0 t^{-1}$ 、 $\varepsilon = \varepsilon_0 t^{-2}$ の形に与えられている。局所平衡領域を特徴づけるパラメータとして、この $\varepsilon_0$ と粘性率 $\nu$ をとり、局所変数を次のような無次元数として定義する。

$$\begin{aligned} \text{座標 } x^* &= x(\nu^3/\varepsilon_0)^{-1/4}, \\ \text{時間 } t^* &= t(\nu/\varepsilon_0)^{-1/2}, \\ \text{速度 } u^* &= u(\varepsilon_0\nu)^{-1/4}, \\ \text{圧力 } p^*/\rho &= u(\varepsilon_0\nu)^{-1/2}/\rho. \end{aligned}$$

局所領域の特性Reynolds数は $R^* = 1$ となる。

局所領域における解析は、速度分布に対するLundgren-Monin(1967)<sup>4),5)</sup>の方程式をこの局所変数で書き表わし、これに交差独立性仮説を適用して1点および2点速度分布に対する閉じた方程式を導くやりかたで進められる。

## 3. 1点速度分布

1点速度分布は、外部領域においては<sup>1)</sup>

$$f(v, t) = (t/4\pi\alpha_0)^{3/2} \exp[-|v|^2 t/4\alpha_0], \quad (1)$$

すなわち第1正規分布(N1)として与えられているが、局所領域においても同様に分布N1、

$$f(v^*, t^*) = (t^*/4\pi\alpha_0^*)^{3/2} \exp[-|v^*|^2 t^*/4\alpha_0^*], \quad (2)$$

で表わされる。ここに、

$$\begin{aligned} \alpha^*(t^*) &= \varepsilon^*(t^*)/3 = \alpha_0^* t^{*-2}, \quad \alpha_0^* = \varepsilon_0/3, \\ \varepsilon^*(t^*) &= -dE^*(t^*)/dt^*, \quad E^*(t^*) = \frac{1}{2} \langle |u^*|^2 \rangle. \end{aligned} \quad (3)$$

で、 $\alpha^*$ は無次元エネルギー散逸率を表わす。

1点速度分布が、外部領域と局所領域とを通じて単純な正規分布の形に求められ、しかも、パラメータとしてエネルギー散逸率 $\alpha^* = \varepsilon^*/3$ のみを含み、粘性率 $\nu$ によらないことは、一様等方性乱流の簡明な法則性を表わしている。さらにこの結果は、以下に述べる2点速度分布に関する結果と併せて、この理論のより複雑な乱流場への拡張に明るい展望を与えるものと言える。

## 4. 2点速度分布

局所領域における2点速度分布に対する方程式は、高次分布である3点速度分布に対して交差独立性仮説を2回適用することになるが、本質的には1点速度分布に対するのと同じやり方で導かれる。ただし、慣性領域における解析とは違って、本来の2点速度が同じ局所領域に含まれることを考慮しなければならない。

2点速度分布は一般に表現が複雑なので、これを2点の速度和 $u_+ = \frac{1}{2}(u_1 + u_2)$ と速度差 $u_-$

$= \frac{1}{2}(u_2 - u_1)$ の分布に分解して、別個に扱われることが多い。本研究では最初からこの分解を用いているので、速度和分布と速度差分布の方程式は直ちに求めることができる。

## 5. 速度和分布

速度和分布は、外部領域においては、

$$g_+(v_+, t) = (t/2\pi\alpha_0)^{3/2} \exp[-|v_+|^2 t/2\pi\alpha_0], \quad (4)$$

すなわち第2正規分布(N2)として与えられた<sup>1)</sup>。ここで(4)式では、(2)式におけるパラメータ $\alpha_0^*$ が $\frac{1}{2}\alpha_0^*$ に変っていることに注意されたい。

局所領域においても、速度和分布は正規分布で表わされるが、それは分布N2ではなく第3正規分布(N3)、

$$g_+(v^*, r^*, t^*) = (t^*/4\pi\alpha_0^*(r^*))^{3/2} \times \exp[-|v^*|^2 t^*/4\alpha_0^*(r^*)] \quad (5)$$

