

# 圧縮性乱流 DNS データベースを用いた SGS モデルの評価

渡辺大輔 (広大院)\* 前川 博 (広大院)\* 松尾 裕一 (JAXA)\*\*

Performance evaluation of SGS models using DNS database of compressible turbulence

Daisuke WATANABE\*, Hiroshi MAEKAWA\* and Yuichi MATSUO\*\*

\*Graduate School of Engineering, Hiroshima University

\*\* JAXA, ITC

## ABSTRACT

DNS data of a turbulent plane jet at high Mach numbers were used to evaluate the dynamic mixed model proposed by Salvetti. This work focuses on SGS modeling in the energy equation. High correlation is found between the SGS heat flux  $q_j^L$  of modified Leonard term form and the exact SGS heat flux, but not between the SGS heat flux of Salvetti's model and the exact SGS heat flux. Therefore, an improvement is required for the calculation of the model coefficient. In the filtered energy equation, the numerical evaluation results show that the SGS turbulence diffusion term and the SGS heat flux term are dominant during the transition process, the SGS turbulence diffusion term is the most dominant first and the SGS heat flux term in the turbulent stage of the jet. The calculated correlation coefficient suggests that the pressure dilatation term correlate well with the SGS heat flux.

keywords: Compressible Flow, Jet, DNS, LES

## 1. まえがき

Yoshizawa<sup>1)</sup>によって始まる圧縮性乱流 SGS モデルは、Moin ら<sup>2)</sup>によって内部エネルギーに対するエネルギー方程式における熱流束のモデル化と残りの SGS 項を無視した定式化とダイナミックモデル (DSM) によって本格的に圧縮性ラージエディシミュレーション (LES) が始まった。その後、Zang ら<sup>3)</sup>のスケール相似則モデルを線形結合したダイナミック混合モデルを Salvetti ら<sup>4)</sup>が修正クロス項を修正レオナード項に比例すると仮定し圧縮性流れに拡張したダイナミック混合モデル (DMM) を提案した。一方、非圧縮性 LES モデルにおいて修正レオナード項の係数を 1 として、モーメント補正を考えより高い精度を得られるよう 2 パラメータ SGS 応力モデルを Horiuti<sup>5)</sup>は提案した。一方、圧縮性乱流 DNS はスペクトル法を使える範囲の一樣乱流によって SGS 項が最近評価されはじめたが、工学上は乱流ジェットなどの非一樣乱流場によって比較することが重要である。そのとき、高マッハ数の流れは物理量の急峻な勾配が存在するため、スペクトル法や中心差分型コンパクトスキームなどでは捕獲が困難になる。本研究では、風上バイアスしたコンパクトスキームを用いた乱流ジェット DNS データベースによって従来の SGS モデルを評価した。

## 2. DNS データベース

### 2.1. 支配方程式

DNS において支配方程式はデカルト座標系で記述された圧縮性ナビエ・ストークス方程式である。超音速

ジェットにおいて、Reynolds 数はジェット半値半幅  $b$ 、ジェット中心速度  $\bar{u}_{1j}$  およびジェット遠方 (自由流) の粘性係数  $\bar{\mu}_\infty$  に基づき

$$Re = \frac{\bar{\rho}_\infty \bar{u}_{1j} b}{\bar{\mu}_\infty} \quad (1)$$

代表マッハ数は

$$M = \frac{\bar{u}_{1j}}{\bar{c}_\infty} \quad (2)$$

である。

### 2.2. 計算方法

本計算ではマッハ波を伴う高マッハ数の流を安定に計算するため、空間の離散化に、Lele<sup>6)</sup>による中心コンパクトスキーム (CCS) を基にした Deng, Maekawa & Shen<sup>7)</sup>による数値散逸を含む 5 次精度散逸コンパクトスキーム (Dissipative Compact Schemes; DCS5) を用いた。

三次元時間発展 DNS の計算方法として空間微分には 5 次精度散逸コンパクトスキーム<sup>7)</sup>、時間発展に 4 次のルンゲ・クッタ法を用いた。DNS において、 $x_2$  方向に格子の伸長を行い計算領域は  $0 \leq L_{x_1} \leq 2\pi/\alpha$ 、 $-15b \leq L_{x_2} \leq 15b$ 、 $0 \leq L_{x_3} \leq 2\pi/\beta$  とした。 $\alpha$  および  $\beta$  は線形安定解析から求めた不安定モードのそれぞれ周流方向波数およびスパン方向波数である。格子数は最大  $N_{x_1} \times N_{x_2} \times N_{x_3} = 200 \times 301 \times 100$  である。 $x_1$ 、 $x_3$  方向の境界条件は周期境界条件、 $x_2$  方向の境界条件は NSCBC<sup>8)</sup> を適用した。図 1 に計算領域を示す。

