

回転2円板間流れのパターン形成

三浦知仁, 水島二郎 (同志社大工)

Pattern formation in flow between two corotating disks

T. Miura and J. Mizushima

Department of Mechanical Engineering, Doshisha University

ABSTRACT

Pattern formation in flow between two corotating disks in an enclosure is investigated numerically and experimentally. The outer cylindrical boundary of the flow field is assumed to be fixed, whereas the inner cylinder rotates together with the two disks. The flow is not only symmetric with respect to the inter-disk midplane but also axisymmetric around the axis of rotation at small Reynolds numbers. The axisymmetry of the flow field is broken due to instability at high Reynolds numbers. Such an instability occurs for small gap ratios, the ratio of the gap between two disks to the radius of the annulus, and yields a polygonal flow pattern in a plane normal to the rotation axis. We identified two kinds of three dimensional unsteady flow by numerical simulations, one of which is asymmetric with respect to the inter-disk midplane and the other has a shift-and-reflect symmetry with the midplane, and compared them with those obtained by experiment. We found that the critical Reynolds number at which the axisymmetric makes a transition to unsteady 3D flow is smaller than those evaluated in previous papers, although the flow patterns are consistent with those reported in them.

Key Words: corotating disks, Couette flow, polygonal pattern

1. はじめに

内円筒とともに一定角速度で回転する2枚の平行な円板と静止外周壁に囲まれた流体の運動は、テイラー・クエット流の有限長さをもつ場合に対応している。テイラー・クエット流はさまざまな流体機械、化学反応容器などに現れる流れである。2円板間隔が円板半径に対して非常に小さい場合はコンピュータのハードディスク内部流れのモデルとしても考えられる。流れ場の非定常な変化が装置や反応速度に与える影響は大きく、工学の分野においてもこの種の流れを解明することは非常に有用である。

ハードディスク内部流れのモデルとして研究されている例は比較的多く、Lennemann¹⁾は2円板の間隔がせまい場合について可視化実験を行った。その結果、回転軸方向から流れ場を観察したとき、回転軸付近にコアと呼ばれる多角形状のパターンを有する領域が現れることを発見した。また、このコア領域は回転軸の角速度の約80%で回転しているということも報告している。Abrahamson, Eaton and Koga²⁾は、2円板の間隔が非常にせまい場合について流れ場の様子を可視化実験により調べた。Lennemann¹⁾の結果と同様に回転軸付近に多角パターンを確認しているが、さ

らに、2円板の間隔によっては非定常に流れパターンが変化するパラメータ領域が存在することを示した。

外周壁が少し異なった形状の場合については、類似した系について流れ場のパターン形成について詳しく考察を行ったのが舟木、滝澤、平田、矢野³⁾である。彼らは楕円形、3角形、4角形、5角形、6角形、および円形の6種類のコア領域が発生することを確認し、各パターンが発生する条件を調べた。また、コア領域の位相速度についても詳しく調べた。

数値的に解の分岐や流れ場の構造について調べられた例もある。Herrero, Giralt and Humphrey⁴⁾は2円板間隔がせまい場合から比較的広い場合について数値シミュレーションを行い、軸対称流れから非軸対称流れへの遷移について調べた。円板の回転速度が非常に小さい場合、流れ場には回転軸対称性があり、鉛直断面内では2円板間の中心面に対して対称な一対の渦が観察できる。円板の回転速度が大きくなると軸対称性が破れるが、Herrero *et al.*⁴⁾は軸対称性が破れる過程について、鉛直断面内の上下対称性が完全に破れた非定常流に遷移する場合と水平断面内に現れる多角パターンを回転周期の半分で鉛直断面内の上下の流れパターンを入れかえるような非定常流に遷移する場合があると述べている。彼らは前者を symmetry-breaking

