

## 静止円筒容器中で回転する2円板間流れの遷移

水島二郎, 三浦知仁 (同志社大工)

## Transitions of flow between two corotating disks in a stationary enclosure

J. Mizushima and T. Miura

Department of Mechanical Engineering, Doshisha University

## ABSTRACT

Transitions of flow between two corotating disks in a stationary enclosure are investigated numerically and experimentally. The flow is symmetric with respect to the inter-disk midplane as well as axisymmetric around the axis of rotation at small Reynolds numbers. It becomes unstable to two different modes of disturbance, one of which is an axisymmetry-breaking mode to yield a polygonal flow pattern in the radial tangential plane and the other is a symmetry-breaking instability with respect to the inter-disk midplane with retaining the axisymmetry. We analysed the symmetry-breaking mode of instability numerically assuming the axisymmetry and found that the steady axisymmetric flow is unstable not only to stationary disturbances but also to oscillatory disturbances. We obtained bifurcation diagrams of the flow for various values of gap ratio and depicted a transition diagram. Our numerical results are confirmed by experiments.

*Key Words: corotating disks, couette flow, instability, transition*

## 1 はじめに

静止外周壁に囲まれた同軸回転2円板間流れは、コンピュータのハードディスクや遠心型ポンプの基礎的なモデルとして研究されている。また、この流れは流体力学において有名なテイラー・クエット流の回転軸方向の長さが有限の場合に対応している。

この流れはハードディスク内部流れのモデルとして研究されている例が多く、たとえば Lennemann[1]は円板間流体層の水平断面の可視化を行い、コアと呼ばれる領域で流れ場が多角形パターンを示すことを確認し、2円板のフラッタ現象についても調べた。Abrahamson, Eaton and Koga[2]は、2円板間領域の縦横比(アスペクト比)が小さい場合の水平断面内の流れ場を可視化実験により調べ、流れ場が回転ハブ付近で剛体回転する内部領域と、大きな渦に支配される外部領域および静止外周壁の境界層の三つの領域に分けることができることを示した。Humphrey and Gor[3]は、鉛直断面内の流れ場について可視化実験を行い、定常な2次元軸対称流から非定常な3次元流への遷移が起こる領域を示した。

舟木, 滝澤, 平田, 矢野[4]は、外周壁が少し異なった形状の場合について、回転軸方向から見た流れ場について可視化実験を行い、回転中心部分に楕円形, 三角形, 四角形, 五角形, 六角形, および円形の6種類のコア領域が発生することを確認した。

最近では、数値シミュレーションによって軸対称流れ場について調べた例や、軸対称性の破れ、3次元流れ場を調べた例もある。Herrero, Giralt and Humphrey[5]

は、アスペクト比が小さい領域で、軸対称な2次元流から遷移する非定常な3次元流について異なる2種類のものが存在することを確認し、Randriamampianina *et al.*[6]はアスペクト比が比較的大きい場合に、軸対称流れ場でピッチフォーク分岐とホップ分岐が生じることを示した。

これまでの研究において流れ場の構造に関して調べられた例は数多くあるが、詳細な流れパターンの遷移は明らかになっていない。本研究では、軸対称な流れ場について、アスペクト比およびレイノルズ数を無次元パラメータとして平衡解の分岐とその安定性を調べる。また、水平断面内の可視化実験を行い、多角形パターンの発生領域を調べる。

## 2 定式化

静止外周壁に囲まれた2円板間の流れを考える(図1)。2円板の半径は $r_2 - \delta r$ であり、角速度 $\Omega$ で半径 $r_1$ の内円筒と共に回転している。静止外周壁と2円板の間隔 $\delta r$ の大きさは理論的には無視するが、実験においては2円板が滑らかに回転するために、有限の値をもつ。円板間隔を $s$ とし、アスペクト比を $\Gamma = s/(r_2 - r_1)$ と定義する。代表速度を $r_2\Omega$ 、代表長さを $d = (r_2 - r_1)$ とし、レイノルズ数を $Re = r_2\Omega d/\nu$ と定義する。ここで、 $\nu$ は動粘性係数である。また、半径比 $\eta$ を $\eta = r_1/r_2$ と定義する。

