連続モデルに由来しない離散モデルの不安定性 (カーバンクル不安定性)
Carbuncale Instability, which does not Come from the Original Continuous Model.

相曽秀昭(AISO, Hideaki) アブジアロフ, ムスタファ(ABOUZIAROV, Moustafa) 高橋匡康(TAKAHASHI, Tadayasu) [1]

We are concerned with the Carbuncle phenomenon, one of the well known instability phenomena that happen in numerical computations for the compressible Euler equations. This pehnomenon is often discussed from the viewpoint how to eliminate or reduce the instability. But the discussion on the phenomenon itself has not yet been done enough.

We here try to discuss the reason why the instability occurs, especially the machinery of growth of instability. The analysis gives an approximate formula that explains the growth of carbuncle instability in the case of Godunov method. We also give some numerical experiments showing that the formula has a good coincidence with the growth of real carbuncle phenomenon in a computation for progressing planar shock wave.

1. はじめに

衝撃波を含む圧縮性流体現象の数値計算において衝撃波の周辺で発生する (数値的) 不安定現象は一般的にカーバンクル現象と呼ばれている。おそらくは数値計算で衝撃波の捕獲が可能になった時点から観察されていたと考えられるが、この現象を数値計算手法特有の問題として認識し学術文献において言及したのは、Quirk[1] が初めてであり、「カーバンクル」なる命名が一般的になったのもこの文献以来である。[1] 以前には単なる計算誤差等による一過性の不都合として見過ごされていた訳である。

いくつかの文献がこのカーバンクル現象を取り扱っているが、多くの文献において主な論点は「カーバンクル現象を生じるという数値計算法 (差分法) の欠点を如何に取り除き改善するかか?」である。そのため、カーバンクル現象の発生機構事態の解析はその改善法の導出議論に含まれてしまい、現象の発生機構そのものについて十分な議論が尽くされていないように思われる。カーバンクル現象の発生機構について種々の計算法を比較しながら議論したものとしては Moschetta らの [2] があげられるが、ここでも不安定性自体の発生については十分に議論し尽くされてはいない。(しかしながら、文献 [2] は圧縮性流体の差分計算法の視点からカーバンクル現象に関する議論の状況を知るには最良の文献であると思われる。)

カーバンクル現象は主に密度の急勾配に由来する不安定性であると考えられ、平面衝撃波の伝播の計算や超音速流中の鈍頭物体の前面に発生する弓状衝撃波の計算に伴う例が良く知られ、多くの例から次のような事実が知られている。

1. 1 次元計算では発生しない。平面衝撃波の伝播は 1 次元 “的” 現象ではあるが、それを 2 次元又は 3 次元で計算しなければ発生しない。
2. 格子方向の一つ又は二つが衝撃波面にほぼ平行になっている場合に発生する。
3. 平面衝撃波は通常の直交格子で計算されるが、その空間格子間隔 (いわゆる Δx や Δy) が桁落ちを起こさないデータ (例えば、厳密に 1.0E0、

* 航空宇宙技術研究所 CFD 技術開発センター, CFD Research Center, National Aerospace Laboratory JAPAN, (E-mail : aiso@nal.go.jp, takahasi@nal.go.jp)

極端な場合としては整数型としての“1”等)の場合、カーバンクル現象は生じない。(但し、そのような場合でも数値的な境界条件の取扱いによって桁落ち誤差等と同様の誤差を生じた場合にはカーバンクル現象が生じ得る。)

4. 一旦発生し成長が始まると、その成長の速さは指数関数的である様に見える。

5. 数値粘性により不安定性の発生を抑制することが可能である。特に、衝撃波と平行な方向の計算に数値粘性の効果が大きい。

また、過去のカーバンクル現象に関する発表では、[2] が最も包括的にかつ詳細な数値実験・観察例をもって論じているのではないかと思われる。

これらの観察から、いくつかの仮説が成り立つ。3からは、この現象のきっかけは計算機誤差(桁落ち誤差等デジタル型計算機における数値量子化に伴う誤差)によるものであろう事が予想される。しかしながら、その後の誤差の成長を含めた現象を計算機誤差の蓄積のみで説明しようとすれば、上記の4が反証となるように思われる。計算機誤差の擬似ストカスティックな性質から類推すればその時間的成長は時刻の2分の1乗程度のオーダーとなると考えられ、急速な成長を説明できないからである。そこで、不安定性の成長に関しては、単なる計算機誤差以外に、数値計算のアルゴリズムに内在する原因を探る必要があると思われる。

