非圧縮性流体の非定常計算手法の妥当性について

ON MATHEMATICAL VALIDITY OF UNSTEADY NUMERICAL METHODS FOR INCOMPRESSIBLE NS EQUATIONS

高橋 匡康*, 岸 恭子*, 松浦 義則†, 大春 慎之助‡

TADAYASU TAKAHASHI*, KYOKO KISHI*, YOSHINORI MATSUURA†, SHINNOSUKE OHARU‡

ABSTRACT

This article is concerned with numerical methods for incompressible Navier–Stokes equations. As an example of computational problems, we consider the two-dimensional cavity flow and discuss mathematical validity of numerical methods. Furthermore, we show some elementary results which mean the importance of resolution of vorticity, and present a procedure for generation of initial data.

1. はじめに

CFD 技術の信頼性の更なる向上を図るためには,

(1) 計算格子系

(2) 時間積分法

(3) 空間離散化手法

(4) 境界条件

(5) 初期条件

などの項目の適切性・適正を理論的及び数値的に解析することが必要不可欠である.

これらの計算手法の数学的妥当性を検証するためには, (1)〜(5) について個々に議論するだけでなく, これらの各項目が数値解に対して相互に影響を及ぼしていることを考慮し系統的に解析を進めなければならない. しかしながら, 現実には (1)〜(3) について議論される機会は多いものの, 境界条件並びに初期条件に関する議論は充分ではないため, それらの設定は数学的に厳密とはいえない.

このような背景に基づき, 本稿では非圧縮性流体に対する非定常計算手法の妥当性, 特に境界条件の数値的処理並びに初期条件の同定の数学的妥当性について考察する.

ここで述べる数学的妥当性の検証とは, 離散モデルが連続モデルに適合するかどうか, 並びに数値解の構造や挙動が連続モデルの厳密解に対して整合するかどうかなどを解析することを意味する.

*宇宙航空研究開発機構

†広島市立大学

‡中央大学

2 次元非圧縮性流体の数学モデルは, 流体が占める領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ における速度ベクトル場 $\boldsymbol{v} = (u, v)$ と圧力 P を未知の物理量とする非圧縮性ナビエ・ストークス方程式系：

$$\text{(NS)} \qquad \begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} = \dfrac{1}{\mathrm{Re}} \Delta \boldsymbol{v} - \nabla P, \\ \qquad\qquad (t > 0, \quad \boldsymbol{x} = (x, y) \in \Omega) \end{cases}$$

に, 領域 Ω の境界上で $\boldsymbol{v}$ に対して課せられる境界条件 (BC) と初期条件

$$\text{(IC)} \qquad \lim_{t \downarrow 0} \boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}_0$$

を組み合わせた系として定式化される. ここで, Re はレイノルズ数を表す.

このモデルは流体を連続体と考えて立てられているために, 流体運動の連続モデルと呼ばれ, 物理現象としての流体運動を記述するものとして確立されている. これに関する詳細については, 文献 [1] を参照されたい.

2. キャビティ問題

CFD 分野における主要な課題のひとつは, 速度の不連続性・特異性などを含む流体現象を数値的に解析することである.

本稿では，特異性を含む流体現象の典型例として，$\Gamma = \partial\Omega$ を境界とする正方形領域 $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ における２次元駆動蓋キャビティ問題 (図１参照) を考える ([2], [3], [4], [5]).

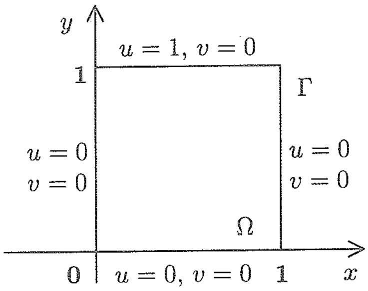

図１：２次元駆動蓋キャビティ問題

この問題は，時刻 $t = 0$ において不連続的な速度場を与えた所謂 インパルシブ・スタート (impulsive start) という特異性を含んでいる.

実際，渦度を ω とすると，$\omega = v_x - u_y$ の絶対値は v の不連続点 (左右上隅) において $+\infty$ となる．渦度場がこの様な特異性をもつ場合には，流体が占める領域 Ω 上で有限値としてのデータを対応させることができない.

このことは，特異性を含む流体現象を対象とする数値計算の困難性を示すと共に，適正な離散的初期値を与えることの重要性を意味している.