非圧縮性流体を仮定し、流れ場は軸対称とする。円筒座標系において、ストークスの流れ関数 $\psi$ とスカラー

関数  $\phi$  を導入し、速度  $\mathbf{u} = (u, v, w)$  を、

$$u = \frac{1}{r_\beta} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = -\frac{1}{r_\beta} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad v = \frac{\phi}{r_\beta},$$

$$r_\beta = r + r_1/d \quad (1)$$

と表す。式(1)を用いると、連続の式およびナビエ・ストークス方程式は無次元形で、

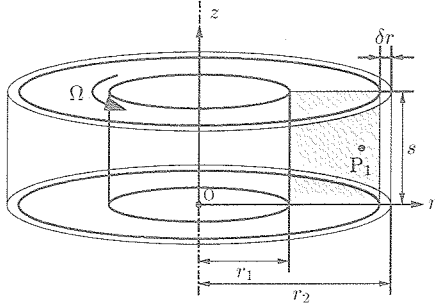


図 1: 座標系.

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{\omega}{r_\beta^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{1}{r_\beta} J(\psi, \omega) - \frac{2}{r_\beta^3} \phi \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

$$= \frac{1}{Re} D^2 \omega - \frac{\omega}{r_\beta^2} + 2(1-\eta) \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad \omega \equiv \frac{1}{r_\beta} D^2 \psi, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{r_\beta} J(\psi, \phi) = \frac{1}{Re} D^2 \phi - 2(1-\eta) \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (3)$$

と書くことができる。ここで、

$$D^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r_\beta} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$$J(f, g) \equiv \frac{\partial(f, g)}{\partial(r, z)} = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial r}$$

である。

関数  $\psi$  と  $\phi$  の境界条件は、全壁面上 ( $r = 0, 1; z = 0, \Gamma$ ) で  $\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\partial \psi}{\partial z} = \psi = 0$ , 2円板表面と内円筒壁上 ( $r = 0; z = 0, 1$ ) で  $\phi = 0$ , 静止外円筒壁上 ( $r = 1$ ) で  $\phi = -(1 + \beta)$  である。

### 3 数値計算法

2円板間流れについて、数値シミュレーション、定常解の直接計算および線形安定性解析を行った。定常解の直接計算では、式(2)と(3)で時間項を0とおいた式について、定常解  $(\bar{\psi}, \bar{\phi})$  を境界条件を満たすように修正されたチェビシェフ多項式を用いて展開する。コロケーション法を用い、ニュートン・ラフソン法により数値的に解く。線形安定性解析では、流れ関数  $\psi$  および周方向速度成分  $\phi$  を定常解と攪乱の和 ( $\psi = \bar{\psi} + \tilde{\psi}, \phi = \bar{\phi} + \tilde{\phi}$ ) で表し、式(2)と(3)に代入し線形化することにより、線形攪乱方程式が得られる。攪乱の時間依存性を複素線形増幅率  $\lambda$  を用いて、 $\psi = \tilde{\psi} e^{\lambda t}, \phi = \tilde{\phi} e^{\lambda t}$  と仮定する。これらを線形攪乱方程式に代入し、チェビシェフ・

コロケーション法を用いれば  $\lambda$  を固有値とする  $\tilde{\psi}$  と  $\tilde{\phi}$  に関する固有値問題に帰着される。この固有値問題をQR法を用いて解く。

数値シミュレーションにおいては、空間微分を4次精度の中心差分で近似し、時間積分はオイラー法を用いる。ポアソン方程式はSOR法によって解く。

## 4 可視化実験

鉛直断面内および水平断面内の流れ場の可視化実験を行った。本実験において、静止外周壁の半径および2円板半径はそれぞれ200mmと198mmとした。内円筒半径を50mmとし、 $\eta = 0.25$  の場合について、 $0.1 < \Gamma < 0.6$ ,  $1.0 \times 10^3 < Re < 1.8 \times 10^5$  の範囲で実験を行った。作動流体には空気 ( $20^\circ\text{C}$ ,  $\nu = 15.12 \times 10^{-6}$ ), 可視化には線香の煙を用いた。鉛直断面内の流れ場を可視化する場合は、流体層に対して垂直にスリット光を照射し、紙面に対して垂直な方向からデジタルビデオカメラで撮影した。水平断面内の流れ場を可視化する場合は、流体層に対して水平にスリット光を照射し、鉛直下方からデジタルビデオカメラで撮影した。