ここでは、有限体積概念に基づく保存型差分アルゴリズムの中にカーバンクル現象を誘起する本質的な機構が内在する事を論じる。

議論は次のように進められる。

- カーバンクル現象を引き起こす最初の誤差は桁落ち誤差等によると考えられるが、ここではその最初の誤差の発生については議論しない。そのかわり、平面状衝撃波の伝播の数値計算(現象は1次元的であるが、数値計算は2次元で行う)において微小な誤差が発生したと仮定し、その誤差が数値計算のアルゴリズム(ここではGodunovスキーム)によりどのように伝播するかを論じる。

- 誤差の伝播については、それが十分に微小であるとの前提である種の線形化を用いる。その議論を進めて、離散的時間発展における誤差の伝播公式を得る

- しかしながら、元来のGodunovスキームは非線形な関数であり、上述の誤差伝播公式には線形化に起因する現実からの乖離が伴う。この乖離が大きくはなく誤差伝播公式がカーバンクル不安定性の成長機構を記述するに妥当なものである事を示すため、現実の数値計算におけるカーバンクル不安定性の例において誤差伝播公式の成立の度合を数値的に検証する。

- 導出された誤差伝播公式に基づく誤差増幅抑制項の抑制やその他の事項について考察を行う。

2. 解析対象となる数値計算問題の設定

前述の様にカーバンクル現象の発生例として良く知られる数値計算対象は、平面衝撃波の伝播と超音速流中に置かれた鈍頭物体前の弓状衝撃波である。ここでは、解析から複雑さを排除するため、直交格子を用いる平面衝撃波の伝播の数値計算を対象とする。また対象となる気体は理想気体とする。

xy-直交座標系を有する平面内で、y-軸に平行な平面衝撃波がx-軸方向に進行する状況を想定する。流れはx-軸に平行であるとする。即ち、密度 $\rho=\rho(x,y,t)$,x-軸方向速度成分 $u=(x,y,t)$, y-軸方向速度成分 $v=v(x,y,t)$, 圧力 $p=p(x,y,t)$ は Euler 方程式

$$U_t+F_x+G_y=0$$

$$\text{但し,}U=\begin{bmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ e\end{bmatrix},\ F=\begin{bmatrix}\rho u\\ \rho u^2+p\\ \rho uv\\ u(e+p)\end{bmatrix},$$

$$G=\begin{bmatrix}\rho v\\ \rho uv\\ \rho v^2+p\\ v(e+p)\end{bmatrix},\ e=\frac{p}{\gamma-1}+\frac{1}{2}\rho(u^2+v^2)\quad(\gamma\text{は比熱比})\tag{1}$$

を満たす次の様な解になっている。

$$\rho=\begin{cases}\rho_L, & x<st\\ \rho_R, & x>st,\end{cases}\quad u=\begin{cases}u_L, & x<st\\ u_R, & x>st,\end{cases}$$
$$v=0,\ p=\begin{cases}p_L, & x<st\\ p_R, & x>st,\end{cases}\tag{2}$$

ここで、sは衝撃波のx-軸方向への進行速度であ

り、次のRankine-Hugoniot 条件を満たすとする。

$$\rho_R u_R - \rho_L u_L = s(\rho_R - \rho_L)$$
$$\rho_R(u_R)^2 - \rho_L(u_L)^2 = s(\rho_R u_R - \rho_L u_L)$$
$$u_R\left(\frac{\gamma p_R}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\rho_R(u_R)^2\right) - u_L\left(\frac{\gamma p_L}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\rho_L(u_L)^2\right)$$
$$= s\left[\left(\frac{p_R}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\rho_R(u_R)^2\right) - \left(\frac{p_L}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\rho_L(u_L)^2\right)\right]. \tag{3}$$