型, 後者を shift-and-reflect symmetry 型と呼んでいる。Randriamampianina *et al.*⁵⁾ は 2 円板間隔が大きい場合について, 軸対称流れ場でピッチフォーク分岐とホップ分岐が生じることを数値シミュレーションによって示した。また, 2 円板間隔のある値においてピッチフォーク分岐とホップ分岐の現れる順序が入れ替わることも示した。さらに, 3 次元数値シミュレーションを行った結果, Herrero *et al.*⁴⁾ と同様に symmetry-breaking 型と shift-and-reflect symmetry 型の 3 次元非定常流れ場を確認しているが, 定量的な面で Herrero *et al.*⁴⁾ と相違がある。

これまでの研究において軸対称性の破れに関していくつかの研究は行われているが, その詳細な遷移過程は明らかになっていない。本研究では 2 円板間隔と内外円筒間の距離の比であるアスペクト比およびレイノルズ数を無次元パラメータとし, 2 円板間隔が比較的広い場合について実験と数値計算の両面から流れ場の構造および遷移を明らかにすることを目的とする。

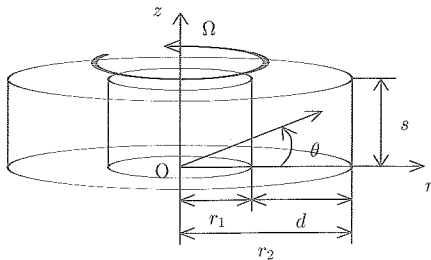


図 1: 座標系。

1 定式化

内円筒とともに一定角速度で回転する 2 枚の平行な円板と静止外周壁に囲まれた非圧縮粘性流体の運動を考える。座標系は図 1 に示すように内円筒外周部と一方の円板との交点を原点 O とし, 半径方向に r , 周方向に θ , 鉛直方向に z 軸をとるような円筒座標を考える。代表的な長さスケールを内円筒半径 r_1 と静止外周壁半径 r_2 の差 $r_2 - r_1 \equiv d$, 代表的な速度スケールを円板の最大速度である $r_2\Omega$ として, 無次元化を

$$r = \frac{r^* - r_1}{d}, \quad z = \frac{z^*}{d}, \quad \mathbf{u} = \frac{1}{r_2\Omega} (u^*, v^*, w^*),$$

$$p = \frac{p^*}{\rho r_2^2 \Omega^2}, \quad t = t^* \frac{r_2 \Omega}{d}, \quad Re = \frac{r_2 \Omega d}{\nu}, \quad \eta = \frac{r_1}{r_2} \quad (1)$$

のように行う。ただし $*$ は有次元量であることを示している。この結果, 次の無次元形の連続の式とナビエ・ストークス方程式が得られる。

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial(\xi u)}{\partial r} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{\xi} \frac{\partial u}{\partial \theta} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{\xi} = -\frac{\partial p}{\partial r}$$

$$+ \frac{1}{Re} (\nabla^2 u - \frac{u}{\xi^2} - \frac{2}{\xi^2} \frac{\partial v}{\partial \theta}) + 2(1 - \eta)v + \xi(1 - \eta)^2, \quad (3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{\xi} \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{\xi}$$

$$= -\frac{1}{\xi} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{Re} (\nabla^2 v - \frac{v}{\xi^2} - \frac{2}{\xi^2} \frac{\partial u}{\partial \theta}) - 2(1 - \eta)u, \quad (4)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{\xi} \frac{\partial w}{\partial \theta} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{Re} \nabla^2 w \quad (5)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (6)$$

ここで,

$$\xi = r + \frac{r_1}{d}$$

とおいた。本研究における無次元パラメータは,

レイノルズ数

$$Re = \frac{r_2 \Omega d}{\nu},$$

半径比

$$\eta = \frac{r_1}{r_2}$$

および, 2 円板間の距離 s と内外円筒の半径差 $r_2 - r_1 \equiv d$ の比で定義される

アスペクト比

$$\Gamma = \frac{s}{d}$$

である。

2 数値計算法

基礎方程式に対して有限差分法を用い, SOLA 法 (SOlution ALgorithm method) に従って離散化を行った。計算格子については等間隔スタガード格子を採用した。差分スキームについては, 対流項に 3 次精度である Leonard の UTOPIA (Uniformly Third-Order Polynomial Interpolation Algorithm) スキーム, 拡散項には 4 次精度中心差分, 圧力方程式には 2 次精度中心差分を用いた。ただし, 境界より 1 グリッド内側の領域については対流項と拡散項に対して 2 次精度中心差分を用いた。時間積分には 2 次精度アダムス・バッシュフォース法を用いた。離散化することにより得られる各速度成分および圧力に関する差分方程式を, 内円筒および 2 円板上で