以下で述べる命題は，連続モデルの厳密解の構造及び挙動に関するものであり，数値解の厳密解への整合性を検証する上で重要な結果である.

流体現象における物理量の保存則は，流体運動の支配法則を表している．連続モデルにおける解の積分量に対して，以下の命題１に示すような不変性が成立しているとき，数値解もまた同様の特性を持つことが望ましい．すなわち，これらの不変量に対応する数値積分を評価することによって，数値計算手法の妥当性を議論することができる.

<u>命題 1.</u> $\omega = v_x - u_y$ を渦度とする．２次元駆動蓋キャビティ問題において以下の積分量保存則が成立する：

(i) $$\iint_\Omega u(t,x,y)\,dx\,dy = 0 \quad (t \geq 0)$$

(ii) $$\iint_\Omega v(t,x,y)\,dx\,dy = 0 \quad (t \geq 0)$$

(iii) $$\iint_\Omega \omega(t,x,y)\,dx\,dy = -1 \quad (t \geq 0).$$

証明. ψ を流れ関数とする．流れ関数の性質 $\psi_y = u$, $\psi_x = -v$ より ψ は Ω の境界上で一定値を取ると仮定されるから，

$$\begin{aligned}
&\iint_\Omega u(t,x,y)\,dx\,dy \\
&\quad = \int_0^1 dx \int_0^1 \psi_y(t,x,y)\,dy \\
&\quad = \int_0^1 [\psi(t,x,1) - \psi(t,x,0)]\,dx \\
&\quad = 0
\end{aligned}$$

となり，(i) が成立する．(ii) の成立も同様に示される.

また，$\omega = v_x - u_y$ に対して速度場 (u, v) に関する境界条件を用いると，

$$\begin{aligned}
&\iint_\Omega \omega(t,x,y)\,dx\,dy \\
&\quad = \int_0^1 dy \int_0^1 v_x(t,x,y)\,dx \\
&\qquad\quad - \int_0^1 dx \int_0^1 u_y(t,x,y)\,dy \\
&\quad = \int_0^1 [v(t,1,y) - v(t,0,y)]\,dy \\
&\qquad\quad - \int_0^1 [u(t,x,1) - u(t,x,0)]\,dx \\
&\quad = -1
\end{aligned}$$

が得られる. □

この命題に対する物理的解釈としては，流体の流入・流出条件がない場合の不変量 (i), (ii) は，渦の存在条件を表している．また，一般の流体運動において渦の発生・消滅は時間発展するが，(iii) で示したように渦度の積分が一定となることは，渦が定常的に存在していることを表すものである.

3. 差分近似系

本節では１節で述べた連続モデル (NS) に対する差分近似系の適切性を定式化する上で離散スキームが満たすべき数学的要件について述べ ([6])，それらを満足する離散スキームの基本形 ([3]) を紹介する.

3.1. 離散モデルの連続モデルへの適合性

離散モデルの適合性について議論する上で，射影法に関する３つの要件

① 発散作用素 $\nabla\cdot$ とラプラシアン Δ の可換性

② ヘルムホルツの分解定理

③ 圧力ポアソン方程式

及びエネルギー法に関する2つの要件

④ 数値解に対する $\mathcal{L}^2$-エネルギー式

⑤ 積分量の保存則（2節参照）

などを考慮することが必要である．

連続モデル (NS)–(IC) から離散近似モデルを構築する際には，これらの要件をより多く満足するものが望ましいが，実際にはこの①～⑤すべてを成立させることは困難である．このようなことを考慮した上で，以下では離散モデルの基本形について考察する．

3.2. 差分近似の基本形

まず初めに，物理領域 Ω を近似する計算領域 Ω_h を構成する．格子幅を x 方向，y 方向とも定数 $h = 1/N$ とし，内部格子点の集合を

$$\Omega_h^0 = \{(ih, jh) : 1 \le i,\ j \le N-1\},$$

境界格子点の集合を

$$\Gamma_h = \{(ih, jh) :\ i = 0 \text{ or } i = N \text{ or } j = 0 \text{ or } j = N\},$$

境界の外側に設けた仮想格子点の集合を

$$\Gamma_h^* = \{(ih, jh) : i = N+1 \text{ or } j = N+1\},$$

と定め，$\Omega_h = \Omega_h^0 \cup \Gamma_h \cup \Gamma_h^*$ とする．

このように直交等間隔格子系を定め，上で述べたような連続モデルへの適合性を考慮すると，次のような差分近似系を挙げることができる．時間刻み幅を $\Delta t > 0$，タイムステップを $n = 0, 1, \cdots$ とし，$1 \le i, j \le N$ に対して