## 5 結果および考察

### 5.1 可視化実験と数値計算結果の比較

可視化実験を行い、数値計算結果との比較を行った。図2に可視化実験と数値計算から得られた流れ場を示す。図2(a)と2(b)はレイノルズ数  $Re = 1600$  のときの流れ場で、この流れ場は2円板間を中心線に対して上下対称である。 $Re = 2200$  になると、図2(c)と2(d)に示すように、 $Re = 1600$  のときとは異なり、上下非対称な流れ場となる。これらの図から可視化実験と数値計算結果は非常に良く一致することがわかる。

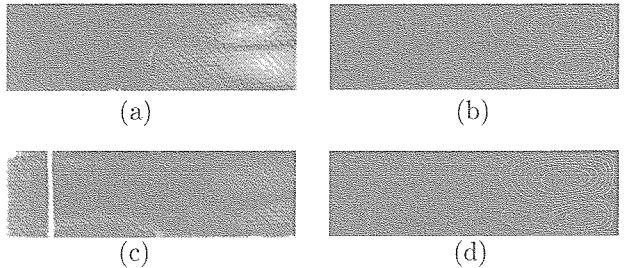


図 2: 流れ場。アスペクト比  $\Gamma = 0.3$ , 半径比  $\eta = 0.25$ . (a) 可視化写真 ( $Re = 1600$ ), (b) 数値計算 ( $Re = 1600$ ), (c) 可視化写真 ( $Re = 2200$ ), (d) 数値計算 ( $Re = 2200$ ).

### 5.2 平衡解とその安定性

2円板間流れについて平衡解を求め、その安定性を調べた。全ての計算において半径比  $\eta = 0.5$  とした。非線形平衡解を特徴づける代表物理量として、位置  $(r, z) = (4/5, 1/2\Gamma)$  における  $z$  方向速度  $w_1$  を用いる。

#### 5.2.1 アスペクト比が比較的小さい場合

アスペクト比  $\Gamma = 0.6$  の場合には、平衡解の分岐ダイアグラムが図3のように求められた。この図で、横軸

はレイノルズ数  $Re$ ，縦軸は代表物理量  $w_1$  である．解の分枝 AD 上の点 M および PC 上の点 N に対応する流れ場をそれぞれ図 4(a) と 4(b) に示す．図 3 に示されるように， $\Gamma = 0.6$  では超臨界ピッチフォーク分岐が生じている．図 3 の分枝 AD 上の平衡解は図 4(a) のような  $(r, z)$  平面内の中心線に関して上下対称な 2 個のセルで形成される定常な流れである．中心線に関して上部のセルでは流れの向きは時計回りであり，下部のセルでは反時計回りである．PC 上の平衡解は図 4(b) のような上下非対称な 2 個のセルで形成される定常な流れである．線形安定性解析から  $Re_P = 966.1$  と求められた．

他のアスペクト比についても平衡解の分岐とその安定性について調べた結果， $\Gamma = 0.3 - 0.68$  では  $\Gamma = 0.6$  の場合と同様に，超臨界ピッチフォーク分岐が生じ，流れは上下対称な定常流から上下非対称な定常流へ遷移することがわかった．

