

# 平板と薄い空気層の連成系に対する固有値解析

Eigenvalue Analysis for Coupled System of Plate and Thin Layer of Air

北村光章、渡辺直行 (東京都立科学技術大学)

Mitsuaki Kitamura and Naoyuki Watanabe (Tokyo Metropolitan Institute of Technology)

## Abstract

The large sized solar arrays of satellite are installed in the fairing section of by being folded up. So the thickness of air layer between two panels is very thin comparing with the in-plate size of the panel. Because the panel is extremely light, the vibration of the panel is affected by the air layer. This paper presents that the effects of layer thickness on frequency of a panel including viscous, incompressibility air.

### 1. 序論

衛星の太陽電池パネルは大型化に伴い、図1のように折り畳まれた状態でフェアリングに収納される。その際、パネルの面内寸法と比べ非常に薄い空気層がパネル間に存在する。またパネルの振動試験において、真空中と大気中でのパネルの固有振動数が異なるという報告例がある。これは衛星に取り付けられている太陽電池パネルが非常に軽量であるため、空気の影響(付加質量効果、剛性効果など)を無視できないためと考えられる。このような空気と構造体の連成系を取り扱った論文では主に空気の粘性を無視したものがほとんどである。

本研究では粘性・非圧縮性空気と平板の連成系に対し、固有振動数の空気層の厚さに対する依存性について調べる。この際、粘性空気と非粘性空気との場合を比較し、粘性の影響についても考察する。

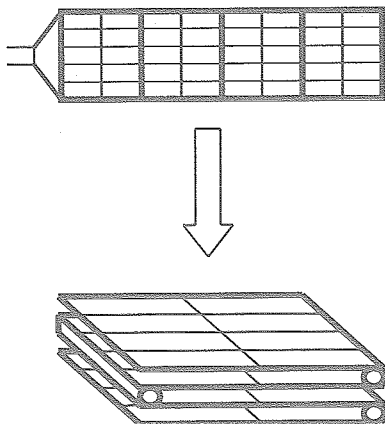


図1. 折り畳まれた太陽電池パネル

### 2. 有限要素解析

図2に本研究で用いた有限要素モデルを示す。空気は非圧縮性空気とし、その周りは剛体壁で囲まれているものとする。平板および空気領域は紙面垂直方向に無限に続くものとして2次元解析を行い、平板は梁でモデル化する。また空気領域には4節点矩形要素、梁領域には2節点曲げ要素を用いる。

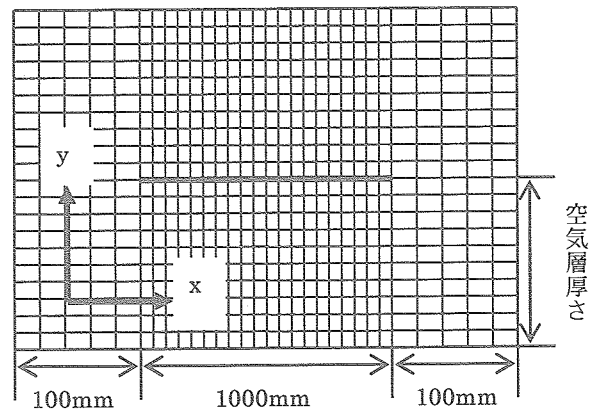


図2. 有限要素モデル

空気領域には次のような対流項を無視し線形化したNS方程式と連続の式を用いる。

$$\rho_f [\dot{u} + (u \cdot \nabla) u] + \dot{u} \nabla p - \mu \nabla^2 u - \frac{1}{3} \mu \nabla (\nabla \cdot u) = 0$$

$$\dot{\rho}_f + \nabla \cdot u = 0$$

ここで、 $\rho_f$ ,  $p$ ,  $u$ ,  $\mu$  はそれぞれ空気の密度、圧力、流速ベクトル、粘性係数である。また粘性空気の場合には連続の式に次のようなペナルティ関数法を導入する。

$$\varepsilon p + \nabla \cdot u = 0$$

ここで $\varepsilon$ はペナルティ変数と呼ばれる変数であり、 $\varepsilon$ に対して合理的な値を決定する次のような数値基準が紹介されている[1]。

$$\frac{1}{\varepsilon} = C\mu$$

この論文では $C$ の値を $10^8$ としている。これは完全な非圧縮性を扱う場合、有限要素法では数値解析上の問題がしばしば起こるため、このようにペナルティ関数法を導入し擬似的な圧縮性を考慮することによって圧力が簡便に評価され、非圧縮性状態をおおむね満たすように解くことを目指す解法である。