（連続の式の差分近似）

$$\frac{u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n+1}}{h} + \frac{v_{i,j+1}^{n+1} - v_{i,j}^{n+1}}{h} = 0$$

（速度成分 u の差分近似）

$$\begin{aligned}
&\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n}}{\Delta t} \\
&\quad + \frac{1}{2h}\left\{\frac{u_{i+1,j}^{n+1} + u_{i,j}^{n+1}}{2}u_{i+1,j}^{n+1} - \frac{u_{i,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1}}{2}u_{i-1,j}^{n+1}\right\} \\
&\quad + \frac{1}{2h}\left\{\frac{v_{i,j+1}^{n+1} + v_{i,j}^{n+1}}{2}u_{i,j+1}^{n+1} - \frac{v_{i,j}^{n+1} + v_{i,j-1}^{n+1}}{2}u_{i,j-1}^{n+1}\right\} \\
&= \frac{1}{\mathrm{Re}}\left\{\frac{u_{i+1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{h^2}\right\} \\
&\quad - \frac{p_{i,j}^{n+1} - p_{i-1,j}^{n+1}}{h},
\end{aligned}$$

（速度成分 v の差分近似）

$$\begin{aligned}
&\frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^{n}}{\Delta t} \\
&\quad + \frac{1}{2h}\left\{\frac{u_{i+1,j}^{n+1} + u_{i,j}^{n+1}}{2}v_{i+1,j}^{n+1} - \frac{u_{i,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1}}{2}v_{i-1,j}^{n+1}\right\} \\
&\quad + \frac{1}{2h}\left\{\frac{v_{i,j+1}^{n+1} + v_{i,j}^{n+1}}{2}v_{i,j+1}^{n+1} - \frac{v_{i,j}^{n+1} + v_{i,j-1}^{n+1}}{2}v_{i,j-1}^{n+1}\right\} \\
&= \frac{1}{\mathrm{Re}}\left\{\frac{v_{i+1,j}^{n+1} - 2v_{i,j}^{n+1} + v_{i-1,j}^{n+1}}{h^2} + \frac{v_{i,j+1}^{n+1} - 2v_{i,j}^{n+1} + v_{i,j-1}^{n+1}}{h^2}\right\} \\
&\quad - \frac{p_{i,j}^{n+1} - p_{i,j-1}^{n+1}}{h}
\end{aligned}$$

（離散的境界条件）

$$\begin{aligned}
&u_{i,N} = 1, \quad v_{i,N} = 0, \\
&u_{i,0} = v_{i,0} = 0, \quad i = 0, \cdots, N, \\
&u_{0,j} = v_{0,j} = 0, \\
&u_{N,j} = v_{N,j} = 0, \quad j = 0, \cdots, N.
\end{aligned}$$

この差分近似系は A. G. Churbanov 等によって提唱されたものであり，このスキームによる2次元駆動蓋キャビティ問題に対する数値計算結果も与えられている (文献 [3])．この計算スキームの特徴は，

- 連続の式 ： 前進差分
- 圧力勾配 ： 後退差分
- ラプラス作用素 ： 5点差分
- 非線形項 ： 相加平均

という方針を採用していることである．この手法により，前節に述べた適合性の要件である①, ②, ④, ⑤ を満足することを示すことができる．

尚，この差分近似基本形を用いて離散圧力ポアソン方程式を解く場合，粘性項を5点差分で近似しているために仮想格子点上の値 $u_{N+1,j}$, $v_{i,N+1}$ が必要となることを注意する．

4. 離散的境界条件の注意点

非圧縮性流体の非定常計算においては，連続モデルの境界条件並びに初期条件に対して適切な離散近似を与えることが重要である．

ここでは，数学的妥当性を検証する立場から，速度場及び圧力ポアソン方程式の境界条件に対する注意点を述べる．

4.1. 速度場の仮想境界条件

まずはじめに, 連続の式への適合性の視点から, 離散的速度場の仮想境界条件の定め方についての考察を行う.