で与えられる。ここに、

$$\begin{aligned} \alpha^*(r^*, t^*) &= \varepsilon^*(r^*, t^*)/3 = \alpha_0^*(r^*) t^{*-2}, \\ \varepsilon^*(r^*, t^*) &= -dE^*(r^*, t^*)/dt^*, \\ E^*(r^*, t^*) &= \frac{1}{2} \langle |u^*|^2 \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle | \frac{1}{2}(u_1^* + u_2^*) |^2 \rangle \end{aligned} \quad (6)$$

で、 $E^*$ は速度和 $u^*$ に関する自己エネルギー、 $\alpha^*$ と $\varepsilon^*$ は自己エネルギー散逸率を表わし、いずれも無次元量である。

(6)式から明らかなように、これらの量はいずれも2点間の距離 $r^*$ の関数であるから、正規分布N3は(5)式によって $r^*$ とともに変化する。

$r^* \rightarrow 0$ の極限では $u_+ \rightarrow u_1$ となるから、 $\alpha^* \rightarrow \alpha^*$ となり、分布N3は分布N1に移行する。一方、 $r^* \rightarrow \infty$ の極限では2点速度 $u_1$ と $u_2$ は互いに独立となるから、(6)式により $E^* \rightarrow \frac{1}{2}E^*$ 、 $\alpha^* \rightarrow \frac{1}{2}\alpha^*$ となり、分布N3は慣性領域における分布N2に移行する。

このようにして、局所領域において(5)式で表わされる速度和分布N3は、正規分布の形を保ちながら、局所領域の境界である $r^* \rightarrow 0$ および $r^* \rightarrow \infty$ の両極限において、外部領域における解と一致し、境界値問題の完全な解となっている。

## 6. 速度差分布

速度差分布も速度和分布と同様、外部領域においては第2正規分布(N2)、

$$g_-(v_-, t) = (t/2\pi\alpha_0)^{3/2} \exp[-|v_-|^2 t/2\pi\alpha_0] \quad (7)$$

となることが示された<sup>1)</sup>。これは、外部領域では速度和と速度差が同等であることを示している。

局所領域においては、速度差分布方程式は正規型とならず、

$$[\partial/\partial t + 2\mathbf{v} \cdot \partial/\partial \mathbf{r} + \alpha^-(\mathbf{r}, t) |\partial/\partial \mathbf{v}^-|^2 + \frac{1}{2} \partial/\partial \mathbf{v}^- \cdot \{ \partial/\partial \mathbf{x}_1 \{ \beta_1^-(\mathbf{v}^-, t) + \frac{1}{2} \gamma_1^-(\mathbf{v}^-, t) \} - \partial/\partial \mathbf{x}_2 \{ \beta_2^-(\mathbf{v}^-, t) + \frac{1}{2} \gamma_2^-(\mathbf{v}^-, t) \} \}] \times \mathbf{x} \cdot (\mathbf{v}^-, \mathbf{r}, t) = 0. \quad (8)$$

で与えられる。ここに、

$$\begin{aligned} \alpha^-(\mathbf{r}, t) &= \varepsilon^-(\mathbf{r}, t)/3 = \alpha^-(\mathbf{r}) t^{-2}, \\ \varepsilon^-(\mathbf{r}, t) &= -dE^-(\mathbf{r}, t)/dt, \\ E^-(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{2} \langle |\mathbf{u}^-|^2 \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle |\frac{1}{2}(\mathbf{u}_2^- - \mathbf{u}_1^-)|^2 \rangle \end{aligned} \quad (9)$$

で、 $E^-$  は速度差  $\mathbf{u}^-$  に関する自己エネルギー、 $\alpha^-$  と  $\varepsilon^-$  は自己エネルギー散逸率を表わし、いずれも無次元量である。また、 $\beta_1^-$ 、 $\gamma_1^-$ 、 $\beta_2^-$ 、 $\gamma_2^-$  は、いずれも速度差変数  $\mathbf{v}^-$  に関して2次の積分量であるが、詳細は省略する。

(6)および(9)式で定義された  $\alpha_\pm^-$ 、 $\varepsilon_\pm^-$ 、 $E_\pm^-$  などの自己散逸パラメータは、明らかに等式、

$$\begin{aligned} \alpha^-(t) &= \alpha^-(\mathbf{r}, t) + \alpha^-(\mathbf{r}, t), \\ \varepsilon^-(t) &= \varepsilon^-(\mathbf{r}, t) + \varepsilon^-(\mathbf{r}, t), \\ E^-(t) &= E^-(\mathbf{r}, t) + E^-(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (10)$$