さらに梁領域には次のような運動方程式、またはハミルトンの原理を用いる。

$$\rho_s \ddot{d} + EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 d}{\partial x^2} \right) = 0$$

$$\Pi = \int_V \left( \frac{1}{2} E \varepsilon^2 - \frac{1}{2} \rho_f \dot{d}^2 \right) dV + \int_S (pn_s \cdot d) dS$$

ここで $\rho_s$ ,  $d$ ,  $EI$  はそれぞれ梁の密度、 $y$ 方向変位、曲げ剛性である。さらに $V$ ,  $S$  は梁領域の面要素、線要素、 $n_s$  は梁領域の表面に立てた外向き法線ベクトルを表す。

最後に空気領域と梁領域の $x$ 方向の連成境界には空気の $y$ 方向流速ベクトルと梁の速度が一致するという次のような条件を用いる。

$$-\dot{d} \cdot n_s = u \cdot n_f$$

ここで $n_f$ は空気領域の表面に立てた外向き法線ベクトルである。これらから変分式を求め、離散化し重ね合わせることで次のような振動方程式が得られる[2]。

$$[M] \cdot \{\ddot{d}\} + [K] \cdot \{d\} = 0$$

$$[M] \cdot \{\ddot{w}\} + [C] \cdot \{\dot{w}\} + [K] \cdot \{w\} = 0$$

上が非粘性空気と梁の、下が粘性空気と梁の振動方程式である。ここで $[M]$ ,  $[C]$ ,  $[K]$ はそれぞれ連成系の質量、減衰、剛性マトリックスである。また $w$ は次のように $d$ と $u$ からなる変数である。

$$w = \begin{Bmatrix} u \\ \lambda d \end{Bmatrix}$$

ここで $\lambda$ は粘性空気の場合の固有値である。これらの振動方程式の調和振動を考慮すると、それぞれ次のような固有振動方程式が導かれる。

$$[M]^{-1} [K] \cdot \{d\} = \omega^2 \{d\}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ -[M]^{-1} [K] & -[M]^{-1} [C] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} w \\ \lambda w \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} w \\ \lambda w \end{Bmatrix}$$

ここで $\omega^2$ は非粘性空気の場合の固有値となる。

最後に解析で用いた物性値を表1に示す。

表1. 解析で用いた物性値

梁の線密度 $\rho_s$	$4.7 \times 10^{-5}$	kg/mm
梁の曲げ剛性 $EI$	$2.2 \times 10^{10}$	kg·mm <sup>3</sup> /s <sup>2</sup>
空気の密度 $\rho_f$	$1.205 \times 10^{-9}$	kg/mm <sup>3</sup>
空気の粘性係数 $\mu$	$1.82 \times 10^{-8}$	kg/mm·s <sup>2</sup>
音速 $c$	$3.434 \times 10^5$	mm/s

3. 解析結果

非粘性空気、または粘性空気と梁の連成系について、空気層厚さの変化と固有振動数の関係を図3に示す。ここで縦軸は空気がない場合の梁の固有振動数で無次元化した値である。したがって空気がない場合の固有振動数は空気層厚さを変化させても常に1.0となる。図より、空気層厚さを変化させても粘性空気の場合の固有振動数は非粘性空気の場合と一致することがわかる。これより図3で示した空気層厚さの範囲では粘性の影響は現れないと考えられる。さらに空気層厚さが1000mmのときの固有振動数は空気がない場合の固有振動数と比べ約2%低下しているが、10mmのときでは約20%低下している。

また図4, 5には空気層厚さがそれぞれ1000mmと10mmにおける圧力分布の比較を示す。ここでは最も基本的な1次モードのみを考え、梁の中央の最大振幅を1mmとしたときの圧力分布を示す。図より、空気層厚さが1000mmのときは梁上下の圧力差は約 $0.4 \times 10^3 Pa$ 、10mmのときでは約 $1.6 \times 10^3 Pa$ となっている。このように空気層厚さを小さくすると梁上下により大きな圧力差が生じることがわかる。これにより梁の運動が拘束される(付加質量効果)。したがって空気層厚さが大きい場合では圧力差は小さいため、付加質量は小さく固有振動数の低下は小さい。しかし、空気層厚さを薄くすると梁の上下で大きな圧力差が生じ付加質量が増加するため、系の固有振動数は大きく低下する。

