

“しわ”と“接触”を考慮したゴム膜と流体連成系の振動解析

山下泰典(都立科技大院), 渡辺直行(都立科技大)

Vibration Analysis of Coupled Fluid/Rubberlike Membrane Systems Including Wrinkling and Contact Effects

Yasunori Yamashita and Naoyuki Watanabe(TMIT)

Key Words: Coupled Problem, Membrane Wrinkling, Contact-Impact, ALEFEM

Abstract

Coupled Fluid/Rubberlike Membrane Systems is widely applied in various fields because of its economical and structural advantages. In this study, the FEM analysis of the systems is performed in order to understand its characteristics. In the analysis, geometrically and materially nonlinearity of the membrane and large deformation of moving boundary are taken into consideration. Moreover, in order to construct more practically model, the dynamic analysis including membrane wrinkling and contact its outside rigid tank is performed. Thus it is found that the dynamic characteristic of coupled Fluid/Rubberlike Membrane Systems is strongly affected by wrinkling and contact.

1. 序論

ゴム膜と流体からなるシステムは、その構造的および経済的な利点により様々な分野で用いられている。航空宇宙分野では3軸制御衛星のブラダ型燃料タンクが代表的であり、その他にも数多くの適用例が存在するが、その静的および動的特性は正確には推定できていない。我々は、これまでゴム膜の材料非線形性・大変形および構造/流体境界の大変形の影響を考慮した解析を行い、この系の時間領域および周波数領域における特性を調べてきた[1]。しかし、ゴム膜の圧縮剛性はたいへん小さいため、圧縮応力が働くとすぐに“しわ”が発生する。またゴム膜は容易に大変形を生じるため、近接する構造物との“接触”問題も考慮する必要がある。また膜/流体連成問題に“しわ”および“接触”を考慮した研究はこれまで行われていない。

そこで本研究では、ゴム膜/流体連成問題に適用できる“しわ”および“接触”アルゴリズムを構築し、それらを有限要素法に適用して時刻歴応答解析を行った。さらに“しわ”および“接触”がこのシステムの動特性に与える影響について調べるために、①しわ無:接触無、②しわ有:接触無、③しわ有:接触有の3パターンで比較し、検討を行った。

2. 解析モデル

図1に本研究で用いる解析モデルを示す。本研究のモデルとしては3軸制御衛星のブラダ型燃料タンクを考えた。剛体と仮定した外部円筒タンクの上面にゴム膜の袋(ブラダ)が逆さに吊るされ、その中に水を入れることにより膜を膨らませる。この状態は人工衛星の設置状況から十分考えられるモデルである。またこのモデルは実際には3次元モデルであるが、軸対称の変形のみを考え、2次元解析を行うものとする。

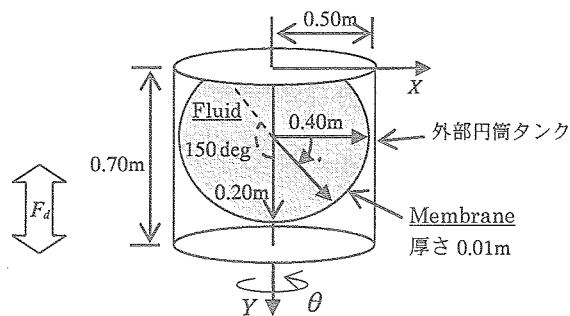


図1 モデル図

2-1. ゴム膜

ゴム膜の材料非線形性には次式のような Ogden の歪みエネルギー関数を用い、有限変形理論により大変形を考慮した。

$$W(\lambda_a) = \sum_r \frac{\mu_r}{\alpha_r} [\lambda_1^{\alpha_r} + \lambda_2^{\alpha_r} + \lambda_3^{\alpha_r} - 3]$$