また、差分式の扱いの簡潔化のために、衝撃波の両側で超音速流であると仮定する。(しかし、衝撃波に対して相対的には、左右どちらか一方が超音速で他方が亜音速となる) 即ち、

$$u_L > \left(\frac{\gamma p_L}{\rho_L}\right)^{\frac{1}{2}},\ u_R > \left(\frac{\gamma p_R}{\rho_R}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4}$$

数値計算を行うための離散化は有限体積法による。即ち、xy-平面を合同な直方体の有限体積$I_{i,j} = ((i-\frac{1}{2})\Delta x, (i-\frac{1}{2})\Delta x) \times ((j-\frac{1}{2})\Delta y, (j+\frac{1}{2})\Delta y)(i,j$ は整数) に分割し、時刻t_nにおける有限体積$I_{i,j}$での密度ρ, 運動量の各方向成分ρu,ρv, エネルギーe からなる保存量ベクトル$U^n_{i,j} = \begin{bmatrix} \rho^n_{i,j} \\ \rho^n_{i,j}u^n_{i,j} \\ \rho^n_{i,j}v^n_{i,j} \\ e^n_{i,j} \end{bmatrix}$ について、その時間発展を

$$U^{n+1}_{i,j} = U^n_{i,j} - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left\{\bar{F}^n_{i+\frac{1}{2},j} - \bar{F}^n_{i-\frac{1}{2},j}\right\} - \frac{\Delta t}{\Delta y}\left\{\bar{G}^n_{i,j+\frac{1}{2}} - \bar{F}^n_{i,j-\frac{1}{2}}\right\} \tag{5}$$

によって行う。ここで各$\bar{F}^n_{i+\frac{1}{2},j}$, $\bar{G}^n_{i,j+\frac{1}{2}}$ は数値流束と呼ばれ、それぞれ、$I_{i,j}$と $I_{i+1,j}$の接触部 $C_{i+\frac{1}{2},j} = \{(i+\frac{1}{2})\Delta x\} \times ((j-\frac{1}{2})\Delta y, (j+\frac{1}{2})\Delta y)$ 又は$I_{i,j}$と $I_{i,j+1}$の接触部$C_{i,j+\frac{1}{2}} = ((i-\frac{1}{2})\Delta x, (i-\frac{1}{2})\Delta x) \times \{(j+\frac{1}{2})\Delta x\}$ を時刻t^nからt^{n+1}の間に通過する流束

$$F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(e+p) \end{bmatrix} \text{ 又は } G = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(e+p) \end{bmatrix}$$

の平均量の評価である。

ここで用いられるGodunov 法の場合、これらの数値流束の決定を次のように行う。

$\bar{F}^n_{i+\frac{1}{2},j}$については、$C_{i+\frac{1}{2},j}$で隣接する有限体積$I_{i,j}$と$I_{i+1,j}$から自然に定まる$U = U(x,t), -\infty < x < \infty, 0 < t < \infty$ についてのRiemann 問題

$$\begin{cases} U_t + F_x = 0 \\ U(x,0) = \begin{cases} U^n_{i,j}, & x < 0 \\ U^n_{i+1,j}, & x > 0. \end{cases} \end{cases} \tag{6}$$

