

保存系に対する保存型差分近似スキームの問題点

Some problems in Conservative Difference Schemes for the Conservation Laws.

相曾 秀昭 (AISO, Hideaki) * アブジアロフ, ムスタファ, (ABOUZIAROV, Moustafa) **

We are concerned with the difference approximation for the compressible Euler equations. While it is usually assumed that the difference increments tend to go to zero when the convergence or other issues like the order of accuracy is discussed, there are still problems in the numerical behaviors which should be discussed from the viewpoint that the difference approximation of interest is a “discrete model” with the difference increments fixed to be some finite values.

Two of such problems are discussed, the carbuncle instability and the unphysical dip of density that may happen with the occurrence of strong rarefaction waves. It seems that they are somehow related with the property of compressible Euler equations that the system has linearly degenerate fields while the whole system is nonlinear.

1. はじめに

圧縮性 Euler 方程式は通常差分近似により数値計算されるが、その解の存在と一意性が現在未解決である事実はその差分近似の数学的解析においても多くの未解決問題をもたらしている。

実際には適当な差分による近似解が何らかの意味で収束する事を期待して数値計算が行われる。しかし、収束の問題が解決したとしても計算の品質保証の観点からは無視できない不都合な挙動が数値計算で観察される事も事実である。

数値計算に用いられる差分近似は、元の連続モデルである圧縮性 Euler 方程式を模擬する (元の連続モデルと類似する性質を何らかの形で実現しようとする) 離散モデルである。しかし連続モデルと離散モデルは異なるカテゴリーに属するものであるから、連続モデルと離散モデルにおける全く『同一』の性質の実現は不可能で、求め得るのは『類似』の性質である。つまり、連続モデルの各性質は離散モデルの何らかの性質に『翻訳』さ

れ、連続モデルのある性質が離散モデルに如何に反映されるかが論じられる。これが離散モデルの連続モデルに対する適合性であり、離散モデルの側から見れば、ある数値的現象 (又はその現象をもたらす性質) が連続モデルに由来する (連続モデルの性質を模擬する、もしくは連続モデルの性質から翻訳された) か否かが問題となる。

数値計算における不都合は、離散モデルが連続モデルに由来しない性質を有しそれが数値的現象として顕在化する事と解される。圧縮性 Euler 方程式の数値計算でもこうした不都合が観察される。ここではそれらの問題を議論したい。

一つは、数値的カーバンクル (Carbuncle) であり¹、もう一つは強い膨脹波の発生に伴う密度の非

¹ 圧縮性 Euler 方程式の解の存在と一意性が未解決な現時点では「元の連続モデルに由来しない」事を断言できない。しかし、Meshkov の安定性解析等により圧縮性 Euler 流体の衝撃波には数値的カーバンクルに対応する現象はないと考えられる。また、数値的カーバンクルは差分格子サイズへの依存が観察されるので、差分格子のような構造 (又はスケール) を有しない圧縮性 Euler 方程式に由来する現象ではないという推論が可能である。

また、「差分近似では数値粘性が不可避であるから、対応する連続モデルとして圧縮性 Navier-Stokes 方程式を考えるべきである」という意見があるが、その場合は「離散モデルである差分近似の連続モデルの圧縮性 Euler 方程式への適合性」をはじめから否定する事になる。

* 宇宙航空研究開発機構 総合技術研究本部 情報技術開発共同センター, IT-Center ISTA JAXA (Japan Aerospace Exploration Agency), 1 (E-mail: aiso@nal.go.jp),

** 2004 年 3 月まで上記機関に在籍

物理的な Dip である。2つの問題は一旦全く関係がない様に見えるが、実際には圧縮性 Euler 方程式の特徴である『非線形双曲型保存則に存在する線形退化場』の影響が大きい。この事実は数値計算の品質の向上の為に数学的解析においては大きな課題であると考えられる。

2. カーバンクル不安定

カーバンクル不安定性は衝撃波計算においてしばしば観察され、現在ではよく知られている。現象自体は1970年代から観察されていたと言われるが、この現象が数値計算法に由来する事が認識され学術的な議論の対象となったのは、Quirk による言及 [1] 以来である。