計算条件はレイノルズ数  $Re = 1000$ 、マッハ数  $M = 2.4$  として計算を行った。また、初期攪乱は一樣等方的

なランダム攪乱を変動速度の実行値がジェット中心速度の2%になるように与えた。

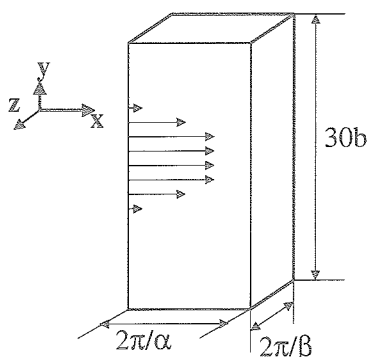


Fig. 1: Computational box

### 3. ア・プリアリテスト

これまでの我々の研究でSGS応力について調査を行ってきた。ここでは、エネルギー方程式に着目し、Salvetiのdynamic mixedモデル(DMM)<sup>4</sup>の評価、および平滑化されたエネルギー方程式における各収支項の支配性の検証を行った。

#### 3.1. 平滑化された支配方程式

平滑化されたNS方程式は以下の通りである。

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{p} \tilde{u}_i)}{\partial x_i} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial (\bar{p} \tilde{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{p} \tilde{u}_i \tilde{u}_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial \tilde{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{E}_T}{\partial t} + \frac{\partial (\tilde{E}_T \tilde{u}_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{p} \tilde{u}_j}{\partial x_j} - \frac{\partial \tilde{u}_i \tilde{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \tilde{\kappa} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} \right) = \\ \left( \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \tilde{\sigma}_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \right) - \left( p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \bar{p} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} \right) \\ - \tilde{u}_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \frac{1}{\gamma(\gamma-1)M^2} \frac{\partial q_j}{\partial x_j}, \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、 $\tilde{\cdot}$  はファールブル平均を表す。また、

$$\tilde{E}_T = \frac{\bar{p}}{(\gamma-1)} + \frac{\bar{p} \tilde{u}_i \tilde{u}_i}{2}. \quad (6)$$

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \frac{\tilde{\mu}}{Re} \left[ \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \right], \quad (7)$$

$$\tau_{ij} = \bar{\rho} (\tilde{u}_i \tilde{u}_j - \tilde{u}_i \tilde{u}_j), \quad (8)$$

$$q_j = \bar{\rho} (\tilde{u}_j \tilde{T} - \tilde{u}_j \tilde{T}), \quad (9)$$

である。

#### 3.2. 熱流束項の評価

DMMにおいて $q_j$ は次式で与えられる。

$$q_j = -\frac{\bar{\rho} \nu_t}{Pr_n} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} + h q_j^L, \quad (10)$$

ここで

$$\nu_t = C_n \bar{\Delta}^2 |\tilde{S}| \quad (11)$$

である。未知係数 $C_n$ 、 $Pr_n$ 及び $h$ は動的に決定される。(10)式中の $q_j^L$ は $q_j$ を以下の様に分解し得られる。

$$q_j = q_j^L + q_j^C + q_j^R, \quad (12)$$

ここで

$$q_j^L = \bar{\rho} (\tilde{u}_j \tilde{T} - \tilde{u}_j \tilde{T}), \quad (13)$$

$$q_j^C = \bar{\rho} (\tilde{u}'_j \tilde{T}' + \tilde{u}_j \tilde{T}' - \tilde{u}'_j \tilde{T} - \tilde{u}_j \tilde{T}'), \quad (14)$$

$$q_j^R = \bar{\rho} (\tilde{u}'_j \tilde{T}' - \tilde{u}'_j \tilde{T}'), \quad (15)$$

である。

図2に超音速平面ジェットDNSデータから求めた $q_{jDNS}$ 及び平滑化されたDNSデータを用いDMMより求めた $q_j$ 各成分のrms値を示す。計算時間に全体に渡り $q_j$ のrms値は $q_{jDNS}$ とほぼ良い一致を得ているが、ジェットが発達しエネルギーが飽和するまでの時刻( $t < 70$ )においては若干過小評価となっており、特に $x_1$ -方向成分 $q_1$ は他の成分に比べその傾向が強く現れている。また、攪乱のエネルギーが減衰している計算後半 $t > 70$ 以降では前半とは逆にやや過大評価となる結果が得られた。