$$u = v = w = 0, \quad (7)$$

静止外周壁上で

$$u = w = 0, \quad v = -1, \quad (8)$$

という境界条件のもとで解いた。また, 周方向には周期境界条件を課して計算を行った。

3 可視化実験

回転2円板間のパターン形成を調べるために、鉛直断面内および水平断面内の流れ場の可視化実験を行った。実験装置の概略図を図2に示す。回転円板4と内円筒5および外円筒6はアクリル製であり、半径はそれぞれ98 mm, 50 mm, 100 mmである。回転軸3はアルミニウム製である。作動流体には空気(20℃)および水(15℃)、トレーサーには線香の煙およびアルミニウム粉末を用いる。実験方法は流体層に作動流体

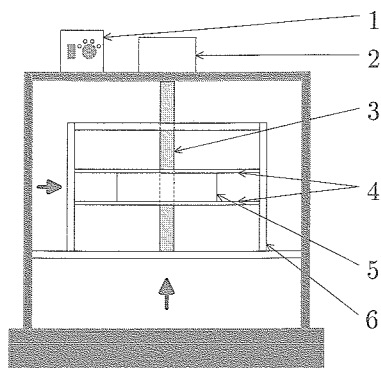


図2: 実験装置概略図。1 回転数制御装置, 2 モーター, 3 回転軸, 4 回転円板, 5 内円筒, 6 静止外円筒。

を満たした後、回転数制御装置1でモーター2の回転数を調節する。本実験では、モーターの回転数を調節することでレイノルズ数を $5.0 \times 10^2 \lesssim Re \lesssim 1.5 \times 10^5$ の範囲で変えることができる。鉛直断面内の流れ場を可視化する場合は、流体層に対して垂直にスリット光を照射し、紙面に対して垂直な方向からデジタルビデオカメラで撮影する。水平断面内の流れ場を可視化する場合は、流体層に対して水平にスリット光を照射し、鉛直下方からデジタルビデオカメラで撮影する。

4 結果および考察

4.1 軸対称流れ場

流れ場に軸対称性を仮定して、数値計算および可視化実験を行い、流れパターンの遷移について調べた。図3に代表的なアスペクト比 $\Gamma = 0.6$ の子午面内流れパターンを示す。図3に見られるようにレイノルズ数 Re が小さいときは z 軸中心面に対して上下対称でかつ定常な一対の渦構造が見られる。この渦構造は上部の渦は時計回りに回転し、下部の渦の回転方向は逆となっている。 Re が増加すると一対の渦構造は上下非対称になることがわかる。また数値計算と可視化実験の結果は比較的良好に一致しているが、可視化実験においては時間的に上下の流れパターンを入れかえるような非定常流が見られるような場合もあった。

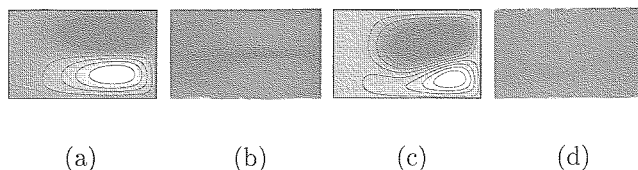


図3: 子午面内流れパターン。 $\Gamma = 0.6$ 。(a) $Re = 800$, 流線(数値計算), (b) $Re = 800$, 可視化写真, (c) $Re = 1200$, 流線(数値計算), (d) $Re = 1200$, 可視化写真。