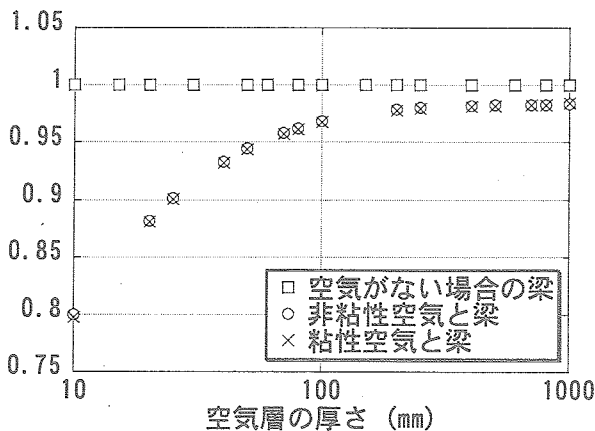


図3. 空気層厚さと固有振動数①

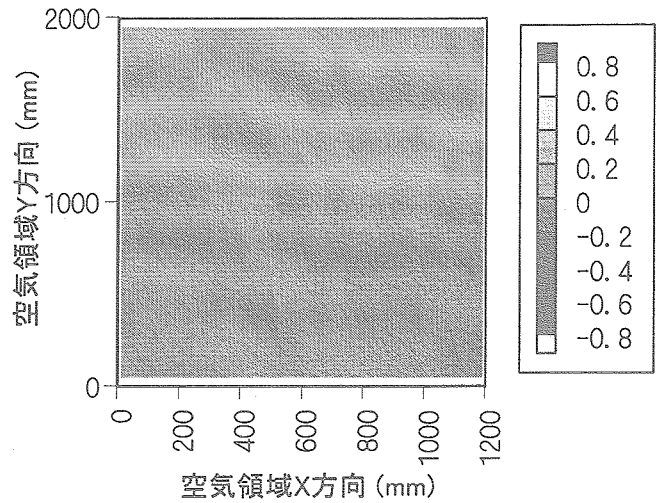


図4. 圧力分布 (空気層厚さ 1000mm)

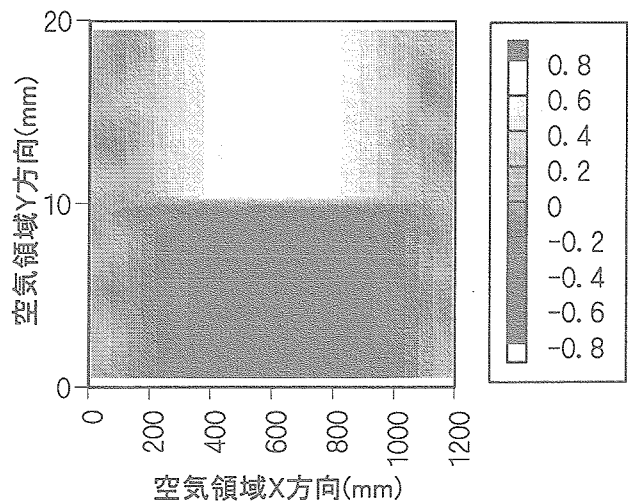


図5. 圧力分布 (空気層厚さ 10mm)

次に空気層をさらに小さくした場合の固有振動数を図6に示す。これより空気層厚さが5mmより小さくなると粘性空気の場合の固有振動数は非粘性空気の場合よりも小さくなり、空気層厚さが1mmのときでは10%以上小さくなることわかる。また、図7は粘性が連成系に与える影響の大きさを表す減衰係数比と空気層厚さの関係を示す。減衰係数比 $\gamma$ は次のように与えられる。

$$\gamma = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

ここで $\alpha$ 、 $\beta$ は連成系の固有値に関連する共役複素固有値 $\lambda = \alpha + i\beta$ の実部と虚部を示す。一般に減衰振動において $\alpha$ は負の値をとり、その絶対値は系に与える減衰の強度を表している。図より、空気層厚さが10~20mmでは減衰係数比はほぼ0であるが、5mmより小さくすると急激に増加している。