ここで、 λ_a は主方向への伸び率であり μ_r 、 α_r は実験データより定められる材料定数である。本研究では以下の値を用いた。

表1 Ogden の歪みエネルギー関数パラメータ

r	α_r	$\mu_r (Kg/m^2)$
1	1.3	62994.7
2	5.0	126.7
3	-2.0	-1001.3

2-2. 構造/流体連成問題

内部の流体は水と仮定し、非圧縮、非粘性のポテンシャル流とした。構造と流体の連成系の支配方程式は次の通りである。

- ① $\nabla \cdot \nabla \phi = 0 \quad \text{in } \Omega_f$
- ② $\int_{\Omega_f} \rho_f d\Omega = \rho_f V \quad \text{in } \Omega_f$
- ③ $\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}_s + \pi_f \mathbf{n}_f - p_m \mathbf{n}_s = 0 \quad \text{on } \Gamma_{fs}$
- ④ $\dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}_f = \nabla \phi \cdot \mathbf{n}_f \quad \text{on } \Gamma_{fs}$
- ⑤ $\rho_m \ddot{\mathbf{u}} - \rho_m \mathbf{F}_s - \nabla \mathbf{t} = 0 \quad \text{in } \Omega_s$

これらの式はそれぞれ①連続の式、②全質量保存の式、③構造/流体境界でのつりあい式を表す力学的境界条件、④構造/流体境界での速度一致を表す幾何学的境界条件、⑤構造領域内での平衡方程式である。ここで ϕ 、 ρ_f 、 ρ_m 、 p_m 、 \mathbf{u} 、 \mathbf{F}_s 、 \mathbf{T} 、 \mathbf{t} はそれぞれ、速度ポテンシャル、流体密度、膜密度、内圧、膜変位ベクトル、構造体に働く重力加速度・推進励振加速度による外力、コーシーの応力テンソル、基準座標方向に働く物体の内力である。また V 、 \mathbf{n}_s 、 \mathbf{n}_f はそれぞれ規定する流体の体積、構造表面の法線ベクトル、自由表面の法線ベクトルである。 Ω_f 、 Ω_s 、 Γ_{fs} 、 ∇ はそれぞれ流体領域、構造領域、流体/構造の連成境界領域、構造領域ハミルトンの演算子である。また π_f は次式で表される。

$$\pi_f = \frac{1}{2} \rho_f (\nabla \phi)^2 + \rho_f F_f + \rho_f \dot{\phi}$$

ここで F_f は流体に働く重力加速度・推進励振加速度による外力である。

2-3. ALE 法

連続体を解析する際、一般に二つの表記法が用いられる。すなわち Lagrange 法と Euler 法である。前者は初期配置における物体点の位置を独立変数として用い、固体・構造の解析に多用される。この座標系では、有限要素法において物体の変形と共にメッシュも変形する。一方、後者は現配置における物体点の位置を独立変数とし、流体領域の記述に広く適用されている。この場合、有限要素メッシュは空間に固定される。しかし、構造/流体連成問題では一つの連成系に対し、これら二つの表記法が併用されることが多い。従って境界面、すなわち二つの座標系が重複する箇所での厳密な取り扱いが困難となる。ALE 法は上の二つの表記法を一般化したものであり、ユーザーの定義した任意の基準配置を独立変数に使うことができる。このため構造/流体境界の取り扱いが容易になる。そこで構造/流体境界の大変形の影響を考慮するために、流体領域の定式化には ALE(Arbitrary Lagrangian-Eulerian)FEM を適用する。ALE 法を用いた定式化の際、次のような式を導入する。

$$f_{,t}[z] = grad(f) \cdot \hat{\mathbf{v}} + f_{,t}[y]$$

ここで f 、 $f_{,t}[z]$ 、 $f_{,t}[y]$ 、 $\hat{\mathbf{v}}$ はそれぞれ任意の物理量、ALE 座標系における同一のメッシュポイントに関する時微分、Euler 座標系において同一の空間点に関する時間微分、メッシュの移動速度である。