この不安定現象は衝撃波面が計算格子の座標面のどれかに平行な場合²に生じ易い為、[1]以降、その解決法が探られてきた。これらの議論は差分の各論に及ぶものもあるが、一般に、衝撃波と平行な方向の移流計算での適当な数値粘性の付加がカーバンクル不安定の抑制に効果的な事が知られ、現在でもその方法論は広く用いられている。

しかし、この不安定現象の発現の機構についての議論は未だ十分ではない。ここでは、過去の議論も参照しつつこの機構について考察する。

1次元的现象である平面衝撃波を、2次元または3次元の直交格子で計算した場合にカーバンクル不安定が発現し易い事はよく知られる。ここでは、以下の様に問題を設定する。

2次元の圧縮性 Euler 方程式

$$U_t + F(U)_x + G(U)_y = 0,$$

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(e+p) \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(e+p) \end{bmatrix} \quad (1)$$

を考える。 ρ, u, v, p, e はそれぞれ密度、速度の x -成分、速度の y -成分、圧力、全エネルギー (単位体積あたり) を表わし、状態方程式には

$$e = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2) \quad (2)$$

を仮定する。 $(\gamma$ は比熱比) 上の方程式に、Rankine-Hugoniot 条件

$$F(U_R) - F(U_L) = s(U_R - U_L) \quad (3)$$

²これは、同時に衝撃波を良い解像度で捕獲するのに好都合な場合となっているので、実際の計算で実現しやすい場合であると言える。

及び

$$u_L - c_L > s > u_R - c_R \text{ 又は } u_L + c_L > s > u_R + c_R, \quad (4)$$

$$\text{但し, } c_L = \sqrt{\frac{\gamma p_L}{\rho_L}}, c_R = \sqrt{\frac{\gamma p_R}{\rho_R}}$$

を満たす、衝撃波両側の状態

$$U_L = {}^t[\rho_L, \rho_L u_L, \rho_L v_L, e_L]$$

$$U_R = {}^t[\rho_R, \rho_R u_R, \rho_R v_R, e_R]$$

(但し、 $v_L = v_R = 0$) と衝撃波の x -方向の進行速度 s を用いて、初期条件

$$U(x, y, 0) = \begin{cases} U_L, & x < 0 \\ U_R, & x > 0 \end{cases} \quad (5)$$

を与えれば、解は

$$U(x, y, t) = U(x - st, y, 0) \quad (6)$$

のようになる。³

以上に対応する数値計算を次の様に仮定する。

x, y, t 各方向の差分幅 (差分増分) を $\Delta x, \Delta y, \Delta t$ とし、各時刻 $t^n = n\Delta t$ (n は整数, $n \geq 0$) における xy 平面上の各有限体積

$$I_{i,j} = \left((i - \frac{1}{2})\Delta x, (i + \frac{1}{2})\Delta x \right) \times \left((j - \frac{1}{2})\Delta y, (j + \frac{1}{2})\Delta y \right)$$

での保存量 $U = {}^t[\rho, \rho u, \rho v, e]$ の代表 (平均) 値を

$$U_{i,j}^n = \begin{bmatrix} \rho_{i,j}^n \\ \rho_{i,j}^n u_{i,j}^n \\ \rho_{i,j}^n v_{i,j}^n \\ e_{i,j}^n \end{bmatrix}$$

とする。圧力の代表値 $p_{i,j}^n$ は状態方程式

$$p_{i,j}^n = (\gamma - 1) \left\{ e_{i,j}^n - \frac{1}{2}\rho_{i,j}^n \left((u_{i,j}^n)^2 + (v_{i,j}^n)^2 \right) \right\}$$

により定める。

離散化の方法は次の Godunov 差分を採用する。

$$U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \bar{F}^G(U_{i,j}^n, U_{i+1,j}^n) - \bar{F}^G(U_{i-1,j}^n, U_{i,j}^n) \right\} - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left\{ \bar{G}^G(U_{i,j}^n, U_{i,j+1}^n) - \bar{G}^G(U_{i,j-1}^n, U_{i,j}^n) \right\} \quad (7)$$