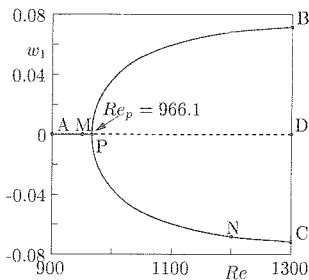


図 3: 分岐ダイアグラム．アスペクト比  $\Gamma = 0.6$ ，半径比  $\eta = 0.5$ ．実線：安定な定常解．破線：不安定な定常解．

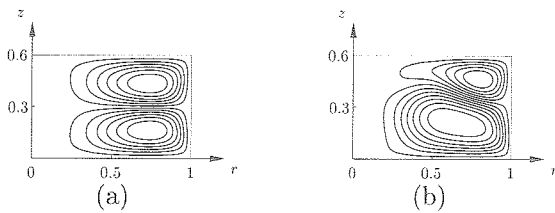


図 4: 流れ場．アスペクト比  $\Gamma = 0.6$ ，半径比  $\eta = 0.5$ ．(a)  $Re = 959$ ，(b)  $Re = 1200$ ．

### 5.2.2 アスペクト比が比較的大きい場合

アスペクト比がもう少し大きい場合についても平衡解を求め，その安定性を調べた．図 5(a) - (d) に  $\Gamma = 0.69 - 0.694$  における平衡解の分岐ダイアグラムを示す． $\Gamma = 0.69$  の場合，図 5(a) に示されるように，レイノルズ数  $Re$  が増加すると点 S において亜臨界ピッチフォーク分岐が生じ，点 T では超臨界ピッチフォーク分岐が起こる．さらに，点 U では線形安定性解析よりホップ分岐が起こることが示唆される．したがって， $\Gamma = 0.69$  では亜臨界ピッチフォーク分岐，超臨界ピッチフォーク分岐，ホップ分岐の順番で起こる．

図 5(b) は  $\Gamma = 0.693$  の場合の平衡解の分岐ダイアグラムである．このときの解の分岐構造は  $\Gamma = 0.69$  の場合と同様であるが， $\Gamma$  が増加すると亜臨界ピッチフォーク分岐点と超臨界ピッチフォーク分岐点近づいて行く．図 5(c) に  $\Gamma = 0.694$  の場合の平衡解の分岐ダイア

グラムを示す． $\Gamma = 0.694$  の場合は， $\Gamma = 0.69 - 0.693$  の場合と異なり，曲線 BQD と曲線 CRE で表されるサドル・ノード分岐が現れる．点 U ではホップ分岐が起こり，ホップ分岐が対称定常解からの第一番目の分岐となる． $\Gamma = 0.7$  および  $0.71$  についても平衡解の分岐構造その安定性を調べた結果， $\Gamma = 0.694$  の場合と同様な解の分岐を起こすことがわかった． $\Gamma = 0.69 - 0.71$  において，線形安定性解析からホップ分岐が起こることが示唆されるが，数値シミュレーションで周期解を得ることはできなかった．

アスペクト比  $\Gamma = 0.72$  の場合は，図 5(d) に示されるように， $\Gamma = 0.69 - 0.71$  の場合と異なり，ホップ分岐がサドルノード分岐より低いレイノルズ数で生じる．すなわち  $Re_U < Re_{Q(R)}$  となる．この場合においては，数値シミュレーションから周期解が得られた．図 5(d) に示される曲線 HUG はホップ分岐により遷移した振動解の分枝 (ブランチ) である．

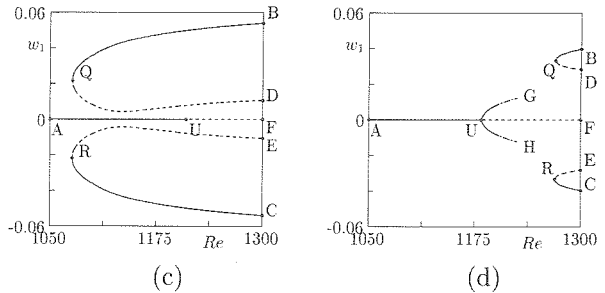
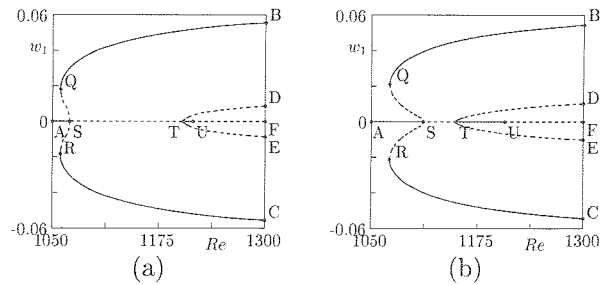