有限体積法を用いた数値計算を行う際, 離散モデルは仮想格子点を加えた Ω より広い近似領域 Ω_h において定義される. 一般に, このような仮想点上の離散速度ベクトルの値を定める方法として, 次のようなものが考えられる：

(a) 対称条件
$(u_{N+1,j} = u_{N-1,j},\ v_{i,N+1} = v_{i,N-1})$

(b) 線形外挿
$(u_{N+1,j} = -u_{N-1,j},\ v_{i,N+1} = -v_{i,N-1})$

(c) 境界値の代入
$(u_{N+1,j} = 0,\ v_{i,N+1} = 0)$

連続モデルとの適合性という意味では, 境界上でも連続の式が近似的に満足されることが望ましい. この観点から (a) のように対称条件を課す場合には, 連続の式は中心差分を用いて

$$(u_{N+1,j} - u_{N-1,j})/2h = 0,$$
$$(v_{i,N+1} - v_{i,N-1})/2h = 0$$

のように近似されることがわかる.

3 節で述べた差分近似の基本形においては連続の式は前進差分を用いて離散化されており, (a) の条件とは適合しないことがわかる. また, (b) のように定めた場合には一般に連続の式を近似的に満足させることは難しい. 一方, (c) の境界条件は前進差分と適合しており, 望ましい境界条件であることがわかる.

詳細については省略するが, いずれにしても連続の式を離散的に満足することは, 現実として難しい問題である.

4.2. 圧力の境界条件

次に, 以下のような圧力ポアソン方程式に対する境界条件について考察する.

ナビエ・ストークスの運動方程式に対して両辺の div を取ると, 次の圧力ポアソン方程式が得られる:

$$\Delta P = 2(u_x v_y - u_y v_x).$$

運動方程式と圧力ポアソン方程式の厳密な整合性を重視するならば, 運動方程式の差分近似 $(\mathrm{NS})_h$ に対して div （前進差分で近似）を取って得られる離散圧力ポアソン方程式を安定に解くことが必要となる. この際, 圧力に対して課す境界条件として一般に次の 2 つの形を挙げることが出来る：

(A)　(非斉次) ノイマン 条件；　$\dfrac{\partial P}{\partial n} = \dfrac{1}{\mathrm{Re}}(n \cdot \Delta v)$

(B)　(斉次) ノイマン 条件；　$\dfrac{\partial P}{\partial n} = 0.$

ここで n は法線ベクトルを表す.

次の命題は, 圧力境界条件と渦度の境界における分布との密接な関係を示している.

<u>**命題 2.**</u>　2 次元駆動蓋キャビティ問題において, 連続の式が境界上で成立していると仮定する. 境界 Γ を y 軸に平行な線分 Γ_1 と x 軸に平行な線分 Γ_2 とに分解する. このとき, 部分境界 Γ_k $(k = 1, 2)$ 上で非斉次ノイマン条件 (A) と斉次ノイマン条件 (B) が同値となるための必要十分条件は, 渦度 ω が Γ_k 上一定となることである.

証明.　境界 Γ_1 上におけるすべり無し条件 $u \equiv 0$ より,

$$u_y \equiv 0, \quad u_{yy} \equiv 0,$$

を得る. ここで, 境界において連続の式が満足されているため

$$\Delta u = u_{xx} = -\{v_y\}_x = -\{v_x\}_y.$$

いま, 渦度 $\omega = v_x - u_y$ が境界上一定であることを仮定すると, $v_x \equiv const.$, すなわち $\Delta u = 0$ が成立する. よって非斉次ノイマン条件 (A) と斉次ノイマン条件 (B) は同値となることがわかる.

一方, $\Delta u = 0$ を仮定すると, 上記の議論を逆に辿ることにより $\omega \equiv const.$ を導くことができる.

Γ_2 においても上と同様の考察により命題が得られる. □

上の命題により, 境界上渦度が一定である場合には, 圧力に対する境界条件として斉次ノイマン条件 (B) を課すことができるが, 一定で無い場合には (B) を課すことはできない.

圧力境界条件は, 速度場の仮想境界条件の与え方にも影響を受ける. 実際, 線形外挿は境界上 $\Delta v = 0$ が成立することを意味し, 斉次ノイマン条件 (B) を課すことができる問題に対する条件であり, 一般的には採用できない条件であることを注意する.

これらのことは, 物体表面上の圧力分布及び渦度分布, ひいては応力分布の数値解析の困難性を示唆している.

5. 初期データの生成法

1節で述べた(IC)の形の条件は, 初期値 v_0 は先の時刻 $t>0$ の解から定められることを示している. 従って, 初期値 v_0 は初期時刻 $t=0$ における流体現象を表すものとして正しく同定される必要がある. 本節では, このための数値解析的考案と計算手順について述べる.