また、構造/流体連成問題に ALE 有限要素法を採用した場合、流体領域の Mesh の変形を制御するためにメッシュの制御式が必要になってくる。本研究では、流体領域を擬似弾性体として扱う “Pseudo-Elastostatic Medium Method” を採用し、自動制御を可能とした。これは流体領域を弾性体として解き、要素の弾性定数を変化させることにより、メッシュの歪をコントロールするという方法である。流体領域 Mesh の制御則として次式を用いた。

$$\delta \hat{\mathbf{u}}^T \int_{\Omega_f} \mathbf{S}_p \cdot \delta \mathbf{E}_p d\Omega_f = 0$$

これは流体を擬似弾性体とみなしたときの弱形式化された支配方程式であり、 $\hat{\mathbf{u}}$ 、 \mathbf{S}_p 、 \mathbf{E}_p はそれぞれメッシュの変位ベクトル、見かけの Second Piola-Kirchhoff 応力、見かけのグリーン・ラグランジェ歪である。

2-4. 膜“しわ”解析

“しわ”の判定方法は幾つか存在するが、本研究では最も一般的である、Roddeманの方法を採用する。Roddeманの判定方法は主コーシー応力 $\bar{\sigma}_a$ 、主歪み \bar{E}_a を用いるものであり、 $\bar{\sigma}_1 > \bar{\sigma}_2$ および $\bar{E}_1 > \bar{E}_2$ の関係の下で次のように表すことができる。

- ① $\bar{\sigma}_2 > 0$ (引張状態: Taut State)
- ② $\bar{E}_1 \leq 0$ (たるみ状態: Slack State)
- ③ その他 (“しわ”状態: Wrinkling State)

①、②、③はそれぞれ膜面上のある点において、①全ての方向に引張力が作用している状態(しわが発生しない状態)、②全ての方向に引張りが生じていない状態(1、2軸方向にしわが発生する状態)、③Taut状態でもSlack状態でもなく、単軸引張の状態(しわが発生する状態)である。

さらにゴム膜に発生するしわの影響を考慮するために、張力場理論のRoddeманの変形勾配テンソルを用いた[2]。これより、膜変形後の平均的な“しわ”の形状のグリーン・ラグランジェ歪を $\tilde{\mathbf{E}}$ とすると、“しわ”を伸ばした形状のグリーン・ラグランジェ歪 $\tilde{\mathbf{E}}$ は次式で表される。

$$\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{E} + \frac{1}{2} \beta (2 + \beta) \mathbf{w} \otimes \mathbf{w}$$

ここで β 、 \mathbf{w} は図2に示すようにそれぞれ、“しわ”の伸び率、“しわ”の方向ベクトルである。

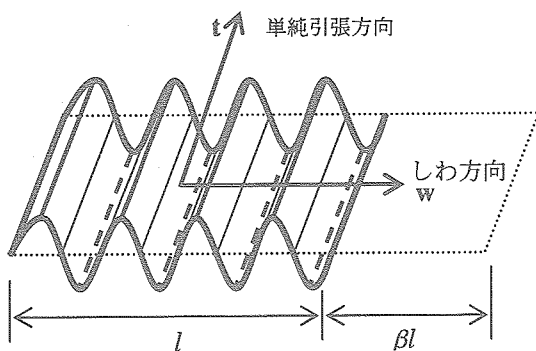


図2 “しわ”、“擬似”、“伸縮”膜面

2-5. 接触解析

外部タンクとの接触問題には最も広く用いられている node-segment 型の接触アルゴリズム[3]を適用する。これは図3のように連続的な接触を物体1(ゴム膜)の節点と、物体2(剛性タンク)の要素上を下ろした垂線の足の点との間の接触に置き換える方法である。物体 i の接触表面に作用する接触力を p_{cn}^i 、また物体2に対する物体1の貫通量を \bar{g} とすると、接触境界上に置ける力学的および幾何学的制約条件は次式で与えられる。

$$p_{cn}^i \leq 0$$

$$\bar{g} = 0$$

また動的接触アルゴリズムとして改良型 Newmark-B 法[4]を用いた。Newmark-B 法とは、時間微分項が存在する支配方程式に対する最も一般的な逐次時間積分法である。Newmark-B 法では、現在の変位と速度が現在の加速度を用いて次式のように表される。