図 5: 分岐ダイアグラム．半径比  $\eta = 0.5$ ．(a) アスペクト比  $\Gamma = 0.69$ ，(b)  $\Gamma = 0.693$ ，(c)  $\Gamma = 0.694$ ，(d)  $\Gamma = 0.72$ ．実線：安定な定常解および安定な非定常解．破線：不安定な定常解．一点鎖線：本結果からの予測．

### 5.3 遷移図

アスペクト比  $\Gamma = 0.3 - 0.6$  における遷移図をまとめると図 6 のようになる．図 6(a) では，結果の比較を行うために，Randriamampianina *et al.*[6] が数値シミュレーションによって求めた  $Re_P$  を  $\times$  で示した．図 6(b) は 6(a) の四角で囲った部分を拡大したものである．図 6(a) と 6(b) の  $\bullet$ ， $\blacksquare$ ， $\blacktriangle$  はそれぞれ，超臨界および亜臨界ピッチフォーク分岐点，転回点，ホップ分岐点を示している．今回得られた結果を Randriamampianina *et al.*[6] の結果と比較すると， $Re_P$  の値は異なるが，アスペクト比  $\Gamma$  が増加すると  $Re_P$  の値が小さくなるという意味で定性的には一致している．

図 6(a) と 6(b) について，P 領域で流れは上下対称な

定常流である。Q 領域では、流れは上下非対称な定常流である。R<sub>1</sub> 領域では亜臨界ピッチフォーク分岐で示されるようなヒステリシスが起る。R および R<sub>1</sub> 領域では異なる流れパターンの複数の定常解が存在する。S 領域では上下非対称な定常流および軸対称周期流が現れる。T は軸対称振動流のみが起る領域であり、図 6(b) 中に示される臨界アスペクト比  $\Gamma_c \sim 0.712$  以上で現れる。

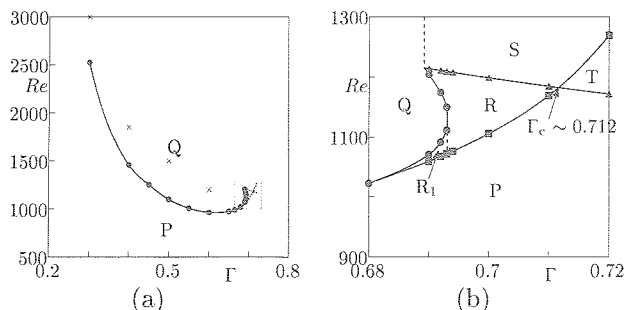


図 6: 遷移ダイアグラム. (b): (a) 中の四角部分の拡大図. ×: Randriamampianina *et al.*[6], ●: 本研究の線形安定性解析による結果 (ピッチフォーク分岐点), ■: 本研究の線形安定性解析による結果 (転回点), ▲: 本研究の線形安定性解析による結果 (ホップ分岐点).

### 5.4 水平断面の可視化実験

水平断面内流れ場の可視化実験 ( $\eta = 0.25$ ) を行った. 図 7 に  $\Gamma = 0.3$  の場合の代表的な流れパターンを示す.  $Re = 151600$  の場合は図 7(a) のように楕円形のパターンをしている. このパターンを mode 2 と呼ぶことにする. 図中の白色部分は可視化に用いた線香の煙であり、楕円形を形成する黒色部分には線香の煙はほとんど存在しない. すなわち、楕円形領域の内部と外部では物質の交換はほとんど行われていない. また、黒色の楕円形部分は 2 円板の回転速度とほぼ同じ回転速度で回転している. 本研究では、図 7 (b) - (e) に示すように、楕円形パターン以外にも三角形 (mode 3,  $Re = 76600$ ), 四角形 (mode 4,  $Re = 49900$ ), 五角形 (mode 5,  $Re = 39300$ ) および六角形 (mode 6,  $Re = 31600$ ) の流れパターンも確認された.