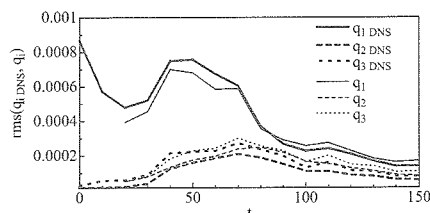


Fig. 2: Comparison of rms SGS heat flux,  $q_{jDNS}$  and calculated  $q_j$ .

次に、 $q_{jDNS}$ - $q_j$ 間の相関係数の時間変化について図3に示す。 $q_1$ および $q_3$ 成分は比較的良好な相関値が得

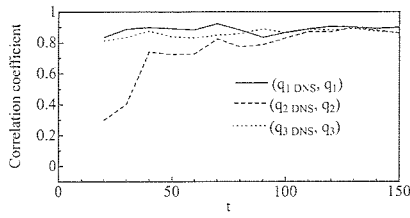


Fig. 3: Correlation coefficient between  $q_{jDNS}$  and calculated  $q_j$ .

られたが、ジェット垂直方向成分  $q_2$  については、特に計算初期 ( $t < 40$ ) において他の成分にくらべ非常に低い相関値を示す結果となった。このとき  $q_2$  の rms 値は  $q_{2DNS}$  に比べ数倍の大きさとなっている (図 2)。

続いて、DMM において SGS 熱流束ベクトル  $q_j$  のモデル化に用いられている、スケール相似則に基づく  $q_j^L$  (式 (13)) について調べた。図 4 は  $q_{jDNS}$  及び  $q_j^L$  の各成分 rms 値を示した図であり、図 5 は  $q_{jDNS}$  及び  $q_j^L$  の各成分毎の相関値を示した図である。 $q_1$  成分の rms 値は  $t = 30$  付近を境に  $q_{jDNS}$  との大きさが入れ替わっており、ジェットせん断層が急速に発達する前半では大きく、後半では小さくなっている。また全体的に数割程度の rms 値の違い認められるが、時間変化の傾向は  $q_{jDNS}$  と良い一致にある (図 4)。一方、 $q_{jDNS}$ - $q_j^L$  間の相関値の結果を見ると、全計算時間に渡りどの成分も極めて良い相関を示している (図 5)。これらの結果から、 $q_j^L$  が非常に良く SGS 熱流束ベクトル  $q_{jDNS}$  を再現できることが判る。しかし、前述の  $q_{2DNS}$ - $q_2$  間の相関値が低いことを考えると、式 (13) 中のモデル係数  $h$  の決定に関し改善の余地があることが伺える。

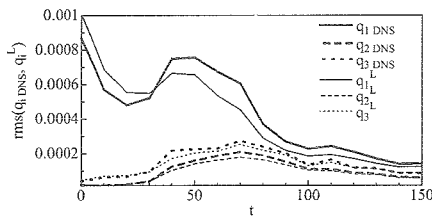


Fig. 4: Comparison of rms SGS heat flux,  $q_{jDNS}$  and  $q_j^L$ .

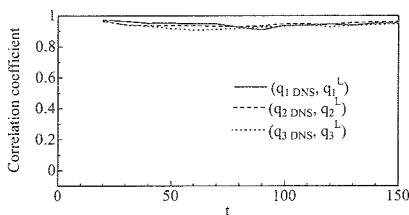


Fig. 5: Correlation coefficient between  $q_{jDNS}$  and  $q_j^L$ .

### 3.3. エネルギー方程式における各収支項の再評価

平滑化されたエネルギー方程式において、モデル化が必要とされる各収支項の再評価を行った。ここでは便宜上、平滑化されたエネルギー方程式 (5) の右辺各項をそれぞれ、第 1 項: VD 項 (SGS viscous diffusion term)、第 2 項: PD 項 (pressure dilatation term)、第 3 項: TD 項 (SGS turbulent diffusion term)、第 4 項: HF 項 (SGS heat flux term) と呼ぶ。