の厳密解 $U = U(x/t; U^n_{i,j}, U^n_{i+1,j})$ から$\bar{U}^n_{i+\frac{1}{2},j} = U(0; U^n_{i,j}, U^n_{i+1,j})$ で定められた$\bar{U}^n_{i+\frac{1}{2},j}$により

$$\bar{F}^n_{i+\frac{1}{2},j} = F(\bar{U}^n_{i+\frac{1}{2},j}) \tag{7}$$

で定める。

$\bar{G}^n_{i+\frac{1}{2},j}$についても同様に $C_{i,j+\frac{1}{2}}$で隣接する有限体積 $I_{i,j}$と $I_{i,j+1}$で自然に定まる $U = U(y,t), -\infty < y < \infty, 0 < t < \infty$ についてのRiemann 問題

$$\begin{cases} U_t + G_y = 0 \\ U(y,0) = \begin{cases} U^n_{i,j}, & y < 0 \\ U^n_{i+1,j}, & y > 0. \end{cases} \end{cases} \tag{8}$$

の厳密解 $U = U(y/t; U^n_{i,j}, U^n_{i+1,j})$ から$\bar{U}^n_{i,j+\frac{1}{2}} = U(0; U^n_{i,j}, U^n_{i+1,j})$ で定められた$\bar{U}^n_{i,j+\frac{1}{2}}$

$$\bar{G}^n_{i,j+\frac{1}{2}} = G(\bar{U}^n_{i,j+\frac{1}{2}}) \tag{9}$$

で定める。

なお、数値計算の初期条件の設定は、ここでは数値計算がある程度進行した状態で安定な進行衝撃波が数値的に形成されれば目的に合致する訳で、それほど重要ではない。例えば、

$$U^0_{i,j} = \begin{cases} U_L = [\rho_L, \rho_L u_L, 0, \frac{p_L}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\rho(u_L)^2]^t, i \geq 0 \\ U_R = [\rho_R, \rho_R u_R, 0, \frac{p_R}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\rho(u_R)^2]^t i < 0 \end{cases} \tag{10}$$

すればよい。

以上で、解析対象の離散モデル (数値計算) が設定された。

3. 誤差の伝播の解析

前章で定められた離散モデルは本来は1次元的なので、数値計算結果において$U^n_{i,j}$はiとnにのみ依存しjには依存しないはずであり、特にy-方向の速度成分である$v^n_{i,j}$の値は常に0のはずである。しかし、実際の数値計算では桁落ち等による誤差の発生から数値計算結果が1次元性を失い2次元性が生じる事がある。特にカーバンクル現象では$v^n_{i,j}$が0でなくなり、物理的にはあり得ないy-方向の速度成分が発生している。そこで、本来$v^n_{i,j} = 0$であるべき各$v^n_{i,j}$に微小誤差が加わり、$v^n_{i,j} = 0 + \Delta v^n_{i,j}$となった場合、その誤差が次の時間ステップ$t^{n+1}$の各有限体積での$v$の計算値$\{v^{n+1}_{i,j}\}_{i,j}$にどのように影響 (伝播) するかについて考える。そのために

は、時刻 $t=t^n$における各有限体積での y-方向速度成分 vの数値流束への影響を考察すればよい。

解析のため、次の状況を仮定する。

- 各物理量には1次元的な状況に十分に小さい誤差が加わっている。

$$\begin{cases} \rho_{i,j}^n = \rho_i^n + \Delta\rho_{i,j}^n \\ u_{i,j}^n = u_i^n + \Delta u_{i,j}^n \\ v_{i,j}^n = 0 + \Delta v_{i,j}^n \\ p_{i,j}^n = p_i^n + \Delta p_{i,j}^n \end{cases} \tag{11}$$

$(\Delta\rho_{i,j}^n, \Delta u_{i,j}^n, \Delta v_{i,j}^n, \Delta p_{i,j}^n$は十分小)

ここで、$\rho_i^n, u_i^n, v_i^n, p_i^n$は本来のアルゴリズム(1次元的)から得られるべき有限体積 $I_{i,j}$(jは整数) の時刻 t^nにおける値である。(11) はその1次元的な値の分布に2次元的な誤差が付加された事を意味する。