実際の数値計算においては, 速度場 v に対する連続の式は必ずしも成立しないため, 射影法を用いて速度場を補正する. このような計算手法を用いることを想定した場合, 次の命題が成り立つ.

<u>命題 3.</u>　速度場 v と渦度場 $\omega = \mathrm{rot}\, v$ に対して $\Delta\phi = \mathrm{div}\, v$ となる ϕ を取るとき, $\hat{v} = v - \nabla\phi$ と $\hat{\omega} = \mathrm{rot}\, \hat{v}$ は次を満たす:

$$\mathrm{div}\, \hat{v} = 0, \qquad \hat{\omega} = \omega.$$

この命題が意味することは, 速度場は射影法によって連続の式を満足するように補正できるが, それによって渦度は変化しないということである. すなわち渦度に関しては, 初期条件が適切に定められていない限り, 射影法を適用しても補正できないことがわかる.

以下では, 渦度を重視して速度場の初期データを生成する手順, すなわち流れ関数を用いた初期データの生成法を概述する.

速度場を $v=(u,v)$, これに応じる流れ関数を ψ とし, 渦度を ω で表す. 流れ関数の性質から

$$\psi_x = -v, \quad \psi_y = u$$

であり, ψ は適当な境界条件の下でのポアソン方程式

$$\Delta\psi = u_y - v_x = -\omega$$

の解である.

これらの事実に基づき, 連続モデルにおける初期データの生成手順を述べる. $t=0$ における速度場の物理的状態と境界条件を基にし, 速度場に生じる不連続性を考慮した渦度場 ω_0 を定める. この ω_0 に対する流れ関数 ψ_0 をポアソン方程式 $\Delta\psi = -\omega$ によって求め, これより $t=0$ における速度場 v_0 を定めれば, v_0 は初期時刻 $t=0$ における流体運動を表すものとして流体力学的に適正な速度場であると考えられる.

次に, 初期データ生成のための計算手順について述べる. 計算領域 Ω_h, Γ_h, Γ_h^* は, 3節で定めたものとする.

各格子点 (ih, jh) 上の数値流れ関数の値を $\psi_{i,j}$, 数値渦度の値を $\omega_{i,j}$ で表し, 5点差分により ψ に対する離散ポアソン方程式を次の形で導入する.

$$\frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{h^2} + \frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{h^2} = -\omega_{i,j}$$

以下, ψ の Γ_h と Γ_h^* 上の境界値の定め方について述べる. まず速度場 v の Γ_h 上の値は境界値として与えられているので,

$$u_{i,j} = \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j}}{h}, \quad v_{i,j} = -\frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i,j}}{h}$$

とすると, ψ の Γ_h と Γ_h^* 上の値を次のように定めることが出来る.

$i=0,1,\cdots,N-1$ と $j=0,1,\cdots,N-1$ に対して

$$\psi_{i+1,0} = \psi_{i,0}, \qquad \psi_{i+1,N} = \psi_{i,N},$$
$$\psi_{0,j+1} = \psi_{0,j}, \qquad \psi_{N,j+1} = \psi_{N,j}$$

であるから, Γ_h 上では $\psi_{i,j} \equiv \psi_{0,0}$ は任意定数 α である. すなわち, Γ_h 上では

$$\psi_{i,j} = \alpha, \quad i,\ j = 0,1,\cdots,N.$$

また, $i=0,1,\cdots,N$ に対して

$$1 = u_{i,N} = h^{-1}(\psi_{i,N+1} - \psi_{i,N})$$

であるから, 上辺の仮想格子点 Γ_h^* 上では

$$\psi_{i,N+1} = \psi_{i,N} + h = \alpha + h$$

の値が対応している. このように速度の境界条件は流れ関数 ψ の $\Gamma_h \cup \Gamma_h^*$ 上の値分布の中に含むことができる.

この様にして, $\psi_{i,j}$ の境界値を定めて代入することにより離散ポアソン方程式を整理し, 真の未知数である $\psi_{i,j}$ に対する連立方程式を作り, これを数値的に解けばよい.

ここで, 例えば $\alpha=0$ とした場合は, ポアソン方程式をディリクレ条件の下で取り扱うことに対応し, ノイマン条件の下での解と一致することが要求されることに注意する.

第2節に述べたように, 連続の式を前進差分を用いて近似するとき, 離散的渦度場 $\omega_{i,j}$ と離散的流れ関数 $\psi_{i,j}$ に対して次のような命題が成立する. その結論は, 片側差分としての連続の式の離散化, 速度場の定義式, 渦度の離散化の合理性を示すものである.