広範囲のアスペクト比およびレイノルズ数について、各流れパターンの発生領域を調べ、図 8 のような領域図を得た. 図中の灰色の領域は定常な流れパターンが確認できた領域である. 隣接するモード間に存在する白色の領域では、定常な流れパターンが確認できなかった. また、図 8 から、アスペクト比が大きくレイノルズ数が高い領域では低次のモードが現れ、アスペクト比が小さくレイノルズ数が低い領域では高次のモードが現れることがわかる.

### 6 まとめ

静止円筒容器中で回転する 2 円板間流れについて、数値計算および可視化実験を行った結果次の結論を得た. (1) アスペクト比  $\Gamma$  が比較的小さい場合 ( $\Gamma = 0.3 - 0.68$ ) は、レイノルズ数  $Re$  が大きくなると超臨界ピッチ

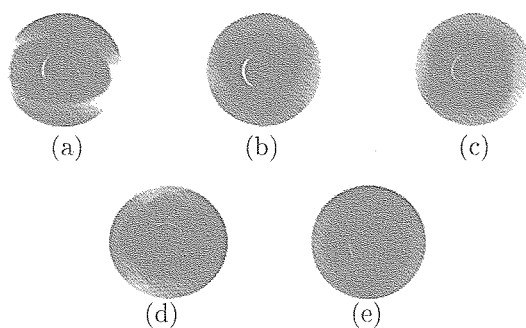


図 7: 可視化写真 (水平断面).  $\Gamma = 0.3$ . (a) mode 2 ( $Re=151600$ ), (b) mode 3 ( $Re=76600$ ), (c) mode 4 ( $Re=49900$ ), (d) mode 5 ( $Re=39100$ ), (e) mode 6 ( $Re=31600$ ).

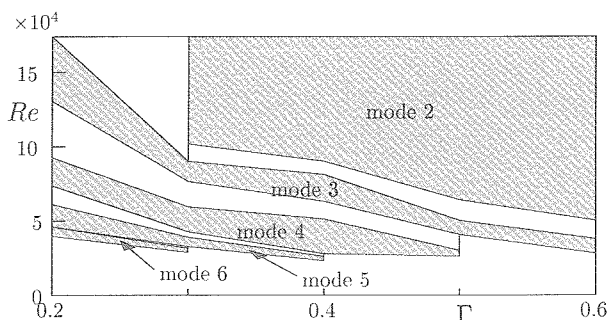


図 8: 流れのパターン領域図.

チフォーク分岐が生じ、定常流から定常流への遷移が起る.

- (2) アスペクト比  $\Gamma$  が比較的大きい場合 ( $\Gamma = 0.69 - 0.71$ ) は、ヒステリシスが起る領域や複数の定常流が安定な領域が存在し、周期流の存在が示唆される.
- (3) 臨界アスペクト比  $\Gamma_c$  を超えると、周期流のみが安定な領域が現れる.
- (4) 流れ場の水平断面内可視化実験により楕円形、三角形、四角形、五角形、六角形の 5 種類の流れパターンを確認した.
- (5) アスペクト比  $\Gamma$  とレイノルズ数  $Re$  がともに大きくなると、より低次のパターンが現れ、アスペクト比  $\Gamma$  とレイノルズ数  $Re$  がともに小さくなると、より高次のパターンが現れる.

### 参考文献

- [1] E. Lennemann, IBM J. Res. Develop., 480-488 (1974).
- [2] S. D. Abrahamson, J. K. Eaton and D. J. Koga, *Phys. Fluids* A1, 241-251(1989).
- [3] J. A. C. Humphrey and D. Gor, *Phys. Fluids*. A5, 2438-2442(1993).
- [4] 舟木 治郎, 滝澤 敬次, 平田 勝哉, 矢野 秀雄, 日本機械学会論文集 B61, 2924-2929(1995).
- [5] J. Herrero and F. Giralt, *Phys. Fluids* 11, 88-96(1999).
- [6] A. Randriamampianina, R. Schiestel and M. Wilson, *J. Fluid Mech.* 434, 39-64(2001).