- 各 u_i^nは (4) の状況に対応し、十分に大きい。

$\bar{F}_{i+\frac{1}{2}}^n$へ誤差の影響は次の様に考察される。Riemann 問題 (6) の解において全ての特性速度 $(u, u\pm c)$ は至る所で正であるので、

$$\bar{U}_{i+\frac{1}{2},j}^n = U_{i,j}^n \tag{12}$$

となり (Riemann 問題 (6) の完全上流性)、

$$\bar{F}_{i+\frac{1}{2},j}^n = F(U_{i,j}^n) \tag{13}$$

が得られる。

次に $G_{i,j+\frac{1}{2}}^n$については、Riemann 問題 (8) の初期値の左右の差が微小であることから線形化近似が可能である。簡単の為に変数を保存変数 Uから原始変数 $V=[\rho,u,v,p]^t$に変換し、

$$V_t + AV_x = 0,\ \text{但し、} A = \begin{bmatrix} v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & \gamma p & 0 \end{bmatrix} \tag{14}$$

なる線形化を行い、Vと Uの関係を表す Jacobi 行列

$$\frac{\partial U}{\partial V} = Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ u & \rho & 0 & 0 \\ v & 0 & \rho & 0 \\ \frac{u^2+v^2}{2} & \rho u & \rho v & \frac{1}{\gamma} \end{bmatrix}$$

を用いれば、線形の場合には Godunov 法は通常の特性曲線別上流差分となることから、係数行列 Aの対角化 $\Lambda = P^{-1}AP$ で得られた対角行列 Λの対角要素の絶対値をとった行列 $|\Lambda|$ から $|A| = P|\Lambda|P^{-1}$ を定め、

$$\begin{aligned} &\bar{G}_{i,j+\frac{1}{2}}^n - \bar{G}_{i,j-\frac{1}{2}}^n \\ &\quad = Q\left[\tfrac{1}{2}(A+|A|)(V_{i,j}^n - V_{i,j-1}^n)\right. \\ &\qquad \left. + \tfrac{1}{2}(A-|A|)(V_{i,j+1}^n - V_{i,j}^n)\right] \end{aligned} \tag{15}$$

の様な線形近似を得る。

以上から、次の結果を得る。

$$\begin{aligned} &v_{i,j}^{n+1} \\ &= v_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\frac{\rho_{i-1,j}^n}{\rho_{i,j}^{n+1}} u_{i-1,j}^n (v_{i-1,j}^n - v_{i,j}^n) \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta y}\left\{ \frac{\rho_{i,j}^n}{\rho_{i,j}^{n+1}} c_{i,j}^n \frac{u_{i,j-1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j+1}^n}{2} \right. \\ &\qquad \left. + \frac{p_{i,j-1}^n - p_{i,j+1}^n}{\rho_{i,j}^{n+1}} \right\} \\ &\quad + o(v). \end{aligned} \tag{16}$$

ここで、物理量が滑らかな分布を示す場合には $\frac{\rho_{i,j}^n}{\rho_{i,j}^{n+1}}$ や $\frac{\rho_{i-1,j}^n}{\rho_{i,j}^{n+1}}$ がほぼ1に近い値であるのに対し、衝撃波の数値計算等の場合で物理量が大きな時間的・位置的変化を示す場合には1より大きくなって誤差が増幅される場合が生じることである。これは、特に $v_{i,j}^n = \Delta v(-1)^{i+j}$のような形で、誤差が計算点に対し交互に符号を変化させているような場合には顕著となり得る。([1] において、カーバンクル現象には一般に誤差の "odd-even property" が観察されるとしている事にも関連する。)

4. 数値的な検証

さて、前章で得られた式は線形近似等の近似を経て得られたものである。しかしながら、実際の圧縮性 Euler 方程式の数値計算は非線形アルゴリズムによってなされる。そこで、どの程度現実の数値計算におけるカーバンクル現象での誤差成長を説明できるかについて数値的な検証を行いたい。

先ず、Godunov 法を用いて表1のような条件で衝撃波を生成し衝撃波の伝播を計算した。境界条件は通常の滑り条件と反射条件による。カーバンクル現象が出現しやすいよう単精度計算を行っている。(倍精度計算の場合、そのままではカーバンクル現象は出現しないが、微小な誤差を付加した場合にはそれが増幅され時間ステップを数百経た後にはカーバンクル現象が出現する。これについては、また別の機会に論じる。) 計算格子の大