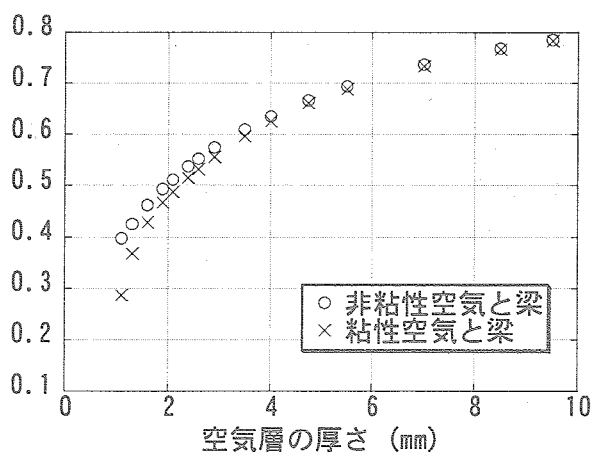


図6. 空気層厚さと固有振動数②

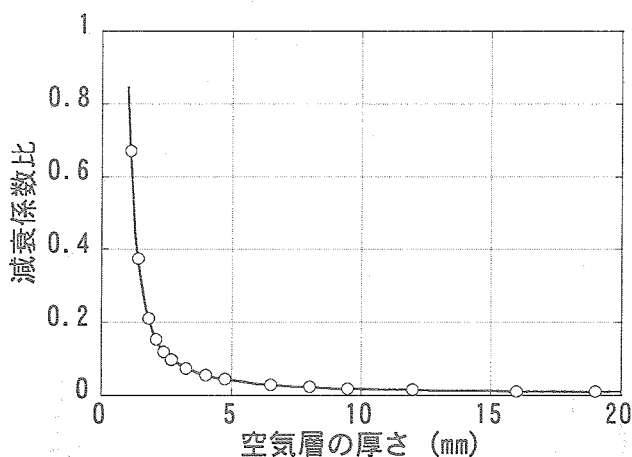


図7. 空気層厚さと減衰係数比

また図8に $x=100\sim 600\text{mm}$ における空気層厚さ20mmと1mmでの非粘性空気、図9は粘性空気の流速ベクトルを示す。まず図8より非粘性空気の場合では空気層厚さを小さくしても空気の流れは変化しない。しかし図9から粘性を考慮すると空気層厚さを小さくしたとき空気の流れは主にy方向、つまり梁の振動方向へ流れることがわかる。

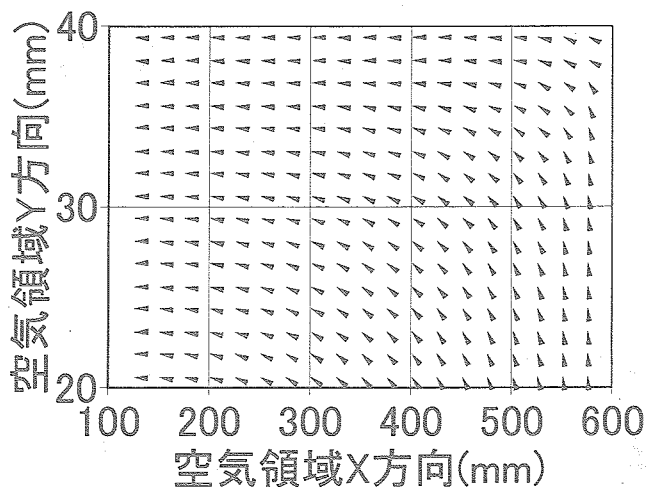


図8-1. 非粘性空気の流速ベクトル (空気層厚さ20mm)

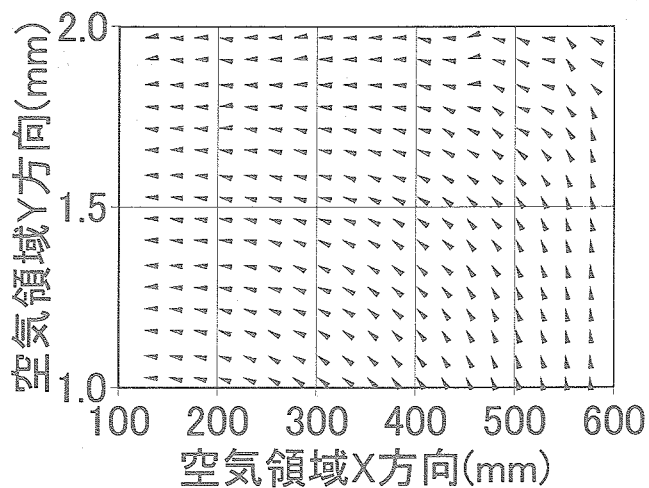


図8-2. 非粘性空気の流速ベクトル (空気層厚さ1mm)