ここで $\bar{F}^G(U_{i,j}^n, U_{i+1,j}^n)$ は隣接する有限体積 $I_{i,j}$ と $I_{i+1,j}$ の接触面で時刻 $t = t^n$ と $t = t^{n+1}$ の間に

³厳密には、この解の一意性については未だ証明されていない。一般には、何らかのエントロピー条件を満たすか、もしくは、粘性解の極限として一意であると予想される。

やり取りされる流束の時間平均値の近似であり、Godunov 差分の場合には Riemann 問題

$$\begin{cases} U_t + F(U)_x = 0, \\ U(x, y, 0) = \begin{cases} U_{i,j}^n, & x < 0 \\ U_{i+1,j}^n, & x > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (8)$$

の厳密解 $U(x, y, t) = U^{(x)}(x/t; U_{i,j}^n, U_{i+1,j}^n)$ ⁴ から

$$\bar{F}^G(U_{i,j}^n, U_{i+1,j}^n) = F(U^{(x)}(0; U_{i,j}^n, U_{i+1,j}^n)) \quad (9)$$

により定められる。同様に、 $\bar{G}^G(U_{i,j}^n, U_{i,j+1}^n)$ は $I_{i,j}$ と $I_{i,j+1}$ の接触面での流束の時刻 $t = t^n$ と $t = t^{n+1}$ の間の平均値の近似であり、Riemann 問題

$$\begin{cases} U_t + G(U)_y = 0, \\ U(x, y, 0) = \begin{cases} U_{i,j}^n, & y < 0 \\ U_{i,j+1}^n, & y > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (10)$$

の厳密解 $U(x, y, t) = U^{(y)}(y/t; U_{i,j}^n, U_{i,j+1}^n)$ から

$$\bar{G}^G(U_{i,j}^n, U_{i,j+1}^n) = F(U^{(y)}(0; U_{i,j}^n, U_{i,j+1}^n)) \quad (11)$$

として定められる。

初期条件については衝撃波の両側の状態を (3)(4) により得られる U_L, U_R とするが、数値計算では衝撃波は鈍って捕獲されるのが通常であり、衝撃波両側の状態以外の中間状態 (intermediate state) が出現する。⁵ そのため、安定性の観察の為に数値計算では、まず、 x -方向のみの 1 次元計算を行い十分な時間段階を経て数値的に十分安定な離散衝撃波プロファイルを得た後に、これを初期値とする 2 次元数値計算を試す必要がある。

例えば、 j を固定 (例えば $j = 0$) して

$$U_{i,0}^{n+1} = U_{i,0}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \{ \bar{F}^G(U_{i,0}^n, U_{i+1,0}^n) - \bar{F}^G(U_{i-1,0}^n, U_{i,0}^n) \} \quad (12)$$

なる計算 (第 3 要素については計算不要) を衝撃波プロファイルが (数値的に) 安定するまで行う。次に、得られた安定なプロファイル $\{U_{i,0}^{stable}\}_i$ を用いて、2 次元計算用の初期値 $\{U_{i,j}^0\}_{i,j}$ を

$$U_{i,j}^0 = U_{i,0}^{stable}, \quad i, j \text{ は整数} \quad (13)$$

⁴この厳密解は初期値を決定する 2 状態 $U_{i,j}^n, U_{i+1,j}^n$ の他に x/t に依存し、その性質を称して自己相似解と呼ばれる。

⁵このような各種差分スキームによる衝撃波捕獲の状況を離散衝撃波プロファイル (discrete shock profile) と呼ぶ。静止衝撃波 ($s = 0$) を Godunov 差分で離散化した場合には、1 個以内 (1 個もしくは 0 個) の中間状態を含むプロファイルの存在が示される。一般に $s \neq 0$ の場合、離散衝撃波プロファイルは差分の種類によらず単純な問題ではない。 s の $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ に対する比が有理数 $\frac{p}{q}$ (p と q は互いに素な整数、 $q > 0$) であれば、 $U_{i+k,*}^{n+q} = U_{i,*}^n$ なる時間的周期を有する離散的衝撃波プロファイルの存在が期待されるが一般的な証明はなされていない。