<u>命題 4.</u>　連続の式 $\mathrm{div}\, v = 0$ の差分近似を

$$\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} + \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{h} = 0$$

のように前進差分によって定める．また，命題1 (iii) の積分量保存則に対応する離散近似式

$$h^2 \sum_{i,j} \omega_{i,j} = -1$$

を満足する (渦度) 分布 $\{\omega_{i,j}\}$ を与え，ノイマン条件下での離散ポアソン方程式の解を $\{\psi_{i,j}\}$ とする．このとき，離散速度場 $v_{i,j} = (u_{i,j}, v_{i,j})$ を

$$u_{i,j} = \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j}}{h}, \quad v_{i,j} = -\frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i,j}}{h}$$

と定義すると，離散渦度場と離散速度場との間に次の等式が成立する：

$$\omega_{i,j} = \frac{v_{i,j} - v_{i-1,j}}{h} - \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{h}.$$

証明. 離散ポアソン方程式より

$$\begin{aligned}\omega_{i,j} &= \frac{1}{h}\left(\frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i,j}}{h} - \frac{\psi_{i,j} - \psi_{i-1,j}}{h}\right) \\ &\quad + \frac{1}{h}\left(\frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j}}{h} - \frac{\psi_{i,j} - \psi_{i,j-1}}{h}\right) \\ &= \frac{v_{i,j} - v_{i-1,j}}{h} - \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{h}.\end{aligned}$$

□

最後に，$\{\psi_{i,j}\}$ が流れ関数の差分版を与えていることを注意する．格子点 $(ih, jh) \in \Omega \cup \Gamma_h$ において，$hu_{i+1,j}$ は $((i+1)h, jh)$ と $((i+1)h, (j+1)h)$ を結ぶ線分を左から右に通過する流量を表し，$-hv_{i,j}$ は (ih, jh) と $((i+1)h, jh)$ を結ぶ線分を上から下に通過する流量を表す．速度の定義式より

$$\begin{aligned}&\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i,j} \\ &\quad = (\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i+1,j}) + (\psi_{i+1,j} - \psi_{i,j}) \\ &\quad = h(u_{i+1,j} - v_{i,j}).\end{aligned}$$

同様にして，$hu_{i,j}$ は (ih, jh) と $(ih, (j+1)h)$ を結ぶ線分を左から右に通過する流量を表し，$-hv_{i,j+1}$ は $(ih, (j+1)h)$ と $((i+1)h, (j+1)h)$ を結ぶ線分を上から下に通過する流量を表しているため，速度の定義式より

$$\begin{aligned}&\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i,j} \\ &\quad = (\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i,j+1}) + (\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j}) \\ &\quad = h(u_{i,j} - v_{i,j+1})\end{aligned}$$

を得る．

このことは，$\Omega_h \cup \Gamma_h$ における任意の格子点 (ℓ, m) と (p, q) に対して $\psi_{\ell,m} - \psi_{p,q}$ は (p, q) から (ℓ, m) まで格子点を経由して結ぶ単純折れ線を左から右に通過する流量を表し，この値は前進差分を用いた連続の式の下ではその経路によらないことを意味している．従って，この意味においても片側差分が連続の式の差分形として妥当であることがわかる．

尚，上の2式は流線の方程式に対応するものである．

参考文献

[1] R. Temam, Navier-Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis, North-Holland, Amsterdam (1977).

[2] S. Abdallah, Numerical solutions for the incompressible Navier-Stokes equations in primitive variables using a non-staggered grid. II, J. Comput. Phys., **70**, 193–202 (1987).

[3] A. G. Churbanov, A. N. Pavlov and P. N. Vabishchevich, Operator-splitting methods for the incompressible Navier-Stokes equations on non-staggered grids. Part 1: First-order schemes, Int. J. Numer. Methods Fluids, **21**, 617–640 (1995).

[4] U. Ghia, K. N. Ghia and C. T. Shin, High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method, J. Comput. Phys., **48**, 387–411 (1982).

[5] J. Kim and P. Moin, Application of a Fractional-Step method to incompressible Navier-Stokes equations, J. Comput. Phys., **59**, 308–323 (1985).

[6] T. Takahashi, RANSと乱流モデルに対する数値解法の数学的問題点，宇宙航空研究開発機構特別資料 JAXA-SP-03-002, 143–147 (2003).