きさ(有限体積の個数)はx-方向(衝撃波進行方向)が400でy-方向が20の400×20である。

$\Delta x = \Delta y = .125$とし、時間刻みについては最大の特性速度に関しCFL係数が0.6となるように設定した。図2に時刻$t = 1, 5, 7, 10$における密度勾配の様子を示す。$t = 5$からカーバンクル不安定性が出現し、$t = 7, 10$については顕著である。図3で$t = 7, 10$の場合の密度、x-方向速度、y-方向速度を示している。図4はx-方向で見た密度分布であるが、衝撃波はほぼ20点程度の中に収まり、衝撃波の幅はその状態でほぼ安定している。

この数値計算において、公式(16)の妥当性を検証するため、$t = 1, 5, 7, 10$の各時刻において、その時刻における計算値を用いて

$$
\begin{aligned}
&v_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\frac{\rho_{i-1,j}^n}{\rho_{i,j}^{n+1}} u_{i-1,j}^n (v_{i-1,j}^n - v_{i,j}^n) \\
&-\frac{\Delta t}{\Delta y}\left\{ \frac{\rho_{i,j}^n}{\rho_{i,j}^{n+1}} c_{i,j}^n \frac{u_{i,j-1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j+1}^n}{2} \right. \\
&\left. + \frac{p_{i,j-1}^n - p_{i,j+1}^n}{\rho_{i,j}^{n+1}} \right\} \\
&+o(v).
\end{aligned}
$$

を計算し、その次の時間刻みにおける$v_{i,j}$の値即ち$v_{i,j}^{n+1}$との相対誤差を比較した。

この相対誤差を$t = 1, 3, 5, 7$の各場合について表示したのが、表5から8である。カーバンクル現象の発現の場所に対応して、x-方向には衝撃波の幅に相当する20個、y方向には全ての20個をとっている。表では縦方向がx-方向であり、左端列が有限体積のx-方向での番号を示している。左端列以外の整数値が相対誤差の表示であるが、例えば、3は相対誤差が3パーセント以上4パーセント未満であることを表し、-5は相対誤差が負の方向に5パーセント以上6パーセント未満であることを表す。

カーバンクル現象がかなり発達した$t = 10$であっても相対誤差は概ねプラスマイナス10パーセント程度の範囲内に収まっており、我々の公式が近似公式ではあっても、概ねカーバンクル現象の成長のメカニズムを明らかにしていると考えられる。なお、15パーセントを超える大きな誤差が散見されるが、これは、該当個所において我々が公式を導く際に仮定した条件(特にy-方向に線形化が可能なほどに変化が小さい)が失われていることによるものであろうと考えられる。

5. まとめ

本論ではカーバンクル現象の成長の機構を説明する為の公式を線形近似等を用いて理論的に導き、その近似公式が非線形的なアルゴリズムで行われる実際の数値計算での誤差成長をもかなりの精度で説明し得ることを示した。

ただ、ここでは、(4)のように流れが(計算格子に対し)全ての場所で超音速である、との限定された状況のもとでの議論であるため、これをより一般的に議論し得る枠組みを構築することも今後の課題である。

また、公式(16)を利用し、誤差増幅分を取り除く項をGodunov法に加えて計算するとカーバンクル不安定性の発生を抑制し得る事は既にいくつかの数値計算によって確かめられているが、この抑制法はカーバンクルの発生個所とその方向(衝撃波の方向)等が事前に分からないと使えないという問題点があるので、この抑制法の改良も将来の課題である。

なお、この抑制法は「流れが全ての場所で超音速」と言う過程から導かれた結論を利用しているにもかかわらず、衝撃波通過後に亜音速になるような場合(例えば鈍等物体周りの弓状衝撃波の計算)にも効果的であることは興味深い。この事実からは、(4)の仮定が成り立たない場合でもカーバンクル不安定性の基本的な機構はそれほど変わらないのではないかとも推論し得る。

参考文献

1) J. Quirk. A contribution to the great Riemann solver debate. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 18:555–574, 1994.