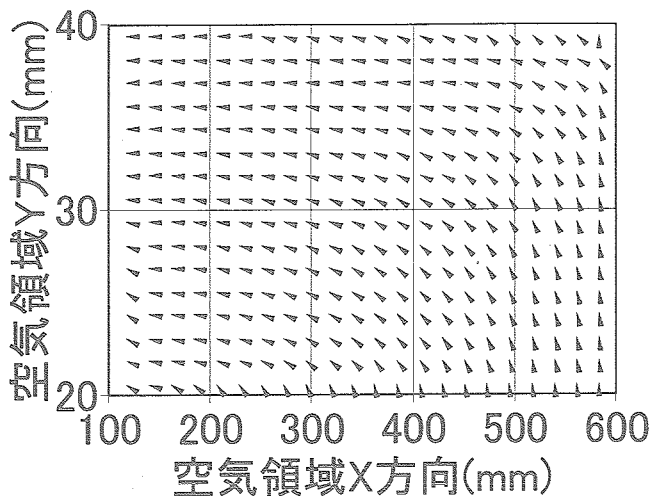


図9-1. 粘性空気の流速ベクトル (空気層厚さ 20mm)

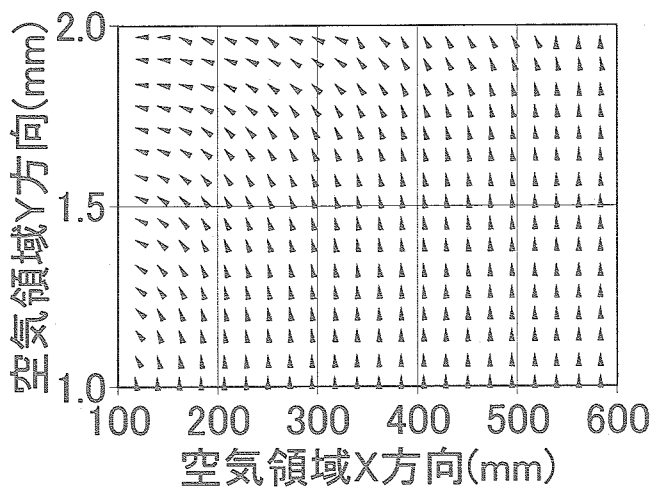


図9-2. 粘性空気の流速ベクトル (空気層厚さ 1mm)

さらに図10は空気層厚さが1mmと20mmのときの粘性空気の、図11は非粘性空気の流速ベクトル分布の一部(x=1000~1100mm)を示す。図8より空気層厚さが1mmのときは梁まわりや剛体壁付近で境界層が生じ、空気層を支配していることがわかる。しかし空気層厚さが20mmのときでは境界層は生じているが支配的ではなく、粘性力より慣性力が支配的となる。このように空気層厚さが小さくなると境界層が支配的になり、連成系の固有振動数が低下する。また図9より粘性を考慮しないときは空気層厚さに関係なく境界層が全く発生しないことがわかる。

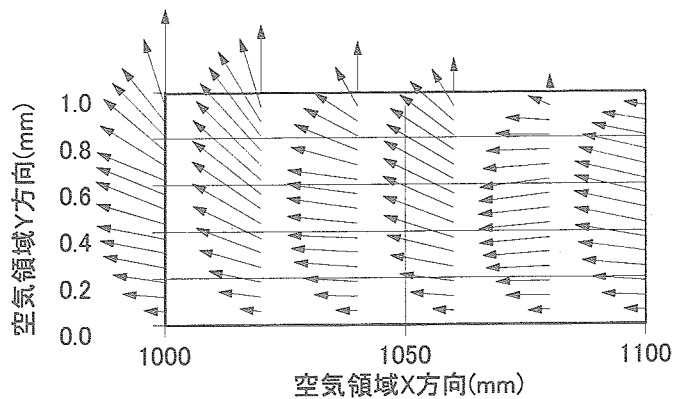


図10-1. 粘性空気の流速ベクトル (空気層厚さ 1mm)