によって散逸パラメータと関係づけられている。

## 6.1. 同等正規分布

方程式(8)は距離  $r$  に依存しない正規項と依存する非正規項からなり、そのため局所領域における速度差分布は一般に非正規非対称である。

ここで、(8)式の正規項からなる方程式、

$$[\partial/\partial t + \alpha^-(\mathbf{r}, t) |\partial/\partial \mathbf{v}^-|^2] g_-(\mathbf{v}^-, \mathbf{r}, t) = 0 \quad (11)$$

を考えれば、(11)式の解は、パラメータ  $\alpha^-$  の  $r$  依存性の影響を無視する近似において(8)式の解となっている。この意味で、(11)式の正規解、

$$g_-(\mathbf{v}^-, \mathbf{r}, t) = (t/4\pi\alpha^-(\mathbf{r}))^{3/2} \times \exp[-|\mathbf{v}^-|^2 t/4\alpha^-(\mathbf{r})] \quad (12)$$

を第4正規分布(N4)と呼ぶとすれば、分布N4は速度差分布の同等正規分布を与える。

この同等正規分布は速度差分布の境界条件を満たしている。(9)式から明らかのように、(12)式のパラメータ  $\alpha^-$  は距離  $r$  の関数であるから、分布N4は  $r$  とともに変化する。 $r \rightarrow 0$  の極限では  $\mathbf{u}^- \rightarrow 0$  となるから、 $\alpha^- \rightarrow 0$  となり、分布N4はデルタ分布に移行する。一方、 $r \rightarrow \infty$  の極限では2点速度  $\mathbf{u}_1^-$  と  $\mathbf{u}_2^-$  は互いに独立となるから、(9)式により  $E^- \rightarrow \frac{1}{2}E^-$ 、 $\alpha^- \rightarrow \frac{1}{2}\alpha^-$  となり、分布N4は外部領域における分布N2に移行する。このようにして、局所領域において同等正規分布N4は、局所領域の境界である  $r \rightarrow 0$  および  $r \rightarrow \infty$  の両極限において外部領域の解と一致し、境界値問題の完全な解となっている。

## 6.2. 横速度差分布

速度差分布は、局所領域においては等方的でなく、距離ベクトル  $\mathbf{r}$  を軸として軸対称的であるため、軸方向の縦速度差分布と、それに直交する横速度差分布に分けて考える。

座標系を  $\mathbf{x} = (x, y, z)$ 、距離ベクトルを  $\mathbf{r} = (r, 0, 0)$ 、速度差変数を  $\mathbf{v} = (v_{\parallel}, v_{\perp}, v_{\perp})$  とおけば、縦速度差分布  $g_{\parallel}$  および横速度差分布  $g_{\perp}$  は、それぞれ次のように表わされる。

$$\begin{aligned} g_{\parallel}(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) &= \iint g_-(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) dv_{\perp} dv_{\perp}, \\ g_{\perp}(\mathbf{v}_{\perp}, \mathbf{r}, t) &= \iint g_-(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) dv_{\parallel} dv_{\perp}, \\ g_{\perp}(\mathbf{v}_{\perp}, \mathbf{r}, t) &= \iint g_-(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) dv_{\parallel} dv_{\perp}. \end{aligned} \quad (13)$$

局所領域における横速度差分布方程式は、(8)および(13)式から次の形に与えられる。

$$[\partial/\partial t + \alpha^-(\mathbf{r}, t) \partial^2/\partial v_{\perp}^2] g_{\perp}(\mathbf{v}_{\perp}, \mathbf{r}, t) = 0. \quad (14)$$

(14)式は明らかに同等正規分布方程式(11)の1次元形であるから、横速度差分布は同等正規分布(12)の1次元形、

$$g_{\perp}(\mathbf{v}_{\perp}, \mathbf{r}, t) = (t/4\pi\alpha^-(\mathbf{r}))^{1/2} \times \exp[-v_{\perp}^2 t/4\alpha^-(\mathbf{r})] \quad (15)$$