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t \mathbf{v}_n + \frac{(\Delta t)^2}{2} \cdot \{(1 - 2\beta_N) \mathbf{a}_n + 2\beta_N \mathbf{a}_{n+1}\}$$

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \Delta t \{(1 - \gamma_N) \mathbf{a}_n + \gamma_N \mathbf{a}_{n+1}\}$$

ここで \mathbf{u}_n 、 \mathbf{v}_n 、 \mathbf{a}_n は時刻 t_n における変位、速度、加速度を表し、 \mathbf{u}_{n+1} 、 \mathbf{v}_{n+1} 、 \mathbf{a}_{n+1} は時刻 t_{n+1} における変位、速度、加速度である。また Δt は時間増分を表し、 β_N と γ_N はNewmark-B法のパラメータである。本研究では線形加速度法である $\gamma = 0.5$ 、 $\beta_N = 0.25$ のパラメータを用い、ま高周波領域の数値減衰を考慮するために $\gamma_N = 0.6$ 、 $\beta_N = 0.3025$ のパラメータを用いる。

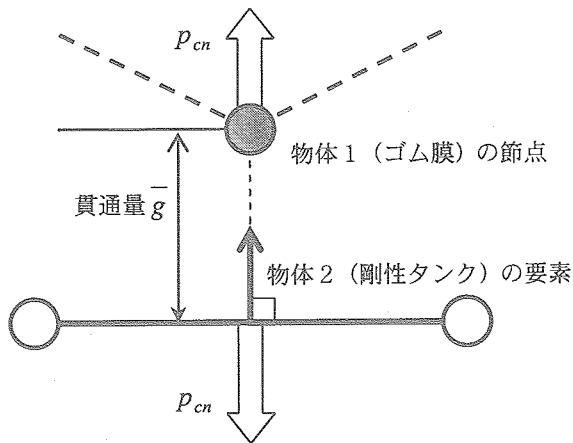


図3 接触表面モデル

3. 解析結果

解析の手法としては、まず図1のようなゴムの袋に内圧が5.4KPaになるまで水を注入し、静的なつりあい位置を求めた。図4に初期形状および静的な釣り合い状態における有限要素メッシュを、また図5にそのときの応力分布を示す。図5において横軸は初期形状における内角 ϕ を意味しており、左端が膜端部、右端が膜頂点部を表す。CS1 およびCS2はそれぞれ子午線方向(ϕ)および円周方向(θ)のコーシー応力を表す。図4および図5より静的釣り合い位置においてしわおよび接触は発生していない。この静的釣り合い位置からY軸方向に正弦波励振を1.0s間与える。ここで励振周波数は2.0Hz、励振振幅は 5.0m/s^2 である。