により設定する。

また、実際の数値計算では無限領域は扱えないので計算領域を設定する。計算領域を $[X_{\min}, X_{\max}] \times [Y_{\min}, Y_{\max}]$ (X_{\min}, Y_{\min} は十分小、 X_{\max}, Y_{\max} は十分大) とし、境界 $\{X_{\min}\} \times [Y_{\min}, Y_{\max}]$ と $\{X_{\max}\} \times [Y_{\min}, Y_{\max}]$ においては流束の流入又は流出量をそれぞれ U_L, U_R によって定め、境界 $[X_{\min}, X_{\max}] \times \{Y_{\min}\}$ と $[X_{\min}, X_{\max}] \times \{Y_{\max}\}$ の間では周期的境界条件を用いる。尚、衝撃波が進行する場合には、衝撃波の位置を適当に保つ為に適宜時間毎に全体の数値計算データを衝撃波の進行方向とは逆の方向にシフトさせる事も必要になる。

さて、(13) の定める初期値 $\{U_{i,j}^0\}_{i,j}$ は j に依存しない。故に離散的時間発展 (7) が厳密に計算されれば、任意の時刻ステップ n において、 $U_{i,j}^n$ は i にのみ依存し j には依存しない。即ち、カーバンクル不安定は発生し得ない。

しかし、実際の数値計算では $\Delta x, \Delta y$ 等の計算機上での表現 (丸め) による桁落ち等の誤差が生じ、各 $U_{i,j}^n$ の誤差は j に依存する。これがカーバンクル不安定のきっかけとなる事は容易に予想されるが、その急速な成長の説明には桁落ち誤差の累積は不十分であると考えられる。⁶

そこで、離散的時間発展モデル (7) に何らかの誤差増幅機構が存在すると考えられる。

Moschetta らによる静止衝撃波の解析

Moschetta ら [2] は、衝撃波速度 0 の静止衝撃波の場合の定常状態 (計算による誤差がなければ各 $U_{i,j}^n$ は n に依存しない) について前章と同様の設定を用いて解析を行った。ただ、[2] では Godunov 差分に限定せず、一般的な数値流束 \bar{F}, \bar{G} を用いる一般的な差分による離散的時間発展の式

$$U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \{ \bar{F}(U_{i,j}^n, U_{i+1,j}^n) - \bar{F}(U_{i-1,j}^n, U_{i,j}^n) \} - \frac{\Delta t}{\Delta y} \{ \bar{G}(U_{i,j}^n, U_{i,j+1}^n) - \bar{G}(U_{i,j-1}^n, U_{i,j}^n) \} \quad (7)'$$

について、導関数

$$\frac{\partial U_{i,j}^{n+1}}{\partial U_{i,j}^n}, \frac{\partial U_{i,j}^{n+1}}{\partial U_{i-1,j}^n}, \frac{\partial U_{i,j}^{n+1}}{\partial U_{i+1,j}^n}, \frac{\partial U_{i,j}^{n+1}}{\partial U_{i,j-1}^n}, \frac{\partial U_{i,j}^{n+1}}{\partial U_{i,j+1}^n}$$

の各々の値を数値微分により得ることで、巨大ベクトル $U^n = (U_{i,j}^n)_{i,j}$ と $U^{n+1} = (U_{i,j}^{n+1})_{i,j}$ (それぞ

⁶桁落ち誤差の累積は pseudo-stochastic であると考えられ、誤差の成長がそれのみによるものであれば、誤差の時間 t 又は時間発展段数 n への依存は $O(\sqrt{n})$ 程度と考えられる。しかし、実際の誤差の成長はもっと速い。

れ、 $4 \times \frac{X_{\max}-X_{\min}}{\Delta x} \times \frac{Y_{\max}-Y_{\min}}{\Delta y}$ 個の要素を有するベクトル) の間の関係を表わす Jacobi 行列 $\frac{\partial U^{n+1}}{\partial U^n}$ を数値的に得、その Jacobi 行列の定める線形写像の安定性 (線形化安定性) を議論している。⁷