として、正規分布N4で表わされる。

したがって、横速度差分布(15)は、同等正規分布N4と同様、局所領域の境界において境界条件を満たす完全解となっている。

## 6.3. 縦速度差分布

局所領域における縦速度差分布方程式は、(8)および(13)式から次のように導かれる。

$$[\partial/\partial t + 2v_{\parallel} \partial/\partial r + \alpha^-(\mathbf{r}, t) \partial^2/\partial v_{\parallel}^2] g_{\parallel}(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) + \frac{1}{2} \partial/\partial v_{\parallel} \cdot \{ \partial/\partial \mathbf{x}_1 \{ \beta_1^-(\mathbf{v}^-, t) + \frac{1}{2} \gamma_1^-(\mathbf{v}^-, t) \} - \partial/\partial \mathbf{x}_2 \{ \beta_2^-(\mathbf{v}^-, t) + \frac{1}{2} \gamma_2^-(\mathbf{v}^-, t) \} \} \times \mathbf{x} \cdot (\mathbf{v}^-, \mathbf{r}, t) dv_{\perp} dv_{\perp} = 0. \quad (16)$$

(16)式から明らかに、縦速度差分布  $g_{\parallel}$  は非正規かつ非対称である。

ただ、同式は変数  $\mathbf{v}^-$  を定積分の形で含み取扱いが難しいので近似解を求める。関数  $\beta_1^-$ 、 $\gamma_1^-$ 、 $\beta_2^-$ 、 $\gamma_2^-$  の定義式(省略)に等方化近似を行なうと、 $\beta_1^- = \beta_2^- = -(1/3)|\mathbf{v}^-|^2$ 、 $\gamma_1^- = \gamma_2^- = 0$ 、(17)となり、(16)式は次のように簡単化される。

$$[\partial/\partial t + \alpha^-(\mathbf{r}, t) \partial^2/\partial v_{\parallel}^2 + \partial/\partial r \{ 2v_{\parallel} + (1/3) \partial/\partial v_{\parallel} (v_{\parallel}^2 + 4\alpha^-(\mathbf{r}, t) t) \}] \times g_{\parallel}(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) = 0. \quad (18)$$

ここで、横速度差分布(15)と同じ自己相似性を仮定して、相似変数を、

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= (w_{\parallel}, w_{\perp}, w_{\perp}) \\ &= \mathbf{v}^- t^{-1/2} = (v_{\parallel}^- t^{-1/2}, v_{\perp}^- t^{-1/2}, v_{\perp}^- t^{-1/2}), \\ s &= r t^{-1/2}, \quad g_{\parallel}(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) = t^{-1/2} G(w_{\parallel}, s), \end{aligned} \quad (19)$$

とおけば、(18)式は次の形に書ける。

$$G + w_{||} \partial G / \partial w_{||} - s \partial G / \partial s + a^2 \partial^2 G / \partial w_{||}^2 + 2\partial / \partial s \{ 2w_{||} + (1/3) \partial / \partial w_{||} (w_{||} + 2a^2) \} G = 0, \quad (20)$$

ここに、

$$a^2 = 2\alpha^{-2} (r^*) = M(w_{\perp}^{*2}) = M(w_{\perp}^{*2}), \quad (21)$$

で、M は平均値を表わす。

近似方程式(20)の解、および方程式(16)の解に関する議論は次の論文に譲るが、(20)式の解の定性的性質について触れておきたい。

(20)式は2元2階偏微分方程式で、中間積分として関係式、

$$s = (4/3)w_{||} + (1/9)w_{||}^3, \quad (22)$$

が得られる。(22)式から直ちに、

$$\begin{aligned} s \ll 1 \text{ のとき } & w_{||} \propto s, \\ s \gg 1 \text{ のとき } & w_{||} \propto s^{1/3}, \end{aligned} \quad (23)$$

となる。(23)の第1式は、 $s \ll 1$ の領域が局所平衡領域の中の散逸領域、 $s \gg 1$ の領域が慣性小領域にそれぞれ対応することを示している。

### 7. 交差速度モーメント

関係式(22)によって、速度差分布のモーメントが距離 $r^*$ と関係づけられる。とくに、エネルギーやエネルギー散逸を表わす2次モーメント $\langle u^{*2} \rangle$ は、図1の破線のようになる。 $\langle u^{*2} \rangle$ は $r^*=0$ の近傍では $r^{*2}$ に比例し、 $r^*$ が大きくなると $r^{*2/3}$ に比例して増大する。この $r^{*2}$ の領域が散逸領域に、そして $r^{*2/3}$ の領域が慣性小領域に対応する。