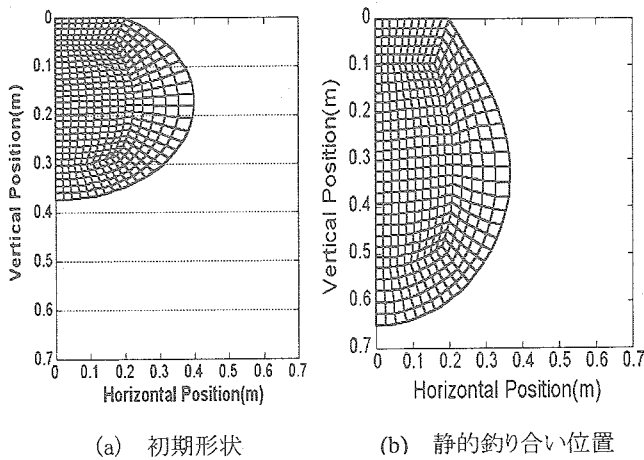


図4 有限要素メッシュ

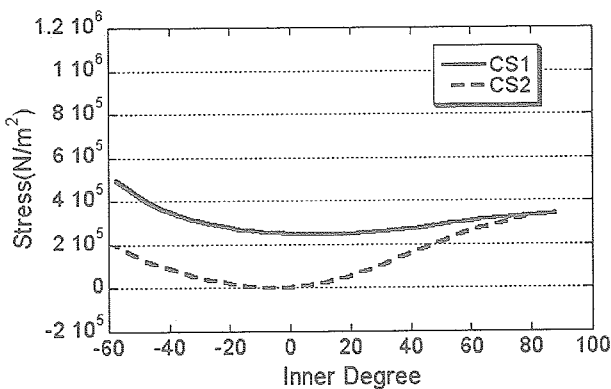


図5 応力分布

3-1. しわについての考察

図6にしわを考慮した場合と考慮しない場合の、膜の中央部における円周方向応力の時刻歴応答を示す。図よりしわを考慮しない場合では負の応力が発生する時間領域が存在するが、しわを考慮することによりその時間領域で応力はゼロとなることが分かる。つまり子午線方向(ϕ)にしわが発生する。図7、8に膜が下方および上方へ最大変形を生じたときの膜状態—メッシュ変形図と、その直前の内部流体の流速ベクトルを示す。膜の運動に伴い内部流体が下方および上方へ流れていく様子がわかる。また図より膜が下方へ移動したときにその中央部でしわが発生し、上方へ移動したときにしわが消失することがわかる。次に図9に“しわ”を考慮する場合と考慮しない場合において、その最大変形時におけるコーシー応力分布の比較を示す。図より膜端部における応力は、しわを考慮した場合と、考慮しない場合ではそれほど差はみられないが、膜の中央部付近では“しわ”を考慮した場合の円周方向の応力がゼロとなり、“しわ”が発生しているのが分かる。また膜の頂点部においては、しわを考慮した場合の子午線および円周方向の応力が、しわを考慮しない場合に比べて大きくなっており、膜が頂点付近で膨らんだことを示している。このようにしわは膜応力の分布状態に非常に大きな影響を与えることがわかる。

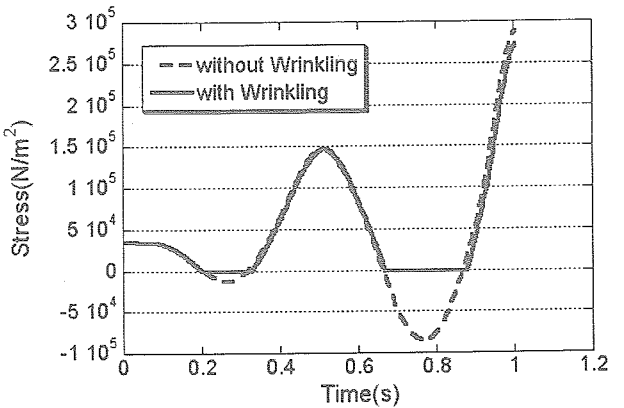
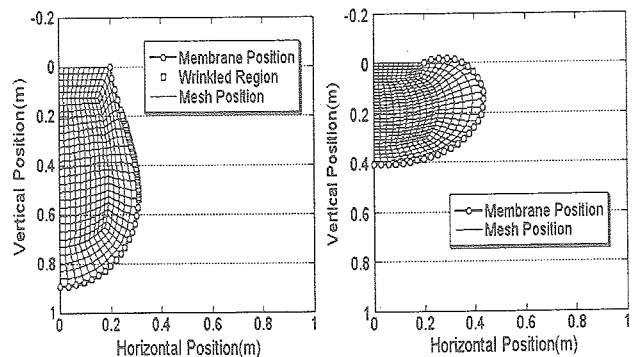