4.2 非軸対称流れ場

これまで述べたように、静止容器中の回転2円板間流れでは回転数が大きくなると軸対称性が破れ、水平断面内で多角形パターンが出現することが過去の研究で明らかになっている。本研究ではアスペクト比 $\Gamma = 0.2$ および $\Gamma = 0.3$ について水平断面内流れ場の可視化実験、 $\Gamma = 0.2$ および $\Gamma = 0.6$ について3次元数値シミュレーションを行った。数値シミュレーションの解像度は *Herrero et al.*⁴⁾ に従い $\Gamma = 0.2$ の場合は $80 \times 80 \times 40$, $\Gamma = 0.6$ の場合は $80 \times 80 \times 60$ とした。図4および図5に数値計算によって得られた z 軸中心断面の流れ場を示す。図中では各物理量の値が大きい部分が暖色、小さい部分が寒色で示されている。図4(a)–4(d)を見るとアスペクト比 $\Gamma = 0.6$, レイノルズ数 $Re = 1000$ では半径方向速度 u および周方向速度 v の周方向波数が鉛直方向速度 w の周方向波数の2倍になるような流れとなっている。図4(e)–4(h)は $\Gamma = 0.6$, $Re = 3000$ の場合であるが、 u, v, w の周方向波数は全て等しくなっている。 $\Gamma = 0.6$, $Re = 1000$ の場合は、水平断面内の流れパターンの回転周期の半分で子午面内の1対の渦の上下配置が入れかわる。それに対し $\Gamma = 0.6$, $Re = 3000$ の場合は、子午面内の対称性は常に破れた状態であった。このことから、 $\Gamma = 0.6$, $Re = 1000$ では *Herrero et al.*⁴⁾ が述べているような shift-and-reflect symmetry 型の流れ場、 $\Gamma = 0.6$, $Re = 3000$ では symmetry-breaking 型の流れ場となっていることがわかる。また、この結果から $\Gamma = 0.6$ では $Re = 1000$ 程度で軸対称性が破れていることがわかり、前節で述べたような可視化実験で見られた非定常流は流れ場の3次元性によるものであると考えられる。図5に示すように $\Gamma = 0.2$ でも2つの異なるタイプの流れ場が存在する。図5(a)–5(d)は shift-and-reflect symmetry 型であるが、この場合は静止外周壁付近に多数の渦構造が存在する。図5(e)–5(h)は symmetry-breaking 型であり、明確に多角形パターンが確認できる。図6は可視化実験による水平断面内の様子である。図6(a)および6(b)は $\Gamma = 0.2$ について、それぞれ $Re = 5000$, $Re = 9000$ の場合を示している。これらの場合は静止外周壁付近に多数の渦構造が確認できることから図5(a)–5(d)で示した流れ場と同種のものであると考えられる。図6(c)は $\Gamma = 0.3$, $Re = 5000$ の場合であり、多角形パターン

の各辺に隣接して大規模な渦構造が存在していることから図5(e)–5(h)と同種の流れ場であると考えられる。このように可視化実験によっても2種類の非軸対称流れ場を確認した。

Herrero *et al.*⁴⁾ は $\Gamma = 0.2$ で軸対称性が破れる臨界レイノルズ数 Re_c を $Re_c \sim 12000$, Randriamampianina *et al.*⁵⁾ は $\Gamma = 0.6$ で $Re_c \sim 1700$ としている。しかし、本研究では $\Gamma = 0.2, 0.6$ において彼らが示した Re_c より低い Re 領域で非軸対称な流れ場を可視化実験と数値計算の両面で確認している。

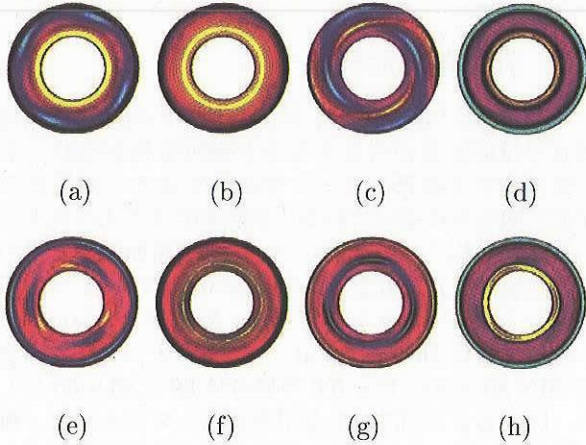


図4: 水平断面内流れパターン. $\Gamma = 0.6$. $z = 0.5\Gamma$. (a) $Re = 1000$, 半径方向速度 u , (b) $Re = 1000$, 周方向速度 v , (c) $Re = 1000$, 鉛直方向速度 w , (d) $Re = 1000$, 渦度 ω_z . (e) $Re = 3000$, 半径方向速度 u , (f) $Re = 3000$, 周方向速度 v , (g) $Re = 3000$, 鉛直方向速度 w , (h) $Re = 3000$, 渦度 ω_z .