一方、速度和分布の2次モーメント $\langle u^{*2} \rangle$ は、(10)式から図1の実線のように求められる。 $\langle u^{*2} \rangle$ は $r^*=0$ における値 $\langle u^{*2} \rangle$ から出発して、水平線 $\langle u^{*2} \rangle = \frac{1}{2} \langle u^{*2} \rangle$ に関して速度差 $\langle u^{*2} \rangle$ の鏡像を描いて減少する。そして、 $r^*$ のある値 $r^*$ で、 $\langle u^{*2} \rangle = \langle u^{*2} \rangle = \frac{1}{2} \langle u^{*2} \rangle$ , (24) となる。

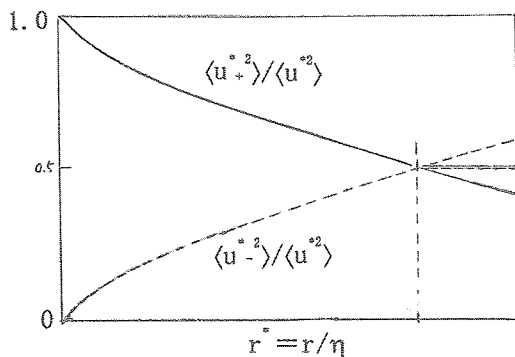


図1 速度差と速度和の2次モーメントの距離 $r/\eta$ に対する変化の概念図

$r^*=r^*$ の点で、速度差は速度和と同程度の大きさとなり、速度差が乱流の小規模成分を表わすという局所平衡領域の前提が崩れるため、その部分領域である慣性小領域はここで終わる。

$r^* \geq r^*$ の領域では、速度和と速度差の区別が無くなり、領域は慣性相似則が支配する外部領域となる。そして関係式(24)と速度和および速度差の慣性正規分布はすべての点で成立する。

### 1. 交差独立性仮説の実験的検証

今回の発表の直前、昨年(2005)の研究会において、蔦田ほか(2005)<sup>6)</sup>による『大規模乱流場を用いた交差独立性仮説の実験的検証』と題する研究報告が行われていたことを知った。早速、論文を拝見したところ、蔦田研の高Reynolds数風洞を用いて、ほとんどすべての場合において交差独立性理論の結果を支持する検証結果が得られており、まさに百万の味方を得た心地がした。唯一のしかし重要な相違点である「近接領域での速度差分布の非正規性」についても、相違は巽ほか(2002)<sup>7)</sup>の結果によるもので、現在では解決の方向にあることを付言しておきたい。

とくに「交差速度の2次相関」の実測図(原論文の図5)は、まさに本論文の概念図1を裏付ける実験結果で、これがあれば図1は不要であった。ここに、同図を引用して深く謝意を表したい。

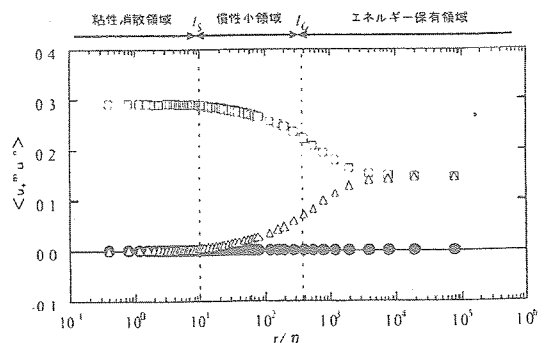


図2 交差速度の2次相関の $r/\eta$ 依存性 ( $R_\lambda \approx 350$ )

$$\square: \langle u^2 \rangle, \bullet: \langle u.u \rangle, \triangle: \langle u^2 \rangle$$

(蔦田-高佐-関下(2005)<sup>6)</sup>による)

#### 引用文献

- 1) T. Tatsumi & T. Yoshimura (2004) *Fl. Dyn. Res.* 35, 123.
- 2) A. N. Kolmogorov (1941) *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 30, 301.
- 3) L. Prandtl (1904) *Vehr. III Int. Mat. Kong. Heidel.* 484.
- 4) T. S. Lundgren (1967) *Phys. Fluids*, 10, 969.
- 5) A. S. Monin (1967) *PMM J. Appl. Math. Mech.* 31, 1057.
- 6) 蔦田-高佐-関下 (2005) 航宇技研 JAXA-SP-04-002, 71.
- 7) 巽-吉村 (2002) 航宇技研特別資料 SP-56, 71.