[2] においては、幾つかの異なる差分近似が扱われ、カーバンクル不安定性の発生と線形化安定性が対応している事が示されている。また、経験的に知られる「カーバンクル不安定性の抑制の為に数値粘性を付加する場合、線形場に付加しなければ効果がない。また、衝撃波と平行する方向の移流計算の部分に付加する方が他の方向の移流計算の部分に付加するよりも効果が大きい」と言う事実についても検証がなされている。

完全上流性を有する進行衝撃波の解析

差分近似 (7) での誤差の増幅の議論で導関数

$$\frac{\partial U_{i,j}^{n+1}}{\partial U_{i,j}^n}, \frac{\partial U_{i,j}^{n+1}}{\partial U_{i-1,j}^n}, \frac{\partial U_{i,j}^{n+1}}{\partial U_{i+1,j}^n}, \frac{\partial U_{i,j}^{n+1}}{\partial U_{i,j-1}^n}, \frac{\partial U_{i,j}^{n+1}}{\partial U_{i,j+1}^n}$$

の値は重要な要素であり、理論的にこれらを得る方が増幅機構が理解し易いと期待される。

そこで我々は以下の仮定のもとで解析を試みた。(完全上流性) 全ての有限体積上の各時刻の状況 $U_{i,j}^n$ で、 x -方向の全ての特性速度 $u_{i,j}^n, u_{i,j}^n \pm c_{i,j}^n$ (但し、 $c_{i,j}^n = \sqrt{\frac{\gamma p_{i,j}^n}{\rho_{i,j}^n}}$) は全て正である。

数値計算では衝撃波の両側での特性速度の全てが0より十分に大である様に初期条件を取る。離散的時間発展 (7) が厳密に実行されれば、 $U_{i,j}^n = U_i^n$

⁷実際には [2] の考察は、空間方向のみ離散化した、いわゆる semi-discrete な形

$$\frac{\partial U_{i,j}(t)}{\partial t} = -\frac{1}{\Delta x} \{ \bar{F}(U_{i,j}(t), U_{i+1,j}(t)) - \bar{F}(U_{i-1,j}(t), U_{i,j}(t)) \} - \frac{1}{\Delta y} \{ \bar{G}(U_{i,j}(t), U_{i,j+1}(t)) - \bar{G}(U_{i,j-1}(t), U_{i,j}(t)) \} \quad (14)$$

に基づいている。即ち、 $4 \times \frac{X_{\max}-X_{\min}}{\Delta x} \times \frac{Y_{\max}-Y_{\min}}{\Delta y}$ 個の要素を有するベクトル $U^{\text{all}}(t) = (U_{i,j})_{i,j}$ について、

$$\frac{\partial U^{\text{all}}}{\partial t} = A U^{\text{all}} \quad (15)$$

なる行列 A を考察するが、衝撃波が静止している定常状態では

$$\frac{\partial U^{n+1}}{\partial U^n} = I + (\Delta t) A \quad (16)$$

なので、 $\frac{\partial U^{n+1}}{\partial U^n}$ の安定性を考察していると考えても実質的には同じである。違いは、係数行列の安定性の基準が固有値の実部が「1より大」か「正」かという点のみである。

となり $U_{i,j}^n$ は j に依存しない。しかし、デジタル電子計算機による実際の数値計算では誤差が生じ、

$$U_{i,j}^n = U_i^n + \Delta U_{i,j}^n \quad (17)$$

のようになる。差分 (7) による離散的時間発展で (17) を仮定して、誤差 $\{\Delta U_{i,j}^n\}_{i,j}$ が次の時刻段階の誤差 $\{\Delta U_{i,j}^{n+1}\}_{i,j}$ に伝播する様子を考察する。⁸