5 結言

回転2円板間のパターン遷移について可視化実験および数値シミュレーションを行った結果、2種類の非軸対称な流れ場を確認した。本結果は過去の文献と定性的に一致するが、定量的な面で相違がある。今後は解の分岐構造を調べることにより、流れ場の軸対称性が破れる過程を明らかにしていく。

謝辞

可視化実験に協力して頂いた樽林亮氏、松尾智之氏および貴重な助言を与えてくださった横山直人氏に感謝の意を表します。

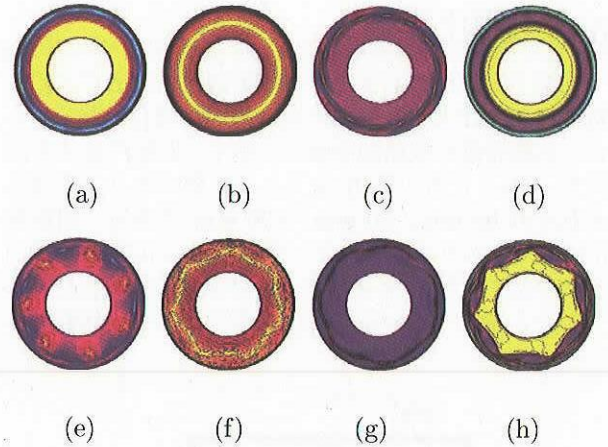


図5: 水平断面内流れパターン. $\Gamma = 0.2$. $z = 0.5\Gamma$. (a) $Re = 5000$, 半径方向速度 u , (b) $Re = 5000$, 周方向速度 v , (c) $Re = 5000$, 鉛直方向速度 w , (d) $Re = 5000$, 渦度 ω_z . (e) $Re = 12000$, 半径方向速度 u , (f) $Re = 12000$, 周方向速度 v , (g) $Re = 12000$, 鉛直方向速度 w , (h) $Re = 12000$, 渦度 ω_z .

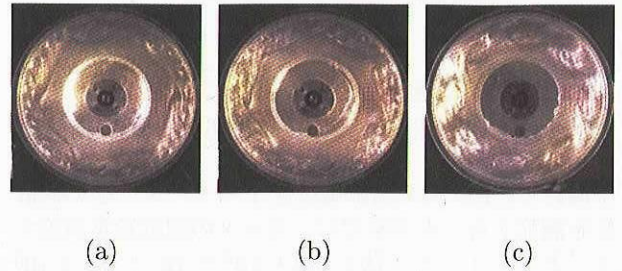


図6: 水平断面内流れパターン. 可視化写真. $z = 0.5\Gamma$. (a) $\Gamma = 0.2$, $Re = 5000$, (b) $\Gamma = 0.2$, $Re = 9000$, (c) $\Gamma = 0.3$, $Re = 5000$.

参考文献

- 1) E. Lennemann, *IBM J. Res. Develop.*, Vol. 18, pp. 480-488 (1974).
- 2) S. D. Abrahamson, J. K. Eaton, and D. J. Koga, *Phys. Fluids. A*, Vol. 1, pp. 241-251 (1989).
- 3) 舟木 治郎, 滝澤 敬次, 平田 勝哉, 矢野 秀雄, 日本機械学会論文集 B61, 2924-2929 (1995).
- 4) J. Herrero, and F. Giralt, *Phys. Fluids*, Vol. 11, pp. 88-96 (1999).
- 5) A. Randriamampianina, R. Schiestel, and J. Wilson, *J. Fluid Mech.*, Vol. 434, pp. 39-64 (2001).