2) J.-Ch. Robinet, J. Gressier, G. Casalis, and J.-M. Moschetta. Shock Wave Instability and Carbuncle Phenomenon: same intrinsic origin? . *J. Fluid Mechanics*, 417:237–263, 2000.

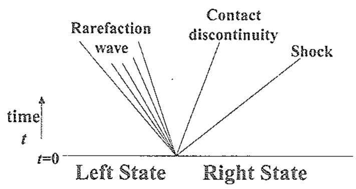
表1

Numerical Computation

Riemann Problem (Ideal Gas, adiabatic const.=1.4)

Initial Value

	Left	Right
Density	1.0	1.0
Velocity u	1.0	1.0
Pressure	1000	0.01



Profile of Shock wave

	Left	Right
Density	5.999	1.0
Velocity u	20.60	1.0
Pressure	460.9	0. 01

図2

Growth of the Carbuncle

Density Contours

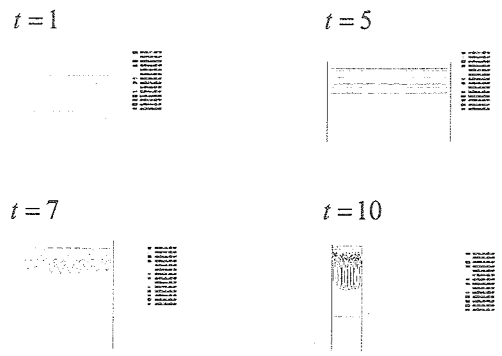


図3

From left, Density, Velocity u, Velocity v

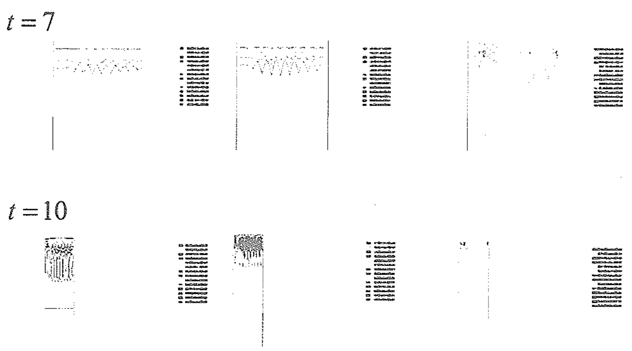


図4

Profile of shock wave

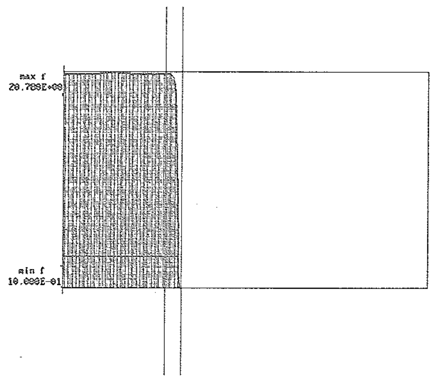


表5

t=1 (49 step) Vr/Vz= 10**(-6)/10

295	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
296	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
297	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
298	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
299	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0
300	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-3	4	0	0	0	0	0	0
301	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-3	0	0	0	0	0
302	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
303	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
304	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
305	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
306	0	0	0	0	0	-23	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
307	0	0	0	0	-3	0	0	0	0	0	0	0	8	0	0	0	0	0	0	0
308	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-6	0	0	0	0	0	0	0
309	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
310	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	12	0	0	0	0	0	0	0	0	0
311	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
312	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
313	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
314	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