完全上流性の仮定が付加された場合、Godunov 差分近似の x -方向の数値流束 \bar{F}^G は

$$\bar{F}^G(U_{i,j}^n, u_{i+1,j}^n) = F(U_{i,j}^n)$$

となる。また、 $U_{i,j}^n$ が j に殆ど依存しない (数値計算で誤差が生じて初期の内はその誤差は微小である) 事から、 y -方向の数値流束 \bar{G}^G については

$$\bar{G}^G(U_{i,j}^n, U_{i,j+1}^n) = \frac{1}{2} \{ G(U_{i,j}^n) + G(U_{i,j+1}^n) \} - \frac{1}{2} \left| \frac{\partial G}{\partial U} \right| (U_{i,j+1}^n - U_{i,j}^n) + O((U_{i,j+1}^n - U_{i,j}^n)^2)$$

の関係式が利用できる。⁹

カーバンクル不安定性に特徴的な現象として、衝撃波と平行する方向 (y 軸方向) の速度 (本来は n, i, j に依存しない) の誤差の発生と増幅がある。完全上流性の仮定のもと、本来0であるべき各 $v_{i,j}^n$ に誤差が付加され0でなくなった場合には離散的時間発展 (7) において次の関係が得られる。

$$\hat{v}_{i,j}^{n+1} = \hat{v}_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{\rho_{i-1}^n}{\rho_i^{n+1}} \cdot u_{i-1}^n (\hat{v}_{i,j}^n - \hat{v}_{i-1,j}^n) - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left\{ \frac{1}{2\rho_i^{n+1}} (\hat{p}_{i,j+1}^n - \hat{p}_{i,j-1}^n) - \frac{\rho_i^n c_i^n}{\rho_i^{n+1} 2} (\hat{v}_{i,j-1}^n - 2\hat{v}_{i,j}^n + \hat{v}_{i,j+1}^n) \right\} + o(\Delta). \quad (18)$$

⁸誤差 $\{\Delta U_{i,j}^n\}_{i,j}$ についてはデジタル計算機の計算の機構による桁落ち等の原因による発生・蓄積の他に、差分式 (7) による誤差の増幅・伝播も考えられる。ここでは、差分式による誤差の増幅と伝播について観察する事を目的とした。

⁹行列 A が正則行列 P により対角化可能

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

な場合に

$$|A| = P \cdot \begin{bmatrix} |\lambda_1| & 0 & \cdots \\ 0 & |\lambda_2| & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & 0 & |\lambda_n| \end{bmatrix} \cdot P^{-1}$$

の様に定める。($|A|$ は P に依存しない)

実際の進行平面衝撃波の計算でカーバンクル不安定が発生し成長する過程においてこの関係式がほぼ成立している事が確認される。[3]

多くの観察から誤差が j (y 軸) 方向について大まかな偶奇 (Odd-Even) 性を有する ([1] において既に言及されている) 事が知られているが、

$$\Delta U_{i,j}^n = (-1)^j \cdot \Delta U_i^n \quad (19)$$

の様に偶奇性を仮定すれば (18) から

$$\hat{v}_{i,j}^{n+1} = (-1)^{i+j} \hat{v}_i^n \left\{ 1 - 2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{\rho_{i-1}^n}{\rho_i^{n+1}} u_{i-1}^n + \frac{\Delta t}{\Delta y} \frac{\rho_i^n}{\rho_i^{n+1}} c_i^n \right) \right\} + o(\Delta). \quad (20)$$

が導かれる。この関係式は、各 $v_{i,j}^n$ の誤差が一旦発生すれば、その誤差は位置的 (i 又は x 軸方向) と時間的 (n 又は t 方向) に大きく密度が変化する部分において増幅される事を示している。

関係式 (20) を利用した不安定性の抑制とその後の研究の進展

有限体積間の運動量の移流に由来する $v_{i,j}^n$ から $\hat{v}_{i,j}^{n+1}$ への本来の変化分を勘案し、関係式 (20) による“不正”な増幅を抑制する項を離散的時間発展 (7) に付加する事でカーバンクル不安定性の抑制が可能である。[4] ¹⁰ 実は、衝撃波と直交する x 軸方向の移流については y 軸方向に比べ非線形性が強く (18) の様な簡単な式で表せないが、 x 軸方向の速度 (または運動量) についてもその誤差の増幅に (18) に類似の機構がある。そして、“ $u_{i,j}^n$ の誤差の不正増幅” の観点からは $v_{i,j}^n$ の場合と同様の誤差抑制項を付加できる。(2つの誤差抑制項は x 軸と y 軸の方向性について対称的な形になる。) 実際の計算アルゴリズムでは、 x 軸方向の移流と y 軸方向の移流を同様に扱う為に $u_{i,j}^n$ と $v_{i,j}^n$ の誤差抑制項を同時に付加する。[4]