図6 膜中央部における円周方向応力の時刻歴応答



0.7725s 1.0s
図7 膜状態—メッシュ変形

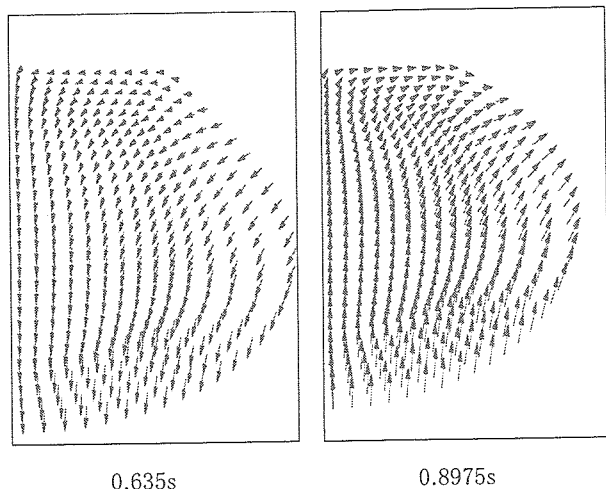


図8 流速ベクトル

膜は外側に広がる。図13に接触を考慮する場合と考慮しない場合において、その最大変形時におけるコーシー応力分布の比較を示す。図より膜頂点付近において、接触を考慮したときの応力は、考慮しないものより低下しているのが分かる。これは、膜の頂点に接触力が作用しているためである。また先にも述べたように、接触することにより膜の中央部が外側へ広がるため、しわ領域が減少している。このように接触は膜の変形のみならず内部流体の流れも大きく変化させ、それに伴い膜応力も大きく変化する。

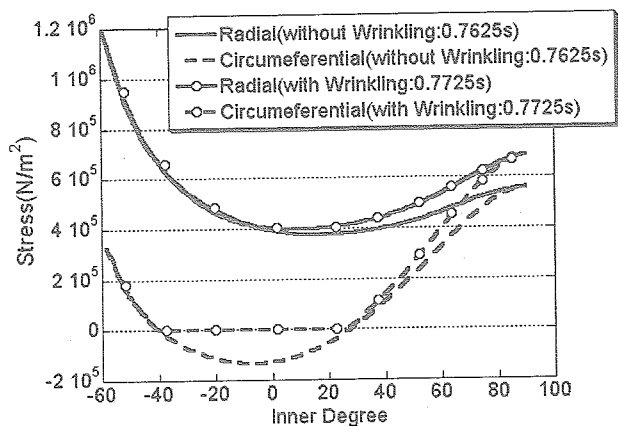


図9 最大変形時におけるコーシー応力の比較

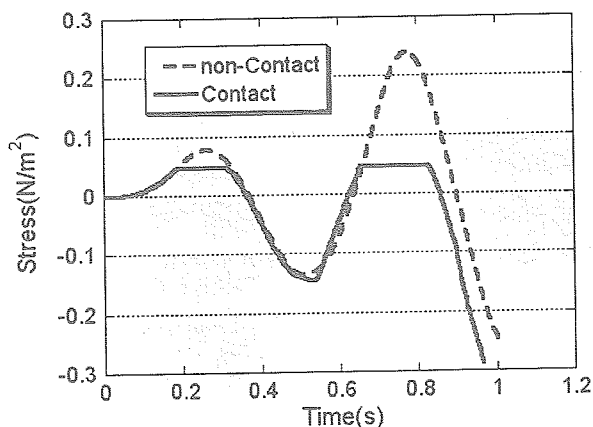


図10 膜頂点における垂直方向変位の時刻歴

3-2. 接触についての考察

次にしわを考慮した状態でブラダタンクの外側に剛体の円筒タンクがある場合を考える。このときの膜の頂点の垂直方向変位の時刻歴応答を図10に示す。図より接触時間領域では変位が一定となるのが分かる。図11、12に膜が下方または上方に最大変形したときの膜状態—メッシュ形状図と流速ベクトルを示す。メッシュ変形は図5の接触が無い場合と比べて、膜の底部で接触を起こし、それに伴い膜の中央部が膨らんでいるのがわかる。これは内部の流速ベクトルを見ても明らかなように、“接触”すると内部流体は剛体壁に沿って流れ、膜の側部に流れが集中する。そのため