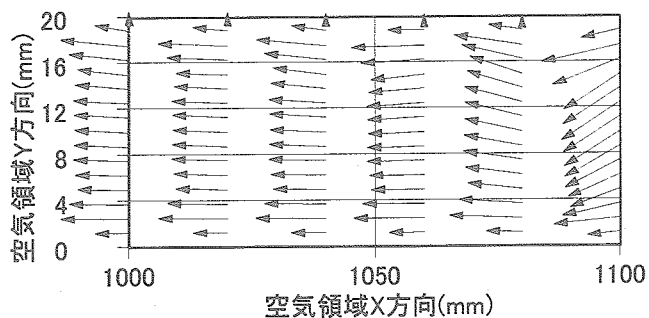


図10-2. 粘性空気の流速ベクトル (空気層厚さ 20mm)

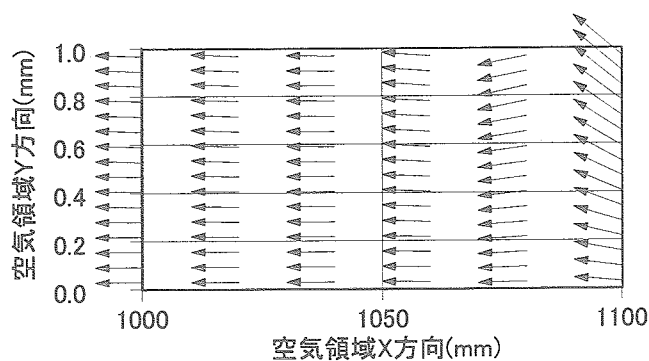


図11-1. 非粘性空気の流速ベクトル (空気層厚さ 1mm)

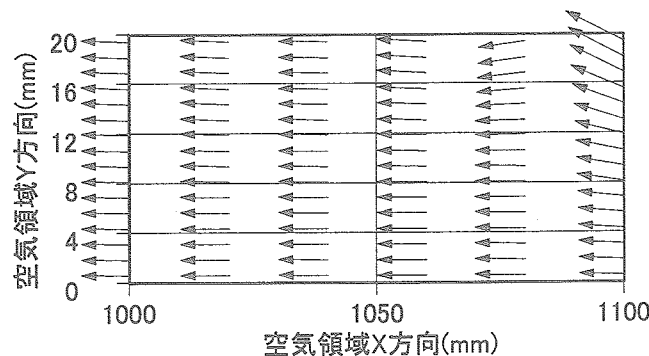


図11-2. 非粘性空気の流速ベクトル (空気層厚さ 20mm)

## 4. 結論

本論文では、空気層厚さに対する、粘性空気と平板連成系の固有振動数変化について調べるために有限要素法を用いて固有値解析を行った。その際、非粘性空気の場合の固有振動数と比較した。その結果、空気層厚さが小さくなれば梁の上下に大きな圧力差が生じ、梁に加わる付加質量が増加するため、空気と平板連成系の固有振動数は低下した。さらに、空気層が平板の面内寸法に比べ極めて小さくなったとき、境界層が空気層を支配し、粘性力により連成系の固有振動数が低下した。

## 5. 参考文献

- [9]. SSL II 使用手引書 (科学用サブルーチンライブラリ)  
99SP-4020-1 富士通 (1987)
- [1]. Thomas J. R. Hughes, Wing Kam Liu, and Alec Brooks  
「Finite Element Analysis of Incompressible Viscous Flows  
by the Penalty Function Formulation」 *Journal of  
Computational Physics* (1997) 30, 1-60
- [2]. 大坪英臣、久保田晃弘 「計算力学と CAE シリーズ 6  
相関問題」 培風館 (1991)
- [3]. M.Sasaki 「Eigenmode Analysis for Coupled Air-Plate  
System Accounting for Viscous Damping」 Department  
of Aerospace Engineering, Tokyo Metropolitan  
Institute of Technology, Master Thesis (1998)
- [4]. 鷲津久一郎、宮本博、山田嘉昭、山本善之、川井忠彦  
「有限要素法ハンドブック I 基礎編」 培風館 (1988)
- [5]. 近藤恭平 「振動論」 培風館 (1970)
- [6]. 戸川隼人 「有限要素法による振動解析」 サイエンス社  
(1981)
- [7]. 白倉昌明、大橋秀雄 「流体力学 (2)」 コロナ社 (1969)
- [8]. 小林繁夫、近藤恭平 「工学基礎講座 7 弾性力学」 培風  
館 (1987)