しかし、それぞれの誤差抑制項を単独で付加して更に観察を行った結果、 $u_{i,j}^n$ の誤差抑制項の働きが $v_{i,j}^n$ のものよりも強い事が明らかとなった。この事からは $u_{i,j}^n$ の“不正増幅”の機構の更なる考察が必要とされよう。

“誤差の不正増幅”の生じる場

¹⁰ 差分は保存型でなくなるが保存の喪失は非常に小さい。

圧縮性 Euler 方程式 (1) において、 x 軸 y 軸各方向の移流の特性速度は $u - c, u, u + c$ 及び $v - c, v, v + c$ (ここで c は音速であり $c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$) であり、 $u \pm c$ 及び $v \pm c$ が真性非線形性を有し他は線形退化である事が知られる。各特性速度に応じる U の固有成分を x 軸方向の特性速度に関し、

$$\begin{aligned} dU_{u-c}^{(x)} &= \hat{v}[1, u - c, v, \frac{u^2+v^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma-1} - cu], \\ dU_{u,-}^{(x)} &= \hat{v}[1, u, v - c, \frac{u^2+v^2}{2} - cv], \\ dU_{u,+}^{(x)} &= \hat{v}[1, u, v + c, \frac{u^2+v^2}{2} + cv], \\ dU_{u+c}^{(x)} &= \hat{v}[1, u + c, v, \frac{u^2+v^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma-1} + cu], \end{aligned} \quad (21)$$

y 軸方向の特性速度に関し、

$$\begin{aligned} dU_{v-c}^{(y)} &= \hat{v}[1, u, v - c, \frac{u^2+v^2}{2} - cv], \\ dU_{v,-}^{(y)} &= \hat{v}[1, u - c, v, \frac{u^2+v^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma-1} - cu], \\ dU_{v,+}^{(y)} &= \hat{v}[1, u + c, v, \frac{u^2+v^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma-1} + cu], \\ dU_{v+c}^{(y)} &= \hat{v}[1, u, v + c, \frac{u^2+v^2}{2} + cv] \end{aligned} \quad (22)$$

の様を選べる。(21)、(22) の双方について、これら各固有成分のカーバンクル不安定性への寄与を観察すると、どちらの場合でも線形退化場に対応する成分 ($dU_{u,\pm}^{(x)}$ 又は $dU_{v,\pm}^{(y)}$) の増幅が急速に起こる傾向が見られる。

3. 強い膨脹波に伴う密度の数値的不都合

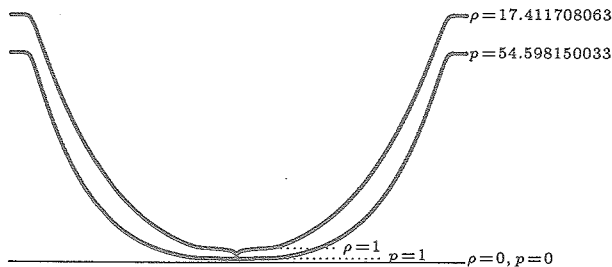
強い膨脹波が発生する場合差分による計算の過程で密度や圧力が正でなくなり数値計算に破綻を来たす現象が知られる。これは、positivity (正値性) の問題と呼ばれ、主に 1990 年代前半に盛んに議論された。([5] 等参照) しかし、当時は各スキームに依存する問題として認識され、議論においてはその回避策への関心が主であったように思われる。

実際、数値計算の破綻を起こし難い計算法が開発されており、また計算コストの故に実用でそれほど使われないが古典的かつ発想が自然である Godunov 差分においても計算の破綻は起こり難い。しかし、Riemann 問題の厳密解を利用し、各種差分近似の中でも将来の厳密解への収束に関する証明が最も期待されると言える Godunov 差分においても、数値計算の質の面からは同様の問題が生じている。