表6

t=5 (240 step) Vr/Vz= 10**(-3)/10

224	0	0	0	0	0	0	0	0	-9	0	0	0	0	0	-4	0	0	0	0	0
225	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0
226	0	0	0	0	0	0	0	0	-4	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0
227	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
228	0	-1	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	-2	0	0	0
229	0	0	0	0	0	0	0	0	-3	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0
230	0	0	0	0	0	0	6	0	-1	0	-1	0	0	0	-1	1	-3	0	0	0
231	0	0	0	0	0	0	0	0	-4	0	0	0	0	0	2	-1	1	1	0	0
232	0	3	0	0	0	0	0	0	17	-1	0	0	0	0	0	0	4	-4	0	-1
233	0	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	6	0	-9	0	1	-1
234	-2	2	-1	0	0	0	6	1	0	-3	0	2	-1	0	-2	-1	8	0	0	-1
235	0	-1	-1	1	0	0	9	1	0	0	2	1	-1	1	-3	-10	0	0	0	1
236	3	6	-1	0	-1	0	-2	-3	0	2	0	-1	0	1	-3	-1	0	0	4	0
237	-1	-3	6	-4	2	0	-8	4	0	-8	0	-1	0	-7	0	1	0	-2	-5	9
238	13	0	-6	3	0	0	-10	0	0	-7	0	1	1	0	0	0	0	7	-4	0
239	0	-3	-3	7	-2	-8	0	0	0	2	0	0	3	0	0	0	0	-1	0	-8
240	0	5	-3	-1	-4	0	0	0	0	0	0	-5	4	0	0	0	0	7	2	0
241	0	0	0	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	-7	0	0	0	0	0	7	0
242	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0
243	0	0	0	-9	0	0	0	0	0	0	0	0	-9	0	0	0	0	0	0	0

表7

t=7 (335 step) Vr/Vz= 10**(-2)/10

177	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
178	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
179	0	0	0	-1	-2	-4	-6	-5	0	-5	1	5	2	4	5	3	0	3	1	0
180	-1	3	0	-5	-11	-9	-7	-9	2	-9	0	9	15	8	51	8	25	8	9	3
181	0	1	0	-2	-3	-4	15	-4	11	-3	-13	4	-12	4	-13	4	-10	3	4	1
182	0	0	0	0	1	-1	5	-2	4	0	-5	1	-11	1	-3	2	-3	1	0	0
183	0	0	-1	0	-9	0	-1	0	0	0	0	0	37	0	0	0	0	0	2	0
184	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	7	0	0	0	0	0	-1	0	0	-7	0
185	0	0	0	0	2	0	0	0	0	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	-7	0
186	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	-2	0
187	0	0	0	0	8	0	0	0	0	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	-1	0
188	0	0	0	0	2	0	0	0	0	1	0	0	-13	0	0	0	0	0	0	0
189	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	-5	0	-1	0	0	0	0	0	0	0
190	0	0	0	0	0	0	0	16	0	0	0	0	0	0	-19	0	0	0	0	0
191	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
192	0	0	0	0	0	16	0	0	0	0	0	-16	0	-1	0	0	0	0	0	0
193	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	-1	0	0
194	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
195	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
196	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

表8

t=10 (489 step) Vr/Vz= 1/10

117	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
118	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
119	-3	0	4	-7	0	-13	0	-14	0	-14	0	14	0	14	0	-15	0	13	0	11
120	-12	0	14	-7	4	-10	6	-10	7	-9	-7	9	-8	10	-6	-7	-3	10	-5	10
121	-6	4	0	-2	11	-4	13	-5	11	-3	-15	3	-13	3	-10	13	-6	5	-17	4
122	-1	11	-49	0	8	-2	7	-2	5	-2	-41	1	-6	1	-5	4	-4	3	-11	0
123	0	2	-4	0	2	-1	2	-1	2	-1	2	0	-2	0	-1	1	-2	1	-2	0
124	0	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
125	2	-1	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	-1	21	0	0	0	0	0	8	-5
126	3	-3	0	-6	-1	1	-19	0	-5	0	0	0	1	-1	17	0	159	8	0	0
127	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
128	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
129	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
130	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
131	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
132	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
133	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
134	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
135	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-14	0	0	0	0	0	-1	0
136	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	-8	0