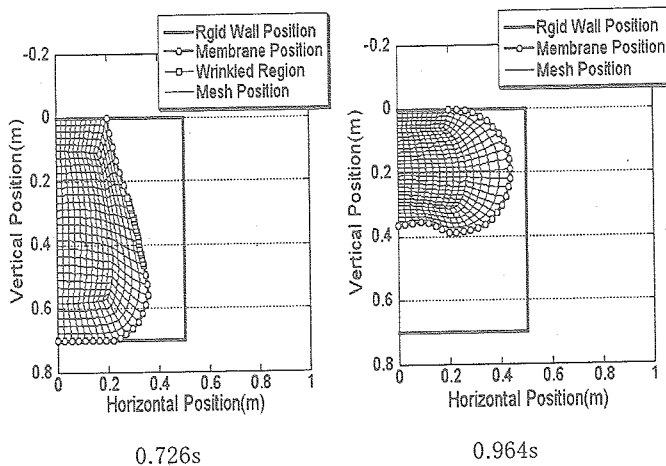


図11 膜状態—メッシュ変形

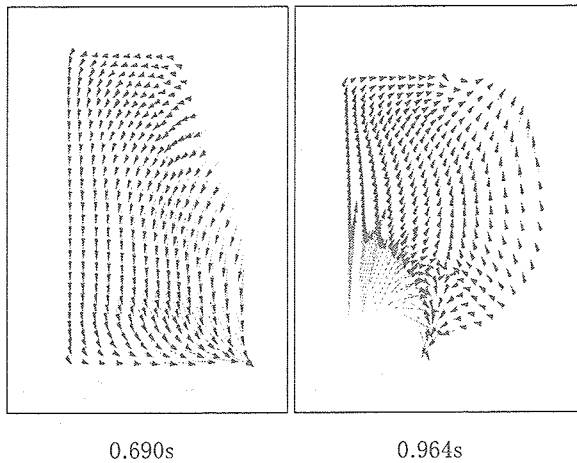


図12 流速ベクトル

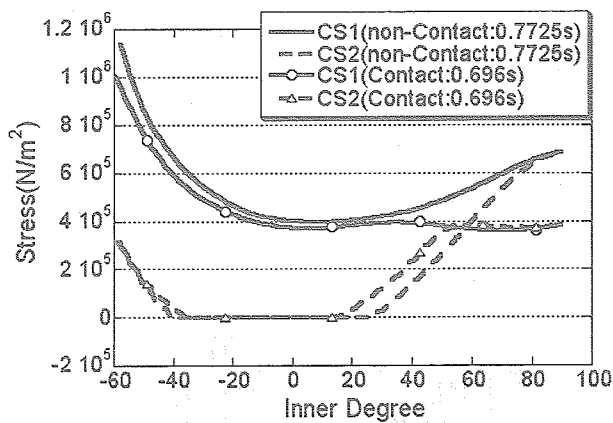


図13 最大変形時におけるコーシー応力の比較

4. 結論

以上の結果を得た。

- 1) ゴム膜／流体連成問題に適用できる“しわ”および“接触”アルゴリズムを構築した。
- 2) “しわ”を考慮することにより膜の応力が大きく変化し、ゴム膜／流体連成系の動特性にも影響を与えることがわかった。
- 3) “接触”を考慮することにより膜の変形状のみならず、内部流体の流れが大きく変化し、接触がゴム膜／流体連成系の動特性に非常に大きな影響を及ぼすことがわかった。

今後の課題としては実験を行うことにより、これまでのゴム膜／流体連成問題の解析アルゴリズムの妥当性を検証することが必要である。

5. 参考文献

- [1] 山下泰典, “ゴム膜／流体連成問題における非線形特性解析”, 東京都立科学技術大学 2000 年度卒業論文
- [2] Lu, K., Accorsi, M. and Leonard, J., “Finite Element Analysis of Membrane Wrinkling”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 50, 2001, pp. 1017-1038
- [3] Wriggers, P., “A Note on Tangent Stiffness for Fully Nonlinear Contact Problems”, *Communications in Applied Numerical Methods*, 1985, Vol. 1, pp. 199-203
- [4] Taylor, R.L., and Papadopoulos, P., “A Finite Element Method for Dynamic Contact Problems”, *The Finite Element Method in the 90's*, pp. 212-224