図 6 に、DNS により計算された格子スケールに対するエネルギー方程式 (5) 右辺各項の計算領域全体の rms 値の時間変化を示す。図より、各項のバランスは  $t = 80$  付近を境に変化していることが判る。この時刻は攪乱のエネルギーが増幅から減衰へ切り換わる時刻とほぼ一致し、 $t = 80$  付近までは TD 項が支配的であり、その後は HF 項が支配的となった。また、PD 項は、攪乱の増幅領域では支配的な TD 項の 10%程度の大きさであるが、減衰領域では TD 項とほぼ等しい大きさとなり、また支配的な HF 項の半分程度の大きさとなるため格子スケールへの寄与は無視できなくなることが判る。一方、計算された時間の範囲では、VD 項の rms 値は相対的に低い値に留まった。一樣乱流と異なり、発達する超音速ジェットにおいてはエネルギー方程式の右辺各項のバランスがジェットの発達段階で異なるため、今後モデリングの検討すべき課題となっていることが明らかになった。

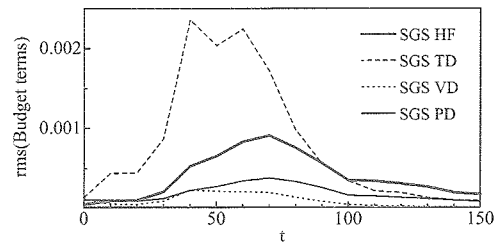


Fig. 6: Time development of the rms budget terms of the energy equations.

図 7 に、式 (5) 右辺各項の  $x_1$ - $x_3$  面 rms 値のジェット垂直方向分布の時間発達を示す。各項の rms 値はジェット速度せん断層部分に分布しており、せん断層の拡大に伴いジェット垂直方向に広がっていることが判る。TD 項と VD 項の rms 値は初期せん断層拡大時 ( $t < 70$ ) に集中的に分布しており、HF 項および PD 項の rms 値は計算時間全体に渡り分布していることが確認できる。TD 項と VD 項はほぼ同一領域に分布しており、その大きさが TD 項が非常に大きいことから、粘性拡散項を無視しエネルギー方程式を近似する手法は超音速ジェットの場合においても妥当であると考えられる。一方、HF 項と PD 項もその領域が重なっており、PD 項のモデリングはこのことを考慮し検討することが賢明であると考えられる。

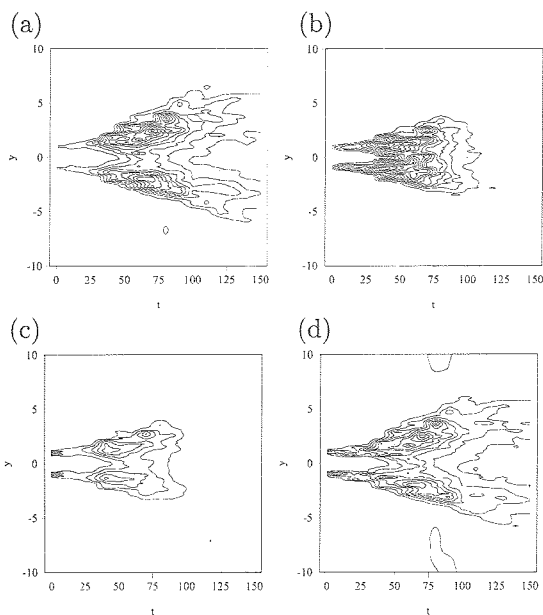


Fig. 7: Profiles of the rms budget terms of the energy equations; (a) SGS heat flux: HF, (b) SGS turbulent diffusion: TD, (c) SGS viscous diffusion: VD and (d) pressure dilatation: PD.

次に PD 項について検討を行った。PD 項を変形すると以下の様になり、

$$-\left(\overline{p \frac{\partial u_i}{\partial x_i}} - \bar{p} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i}\right) = \left(\overline{u_i \frac{\partial p}{\partial x_i}} - \bar{u}_i \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}\right) - \frac{1}{\gamma M^2} \frac{\partial q_j}{\partial x_j}, \quad (16)$$

式 (16) 右辺を式 (5) に代入すると、式 (5) 右辺は

$$\left(\overline{\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} - \bar{\sigma}_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}\right) + \left(\overline{u_i \frac{\partial p}{\partial x_i}} - \bar{u}_i \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}\right) - \bar{u}_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \frac{1}{(\gamma-1)M^2} \frac{\partial q_j}{\partial x_j}, \quad (17)$$