1 次元圧縮性 Euler 方程式 (状態方程式は比熱比 1.4 の理想気体を仮定) の 2 つの非線形場で共に強い膨脹を起こす以下の Riemann 問題

	左	右
密度 ρ	17.411708063	17.411708063
速度 u	-4.560084435	4.560084435
圧力 p	54.598150033	54.598150033

で Godunov 差分により数値計算を行った。有限体積数は 1200、CFL 比 0.9 で、600 時間ステップ進んだ時点の密度 ρ 、圧力 p を示す。尚、厳密解では両膨脹波間の状態は $(\rho, u, p) = (1, 0, 1)$ となる。



両膨脹波の間の定常状態において、密度に明らかな数値的 Dip (凹み) が生じている事が分かる。尚、圧力については計算結果の数値を観察してもそのような数値的現象は殆ど生じていない。また、計算が進行してもこの数値的 Dip は解消されない。収束をいわゆる $L^p (1 \leq p < \infty)$ 的に考察すれば、この Dip は場所が計算格子点数の意味で限定される為、Riemann 問題の厳密解への収束の支障になるとは考えられない。しかし、他の波との干渉が発生する問題においては、このような数値的な Dip は物理的に有り得ない波を数値的に発生させ得る為に必ずしも無視できないと考えられる。

実は、この数値的な Dip も線形退化場における現象であり、それ故に計算が進行しても持続する。実際、数値的な観察を行うと当初の膨脹波の形成過程において Riemann 問題の界面付近に生じた非物理的な密度の減少は 3 つの特性速度 $u-c, u, u+c$ のそれぞれに乗って伝播する 3 つの部分に分かれるが、 $u-c$ と $u+c$ (非線形場) により伝播する部分は数百時間ステップ進んだ段階で殆ど消えてしまう。線形退化場 u に乗った部分のみが残ってしまうのである。

4. まとめ

一般的に「非線形は線形より複雑で困難」なる認識がある。しかし移流機構の場合、真性非線形場では波は膨脹か圧縮のどちらかの作用を有し微小擾乱を消去する作用があるのに対し、線形もしくは線形退化した場ではそのような作用が働かない。このような性質は数値計算の場合にも存在する事が観察される。

強い膨脹波に伴う密度の数値的な Dip は上記の性質を端的に示すものである。またカーバンクル不安定においても、デジタル計算による桁落ち等の微少な擾乱が増幅される機構が線形化した解析

から観察されるが、その一方で非線形場に係る部分は増幅されるよりも先に消去抑制されてしまい線形場に係る部分のみが増幅される結果として不安定現象が生じるという機構の存在が予測される。

圧縮性気体の挙動の詳細部分を数値計算で考察しようとする場合、移流部分の数値計算において非線形の中の線形退化場についてのより詳細な考察が必要であると考えられる。

参考文献

- 1) J. Quirk. A contribution to the great Riemann solver debate. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 18:555-574, 1994.
- 2) J.-Ch. Robinet, J. Gressier, G. Casalis, and J.-M. Moschetta. Shock Wave Instability and Carbuncle Phenomenon: same intrinsic origin? . *J. Fluid Mechanics*, 417:237-263, 2000.
- 3) M. Abouziarov and T. Aiso, H. and. Takahashi, T. Machinery of Numerical Instability in Conservative Difference Approximations for Compressible Euler Equations. . In S. Nishibata, editor, *Mathematical Analysis in Fluid and Gas Dynamics*, pages 178-191. Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, 2003.
- 4) M. Abouziarov. On nonlinear stability analysis for finite volume schemes, plane wave instability and carbuncle phenomena explanation. In *Second International Symposium on "Finite Volumes for Complex Applications - Problems and Perspectives -" Duisburg, July 19-22, 1999*, pages 247-252. 1999.
- 5) S. Obayashi and Y. Wada. Practical Formulation of a Positively Conservative Scheme. *AIAA J.*, 32(5):1093-95, 1994.