となる。図 8 は、式 (5) の右辺 PD 項、HF 項及び式 (17) の第 2 項、第 4 項の rms 値を示した図である。式 (17) の第 4 項の rms 値は単純に式 (5) の右辺 HF 項の rms 値の  $\gamma$  倍であるが、式 (17) の第 2 項の rms 値は式 (5) の右辺 PD 項の rms 値に対し低い値をとり、特に攪乱のエネルギーが減衰する領域 ( $t > 100$ ) では、非常に小さくなる。また、式 (17) の第 2 項及び式 (5) の右辺 PD 項の rms 値と  $\frac{\partial q_j}{\partial x_j}$  とのそれぞれの相関値を見ると、式 (5) の右辺 PD 項は  $\frac{\partial q_j}{\partial x_j}$  と高い相関を示すことが確認された (図 9)。このことは、PD 項の成分が式 (17) の第 2 項の成分に対し支配的であるといえる。以上のことを考慮すると、Mach 数への依存性に注意しなければならないが、PD 項のモデル化において PD 項は  $\frac{\partial q_j}{\partial x_j}$  に比例すると仮定することが条件の一つとして考えられる。

#### 4. まとめ

超音速平面ジェットの DNS データベースを用いたア・プリオリテストを実行し以下の事を確認した。

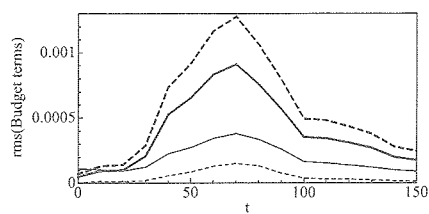


Fig. 8: Time development of the rms budget terms of the energy equations; —  $\left(\overline{p \frac{\partial u_i}{\partial x_i}} - \bar{p} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i}\right)$ , - - -  $\frac{1}{\gamma(\gamma-1)M^2} \frac{\partial q_j}{\partial x_j}$ , —  $\left(\overline{u_i \frac{\partial p}{\partial x_i}} - \bar{u}_i \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}\right)$ , ···  $\frac{1}{(\gamma-1)M^2} \frac{\partial q_j}{\partial x_j}$ .

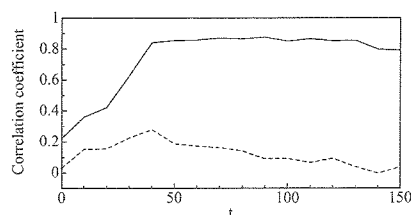


Fig. 9: Comparison of correlation coefficient — between  $\left(\overline{p \frac{\partial u_i}{\partial x_i}} - \bar{p} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i}\right)$  and  $\frac{\partial q_j}{\partial x_j}$  and - - - between  $\left(\overline{u_i \frac{\partial p}{\partial x_i}} - \bar{u}_i \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}\right)$  and  $\frac{\partial q_j}{\partial x_j}$ .

1) Salvetti の DMM による  $q_j$  と  $q_{jDNS}$  間の相関が低くまた  $q_j^L$  と  $q_{jDNS}$  間に高い相関があることから、式 (13) 中のモデル係数  $h$  の決定に関し改善の余地があると考えられる。

2) エネルギー方程式 (全エネルギーを用いる場合) において、SGS 乱流拡散項および SGS 熱流束項が支配的であるが、モデル化が必要である項の支配性は攪乱エネルギーの増減に依存する。また、VD 項は計算時間全体に渡り相対的に低い値をとることを確認した。

3) PD 項のモデル化において PD 項は  $\frac{\partial q_j}{\partial x_j}$  に比例すると仮定することが条件の一つとして考えられる。

#### 参考文献

- 1) Yoshizawa, A., *Phys. Fluids*, A 29 (1986), 2152.
- 2) Moin, P., Squires, K., Cabot, W. and Lee, S., *Phys. Fluids*, A3-11(1991), 2746.
- 3) Zang, Y., Street, R. L., and Koseff, J. R., *Phys. Fluids*, A 5 (1993), 3186.
1. Salvetti, M.V. and Banerjee, S., *Phys. Fluids*, 7 (1995), 2831.
- 4) Horiuti, K., *Phys. Fluids*, 9 (1997), 3443.
- 5) Lele, S. K., *J. Comput. Phys.* 103(1992), 16.
- 6) Deng, X., Maekawa, H. and Shen, C., *AIAA Paper*, 96-1972(1996).
- 7) Poinot, T. J. and Lele, S. K., *J. Comput. Phys.* 101(1992), p.104.